２０１１年度夏学期集中講義「数学科教育法」（藤岡敦担当）授業資料

§1. Napier の定数

Napier の定数 e は数列の極限を用いて

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と定義される. しかし, 右辺に現れる数列の極限はそもそも存在するのだろうか? 実はこれは実数の連続性とよばれるものと深く関わることである. 以下, この数列について調べるために

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N})$$

とおく.

命題　数列 $\{a_n\}$ は上に有界.

証明　まず,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (\because \text{二項展開})\\
&= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (*)\\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$2^{n-1} \le n!$$

が成り立つことを用いると,

$$\begin{aligned}
a_n &\le 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\
&< 3.
\end{aligned}$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界. □

注意　後で $e < 3$ であることを用いて e が無理数であることを示すが, 上の証明では $e \le 3$ が言えるのみである. $e < 3$ であることを示すには, $n \ge 4$ として

$$\begin{aligned}
a_n &\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-4}}\right)\\
&< 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{8}\cdot 2\\
&= 2 + \frac{11}{12}\\
&< 3
\end{aligned}$$

と上の命題の証明の不等式の評価を精密化すればよい.

命題　数列 $\{a_n\}$ は単調増加.

証明　上の命題の証明の $(*)$ より,

$$\begin{aligned}
a_n &< 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\
&= a_{n+1}.
\end{aligned}$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加. □

実数の連続性は連続の公理ともよばれ, 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ がもつ重要な性質である. §2 で述べるように連続の公理には同値なものが幾つか知られているが, ここでは次のものを採用しよう.

連続の公理　有界な単調数列は収束する.

上の二つの命題と連続の公理により, 数列 $\{a_n\}$ の極限は存在する. 更に, 微分積分で学ぶ Maclaurin の定理を用いると, 次で示されるように e は有理数ではないことが分かる.

命題　e は無理数.

証明　背理法により示す.
まず,

$$2 < e < 3$$

に注意する.
e が有理数であると仮定する.
このとき,

$$e = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

と表すことができる.
e^x に対する Maclaurin の定理より,

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

となる $\theta \in (0,1)$ が存在する.
両辺に $n!$ を掛けて整理すると,

$$n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \frac{e^\theta}{n+1}.$$

左辺は整数だから,

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{e^\theta}{n+1}\\
&< \frac{3}{n+1} \quad (\because e<3,\ 0<\theta<1).
\end{aligned}$$

よって, $n=1$ となるから, e は整数.
これは最初の注意に矛盾.
従って, e は無理数. □

§2. 連続の公理

§1 では連続の公理として,

(M) 有界な単調数列は収束する.

を採用した. ここで, 六つの命題

(W) 上に有界な空でない集合は上限をもつ.

(A) (Archimedes の原理)

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

(K) (区間縮小法)

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ で, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ は 1 点.

(BW) (Bolzano-Weierstrass の定理)

有界数列は収束部分列をもつ.

(C) Cauchy 列は収束する.

(D) (Dedekind の公理)

(A, B) を切断, 即ち A, B を $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \emptyset$ で, $a \in A$, $b \in B$ ならば $a < b$ をみたす $\mathbf{R}$ の部分集合とすると,

(1) $\max A$ は存在するが, $\min B$ は存在しない.

(2) $\max A$ は存在しないが, $\min B$ は存在する.

の何れかが成り立つ.

を考える.

定理 次の (1)〜(6) は同値.

(1) (M) (2) (W) (3) (K) かつ (A) (4) (BW) かつ (A) (5) (C) かつ (A) (6) (D)

数列 $\{a_n\}$ は任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ ならば, $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となるとき, Cauchy 列とよぶ. 上の (C) を用いると, e^x の Maclaurin 展開が次の様にして得られる.

例 $x \in \mathbf{R}$ を固定しておき, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める. また, $N \in \mathbf{N}$ を

$$N + 1 > 2|x|$$

となるように選んでおく.
$p \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{(N+p)!}\right| &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left\{1 + \frac{|x|}{N+1} + \cdots + \frac{|x|^{p-1}}{(N+1)^{p-1}}\right\} \\
&\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\frac{1}{1 - \frac{|x|}{N+1}} \\
&\leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

よって, $\{a_n\}$ は Cauchy 列.
更に計算すると,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^x$$

となることが分かる. 即ち,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

命題　収束する数列は Cauchy 列.

証明　$\{a_n\}$ を $a \in \mathbf{R}$ に収束する数列とする. 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N$ ならば,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$m, n \in \mathbf{N}$, $m, n \geq N$ とすると,

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - a) - (a_n - a)| \\
&\leq |a_m - a| + |a_n - a| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

即ち, $\{a_n\}$ は Cauchy 列. □

注意　なお, $\mathbf{R}$ は次の様に構成することができる.
X を有理数列かつ Cauchy 列全体からなる集合とする. $\{a_n\}, \{b_n\} \in X$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

のとき, $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ と書くことにすると, $\sim$ は X 上の同値関係となる. 即ち,

反射律: $\{a_n\} \sim \{a_n\}$.
対称律: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ならば, $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.
推移律: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ ならば, $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

が成り立つ. このとき, $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = X/\sim$$

により定められる.

§3. 複素数

複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ は

$$\{a+bi | a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$$

によりあたえられる. $\mathbf{C}$ には自然に四則演算が定まる. 例えば, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

$\mathbf{C}$ は集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

と四則演算も込めて同一視することができる. 実際,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

となるからである. このとき, 共役複素数は転置行列に対応する. 実際,

$$\overline{a+bi} = a - bi,$$

$${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

となるからである.

§4. 四元数

集合 $\mathbf{H}$ を

$$\mathbf{H} = \left\{ a+bi+cj+dk \,\middle|\, \begin{array}{c} a,b,c,d \in \mathbf{R} \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, jk = i, ki = j \end{array} \right\}$$

により定める. $\mathbf{H}$ の元は四元数とよばれる. $\mathbf{H}$ には自然に四則演算が定まるが, 積の交換律は成り立たないことに注意する必要がある. 例えば,

$$ij = -ji,\ jk = -kj,\ ki = -ik$$

となるからである.
$\mathbf{H}$ は集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\}$$

と四則演算も込めて同一視することができる. 実際, $1, i, j, k$ にはそれぞれ

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

が対応するが, このとき,

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,$$

$$IJ = K,\ JK = I,\ KI = J$$

となるからである.
複素数の場合と同様に, 四元数に対しても共役が

$$\overline{a+bi+cj+dk} = a-bi-cj-dk$$

により定められる. 上の同一視では, 共役四元数は随伴行列に対応する. 実際,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}^* &= {}^t\overline{\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるからである.
また, 四元数に対しても絶対値が

$$|a+bi+cj+dk| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

により定められる. $q, q' \in \mathbf{H}$ とすると,

$$|qq'| = |q||q'|$$

が成り立つ. 証明は上の同一視と行列式の性質を用いると易しい.

注意　$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

とおく．ここで, 任意の $a, b \in \mathbf{R}^n$ に対し積 $a \cdot b \in \mathbf{R}^n$ が定まり,

(1) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(2) $k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb)$ $(k \in \mathbf{R})$.

(3) $|a \cdot b| = |a||b|$.

をみたすとする．このとき, n は

$$n = 1, 2, 4, 8$$

の 4 通りに限ることが知られている．もちろん, $n = 1, 2, 4$ のときは, それぞれ $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ が対応する．また, $n = 8$ のときは, Cayley 数とよばれるものが現れる．Cayley 数に対しては積の結合律は成り立たない.

§5. 三角関数

指数関数 e^x の Maclaurin 展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を思い出そう．この式は変数 x が複素数のときも成り立つ．この指数関数から出発して三角関数を定義することにする．

まず, $x \in \mathbf{R}$ に対し $\cos x$ を

$$\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix}$$

により定める．すると,

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

となり, $\cos x$ の Maclaurin 展開が得られる．

今度は $\sin x$ を

$$\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$$

により定める．すると,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} \\
&= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

となり, $\sin x$ の Maclaurin 展開が得られる．

$\cos x, \sin x$ の定義より, Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= |e^{ix}|^2 \\
&= e^{ix}\overline{e^{ix}} \\
&= e^{ix} e^{-ix} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

また, 項別微分定理を用いると,

$$(\cos x)' = -\sin x,\ (\sin x)' = \cos x.$$

更に, $x, y \in \mathbf{R}$ とすると,

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}.$$

ここで,

$$\text{左辺} = \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

一方,

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y).\end{aligned}$$

よって, 加法公式

$$\begin{cases}\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,\\ \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y\end{cases}$$

が成り立つ.

注意　$\theta \in \mathbf{R}$ に対し複素数 $e^{i\theta}$ は §3 で述べた同一視で

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と表される. 対応

$$(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

は $\mathbf{R}^2$ の原点を中心とする角 θ の回転を表す. このような行列全体は行列式 1 の 2 次の直交行列全体に一致し, これを SO(2) と書く. 即ち,

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \middle| 0 \le \theta < 2\pi \right\} = \{A | A \text{ は 2 次行列で } |A| = 1 \text{ かつ } {}^tAA = E\}$$

である. SO(2) は 2 次の特殊直交群または回転群ともよばれる.

§6. 円周率

$\cos x$ および $\sin x$ の Maclaurin 展開

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

を用いて円周率を定義することにする.

命題　$\cos x$ は区間 $(0, 2)$ で単調減少.

証明　まず,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right\}$$

に注意する.
$0 < x < 2$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} &< \frac{2^2}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= -\sin x \\ &< 0. \end{aligned}$$

従って, $\cos x$ は区間 $(0, 2)$ で単調減少. □

命題　$\cos x_0 = 0$ をみたす x_0 が区間 $(0, 2)$ の中で唯一つ存在する.

証明　まず,

$$\cos x = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right\}$$

に注意する.
$0 < x < 3$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} &< \frac{3^2}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

よって,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} \right).$$

特に,

$$\begin{aligned} \cos 2 &< 1 - \frac{2^2}{2} \left(1 - \frac{2^2}{12} \right) \\ &= 1 - \frac{4}{3} \\ &< 0. \end{aligned}$$

一方,
$$\cos 0 = 1.$$
従って, 中間値の定理と上の命題より, $\cos x_0 = 0$ をみたす x_0 が区間 $(0, 2)$ の中で唯一つ存在する. □

上の命題の x_0 を用いて, 円周率 π を
$$\pi = 2x_0$$
により定める. π は無理数であることが知られている.
定義より,
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$
更に,
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$
となることが分かる.
加法公式より,
$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$
同様に,
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$
よって,
$$\cos(x + \pi) = -\cos x,\ \sin(x + \pi) = -\sin x. \tag{$*$}$$
従って
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$
$(*)$ より,
$$\begin{aligned} e^{\pi i} &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -\cos 0 - i \sin 0 \\ &= -1. \end{aligned}$$
即ち, Euler の等式
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$
が得られた.
$\sin x$ の零点は $0, \pm n\pi$ $(n \in \mathbf{N})$ であるが, 実は Euler の積公式
$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$
が成り立つ.

Wallis の公式

(1) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.

証明　(1): Euler の積公式において $x=\frac{\pi}{2}$ とおけばよい.
(2): (1) より,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\\&=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{2^2n^2}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!}\\&=\lim_{m\to\infty}\frac{2^{4m}(m!)^4}{\{(2m)!\}^2(2m+1)}.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

□

(1) の別証明　まず,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\quad(n=0,1,2,\dots)$$

とおくと,

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ は偶数}),\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ は奇数}).\end{cases}$$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき,

$$0<\sin^{n+1}x<\sin^n x$$

だから, $\{I_n\}$ は単調減少で,

$$\begin{aligned}1&<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\\&<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}\\&=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\\&=\frac{2n+1}{2n}\to 1\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1.$$

これは (1) と同値. □

§7. ζ 関数

ζ 関数は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

により定められる関数である. 伝統的に変数は s を用いることが多い. 但し, $s>0$ とする.

命題 $\zeta(s)$ は $s>1$ のとき収束し, $0<s\leq 1$ のとき発散する.

証明 $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ とする.
$s>1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}&<1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^s}\\&=1+\int_{1}^{n}\frac{dx}{x^s}\\&=1+\left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_1^n\\&=1+\frac{1}{-s+1}\left(n^{-s+1}-1\right)\\&<1-\frac{1}{-s+1}.\end{aligned}$$

よって $\zeta(s)$ は収束する.
$0<s\leq 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}&\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&>\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dx}{x}\\&=\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}\\&=\log(n+1)\to+\infty\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

よって, $\zeta(s)$ は発散する. □

$\zeta(1)$ が発散すること, 即ち調和級数が発散することは, Euler が ζ 関数を研究した時期よりも 400 年程も前に Oresme により,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\\&=+\infty\end{aligned}$$

と示されていた.

また, $n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\,\text{個}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

より, 数列 $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}$ は Cauchy 列でないから, このことからも $\zeta(1)$ が発散することが分かる.

Euler の積公式

$$\zeta(s) = \prod_{p\,\text{は素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

証明

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

と素因数分解の一意性を用いればよい. □

系　素数は無限に存在する.

証明　$\zeta(1) = +\infty$ と Euler の積公式を用いればよい. □

各 a_n が正であるような数列 $\{a_n\}$ に対し級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ をそれぞれ正項級数, 交代級数とよぶ. 交代級数が収束するための十分条件は次の様にあたえられる.

命題　$\{a_n\}$ を各 a_n が正であるような 0 に収束する単調減少数列とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ は収束する.

証明　数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$$

により定める.
$n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}S_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &< a_1.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}S_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &\leq S_{2(n+1)}.\end{aligned}$$

よって, $\{S_{2n}\}$ は上に有界で単調増加だから収束する.

更に,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})\\ &= \lim_{n\to\infty} S_{2n}.\end{aligned}$$

従って, $\{S_n\}$ は収束するから, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する. □

例　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

の値は次の様にして求めることができる.
$-1<x<1$ のとき,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}.$$

項別積分定理を用いると,

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(-1)^{n-1}x^{n-1}dx.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= [\log(1+x)]_0^1\\ &= \log 2.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right]_0^1\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2.$$

例 (Leibniz の級数)
$-1<x<1$ のとき,

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

項別積分定理を用いると,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

となることが分かる.

§8. Basel 問題

$\zeta(2)$ の値を求めよ, という問題は Basel 問題とよばれる. これはこの値を求めることに情熱を傾けた Bernoulli 一家と Euler が過ごした場所に由来する. Basel 問題は Euler によりおおよそ次のように解かれた.
$\sin x$ に対する Euler の積公式より,

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

右辺の x^2 の係数は

$$-\frac{1}{\pi^2}\zeta(2).$$

一方,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + - \cdots .$$

よって,

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\zeta(2).$$

即ち,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 $s > 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s).\end{aligned}$$

特に,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \frac{1}{2}\zeta(2) \\ &= \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{3}{4}\zeta(2) \\ &= \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

かなり巧妙であるが, 上の二つめの例は次の様に計算することができる.

補題 $\mathbf{R}^2$ の領域 D を

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x, y > 0,\ x + y < \frac{\pi}{2}\right\}$$

により定め,

$$f(x,y)=\left(\frac{\sin x}{\cos y},\frac{\sin y}{\cos x}\right)\quad ((x,y)\in D)$$

とおく. このとき, f は D から $(0,1)\times(0,1)$ への全単射を定める.

証明　単射性: $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$,

$$\frac{\sin x_1}{\cos y_1}=\frac{\sin x_2}{\cos y_2},\ \frac{\sin y_1}{\cos x_1}=\frac{\sin y_2}{\cos x_2}$$

とする.
加法公式より,

$$\begin{aligned}\sin(x_1\pm y_2)&=\sin x_1\cos y_2\pm\cos x_1\sin y_2\\&=\sin x_2\cos y_1\pm\cos x_2\sin y_1\\&=\sin(x_2\pm y_1).\end{aligned}$$

ここで,

$$0<x_1+y_2,x_2+y_1<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<x_1-y_2,x_2-y_1<\frac{\pi}{2}.$$

よって,

$$x_1\pm y_2=x_2\pm y_1$$

となることが分かる.
従って,

$$x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

即ち, f は単射.
全射性: $(x,y)\in D$ とする.
まず,

$$\begin{aligned}0&<\frac{\sin x}{\cos y}\\&<\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos y}\\&=1.\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}0&<\frac{\sin y}{\cos x}\\&=\frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\\&=\frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin x}{\cos y}\right)^2\cos^2 y}}\\&<1.\end{aligned}$$

よって, f は全射. $\square$

上の二つめの例の別証明

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 u^{2n-2}du\right)^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1 (uv)^{2n-2}dudv\\&=\int_0^1\int_0^1\frac{dudv}{1-u^2v^2}.\end{aligned}$$

補題の変数変換

$$(u,v)=f(x,y)\quad((x,y)\in D)$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\dfrac{\cos x}{\cos y} & \dfrac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}\\ \dfrac{\sin y\sin x}{\cos^2 x} & \dfrac{\cos y}{\cos x}\end{vmatrix}\\&=1-\frac{\sin^2 x\sin^2 y}{\cos^2 x\cos^2 y}\\&=1-u^2v^2\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\frac{dudv}{1-u^2v^2}&=\iint_D\frac{1-u^2v^2}{1-u^2v^2}dxdy\\&=\iint_D dxdy\\&=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

□

例 (Catalan の定数)
Catalan の定数 K は

$$K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$$

により定められる.
例えば,

$$K=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1+x^2y^2}$$

と表され, また,

$$K=0.91596\ldots$$

であるが, K が有理数か無理数かは分かっていない.

§9. Bernoulli 数

ζ 関数の偶数における値は Bernoulli 数を用いて表すことができる.
まず,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$$

とおく.
de l'Hospital の定理より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{e^{-x} - 1} - 1 - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x(e^x - 1) + x}{e^x - 1} - 1 - \frac{x}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} x^{2n} \tag{1}$$

と表される. B_n が Bernoulli 数である. Bernoulli 数は文献により符号や添字が異なることがあるので注意すること. なお, (1) は $-2\pi < x < 2\pi$ のとき収束する.
(1) の両辺に

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を掛けると,

$$x = \left\{ 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!} x^{2k} \right\} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+1}}{(l+1)!}.$$

$n \in \mathbf{N}$ とすると, 右辺の x^{2n+1} の係数は

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2(2n)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!} \frac{1}{(2n-2k+1)!}.$$

よって,

$$0 = 1 - \frac{2n+1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{2n+1}{2k} B_k.$$

即ち,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{2n+1}{2k} B_k = n - \frac{1}{2}. \tag{2}$$

$n = 1$ のとき,

$$\binom{3}{2} B_1 = \frac{1}{2}.$$

よって,
$$B_1 = \frac{1}{6}.$$
特に, Bernoulli 数は有理数である.

例　(2) において $n = 2$ のとき,
$$\binom{5}{2} B_1 - \binom{5}{4} B_2 = \frac{3}{2}.$$
よって,
$$\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{6} - 5B_2 = \frac{3}{2}.$$
従って,
$$B_2 = \frac{1}{30}.$$

$-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$ とすると,
$$\begin{aligned}
\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}{\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}} \\
&= i \frac{(e^{2ix} - 1) + 2}{e^{2ix} - 1} \\
&= i + \frac{2i}{e^{2ix} - 1}.
\end{aligned}$$

(1) より,
$$\frac{2ix}{e^{2ix} - 1} = 1 - ix + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} (2ix)^{2n}.$$
よって, $\cot x$ の Laurent 展開
$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$
が得られる.

例　$\cot x$ の Laurent 展開を用いて, $\tan x$ の Maclaurin 展開を求めることができる. 実際, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ とすると,
$$\begin{aligned}
\tan x &= \cot x - 2 \cot 2x \\
&= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} - 2 \left\{ \frac{1}{2x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} (2x)^{2n-1} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

定理　$k \in \mathbf{N}$ とすると,
$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_k.$$

特に, Bernoulli 数は正の数.

証明　$\sin x$ に対する Euler の積公式より,

$$\begin{aligned}
\cot x &= (\log|\sin x|)' \\
&= \left\{\log\left|x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right|\right\}' \\
&= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\dfrac{2x}{n^2\pi^2}}{1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}} \\
&= \frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}} \\
&= \frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \\
&= \frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k-1}.
\end{aligned}$$

$\cot x$ の Laurent 展開と比較すると,

$$\frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}}=\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k.$$

即ち,

$$\zeta(2k)=\frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_k.$$

□

例

$$\begin{aligned}
\zeta(4) &= \zeta(2\cdot 2) \\
&= \frac{2^3\pi^4}{4!}B_2 \\
&= \frac{8\pi^4}{24}\cdot\frac{1}{30} \\
&= \frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}$$

注意　ζ 関数の奇数における値を簡単に表す式は知られていない.
例えば,

$$\zeta(3)=1.20205\ldots$$

は無理数であることが Apéry により示され, このことから $\zeta(3)$ は Apéry の定数ともよばれる. また, $\zeta(2k+1)$ $(k\in\mathbf{N})$ の内の無限個は無理数, $\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\zeta(11)$ の何れかは無理数であることが知られている.

§10. Euler の定数

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \quad (n \in \mathbf{N})$$

により定める.

命題　$\{a_n\}$ は収束する.

証明　まず,

$$\begin{aligned} a_n &> \log(n+1) - \log n \\ &> 0. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \\ &< \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \log(n+1) + \log n \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $\{a_n\}$ は下に有界で単調減少だから収束する. □

上の数列 $\{a_n\}$ の極限を γ と書くことにする. γ が Euler の定数である.

命題　$\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$.

証明　まず,

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} < a_n\ (n \in \mathbf{N})$$

だから,

$$\gamma < 1.$$

次に, 関数 $y = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で下に凸だから, $k \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

よって,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}\right) + \frac{1}{n} \\ &> \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

従って,

$$\gamma \geq \frac{1}{2}.$$

□

注意　実際には,

$$\gamma = 0.57721\ldots$$

であるが, γ が有理数か無理数かは分かっていない.

例　$a \in \mathbf{R}$ に対し a を超えない最大の整数を Gauss 記号を用いて $[a]$ と書く.
$n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ とすると,

$$\begin{aligned}\int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k\right) \\ &= a_n - \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

よって,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \gamma.$$

例 (Stieltjes の定数)
$s > 1$ とする.
まず, §8 の一つめの例で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s)$$

を示したことを思い出そう. これを変形すると,

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{s-1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

となる.
ここで, de l'Hospital の定理を用いて, §7 の一つめの例で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

を示したことを思い出すと,

$$\begin{aligned}\lim_{s \to 1+0} (s-1)\zeta(s) &= \frac{1}{\log 2} \cdot \log 2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

よって,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{n!} (s-1)^n$$

と表される. γ_n は Stieltjes の定数とよばれる.
更に,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k^{s-1}} - \frac{1}{(k+1)^{s-1}}\right\} = 1$$

だから,

$$\begin{aligned}
(s-1)\zeta(s) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+1)^{s-1}} - \frac{1}{k^{s-1}} + \frac{s-1}{k^s} \right\} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{-(s-1)\log(k+1)} - e^{-(s-1)\log k} + \frac{s-1}{k} e^{-(s-1)\log k} \right\} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n (s-1)^n}{n!} \left\{ (\log(k+1))^n - (\log k)^n \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{s-1}{k} \frac{(-1)^n (s-1)^n (\log k)^n}{n!} \right].
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log(k+1))^{n+1} - (\log k)^{n+1}}{n+1} \right\} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log(m+1))^{n+1}}{n+1} \right\} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{(\log k)^n}{k} - \frac{(\log m)^{n+1}}{n+1} \right\}.
\end{aligned}$$

特に, γ_0 は Euler の定数に一致する.

例

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \log \frac{k+1}{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{k} \right)^n \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nk^n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}.
\end{aligned}$$

§11. Γ 関数

Γ 関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

により定められる関数である. 但し, $x > 0$ とする.
微分と積分の順序交換を行うと,

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n dt$$

が得られる.

命題　次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(2) $\Gamma(x) > 0$ で, $\log \Gamma(x)$ は下に凸.
(3) $\Gamma(1) = 1$.

証明　(2) の後半のみ示す.
任意の $u \in \mathbf{R}$ に対し

$$\begin{aligned}\Gamma(x)u^2 + 2\Gamma'(x)u + \Gamma''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \left\{u^2 + 2u \log t + (\log t)^2\right\} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (u + \log t)^2 \, dt \\ &> 0.\end{aligned}$$

よって, 最初の式の判別式を考えると,

$$(\Gamma'(x))^2 - \Gamma(x)\Gamma''(x) < 0.$$

従って,

$$\begin{aligned}(\log \Gamma(x))'' &= \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' \\ &= \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \\ &> 0\end{aligned}$$

だから, $\log \Gamma(x)$ は下に凸. □

逆に, $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が上の命題の (1) から (3) をみたすならば, $f(x)$ は Γ 関数に一致することが分かる. この事実は Bohr-Mollerup の定理として知られている. Bohr-Mollerup の定理を用いて, Γ 関数に対する Weierstrass の公式および Gauss の公式を示そう.

定理

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}} \quad \text{(Weierstrass の公式)} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \text{(Gauss の公式)}.\end{aligned}$$

証明　まず,

$$f(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\gamma x}}{x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\dfrac{x}{k}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{x\left(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)} \frac{e^{\frac{x}{1}} e^{\frac{x}{2}} \cdots e^{\frac{x}{n}}}{x\left(1+\dfrac{x}{1}\right)\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{x}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \end{aligned}$$

よって, 後半の等式が示された.
次に,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} x \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{n}{x+n+1} \\ &= x f(x). \end{aligned}$$

また, $f(x) > 0$ で,

$$(\log f(x))' = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

だから,

$$\begin{aligned} (\log f(x))'' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって, Bohr-Mollerup の定理より,

$$f(x) = \Gamma(x).$$

□

注意　$x \in \mathbf{C}$, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ に対しても $\Gamma(x)$ を考えることができる. このことを認めて, 相補公式を示そう.

相補公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

証明

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x) \\
&= -x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1} \qquad (\because \text{Weierstrass の公式}) \\
&= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (\because \sin x \text{ に対する Euler の積公式}).
\end{aligned}$$

□

例　相補公式において $x = \frac{1}{2}$ とすると,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

が得られる. 即ち

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}.$$

変数変換

$$t = x^2$$

を行うと,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

最後に, Γ 関数と ζ 関数を結び付ける次の定理を示しておこう.

定理　$s > 1$ とすると,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

証明　$n \in \mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \\
&= \int_0^{+\infty} n^s e^{-nx} x^{s-1} dx \quad (t = nx).
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\zeta(s) &= \Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \\
&= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^{s-1}dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{s-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx.
\end{aligned}$$

□