

§1. Euclid 空間

Euclid 空間は数学の様々な場面において現れるが、単なる集合ではなく、ベクトル空間としての構造をもち、更に内積や距離といったものを兼ね備えている。簡単のため、ここでは実 Euclid 空間を扱い、複素 Euclid 空間は扱わないことにする。

$n \in \mathbf{N}$ を固定しておき、 \mathbf{R} の n 個の直積を \mathbf{R}^n と書く。このとき、

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

と表すことができる。 \mathbf{R}^1 は \mathbf{R} のことである。また、 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ はそれぞれ直線、平面、空間と同一視することが多い。更に、 \mathbf{R}^n の元を点ともよぶ。

\mathbf{R}^n は線形代数において扱われるベクトル空間の例である。 \mathbf{R}^n の二つの元 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対し和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ はそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

により定められる。零ベクトル 0 は $(0, 0, \dots, 0)$ と表される元である。

更に、 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

により定める。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を \mathbf{R}^n の標準内積、 $\langle x, y \rangle$ を x と y の内積とよぶ。また、 \mathbf{R}^n に標準内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を考えたものを n 次元実 Euclid 空間、または単に n 次元 Euclid 空間とよぶ。

以下では n 次元 Euclid 空間としての \mathbf{R}^n を考える。

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ とすると、次の (1)~(4) が成り立つ。

- (1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- (2) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$.
- (3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (4) $x \neq 0$ ならば、 $\langle x, x \rangle > 0$.

標準内積を用いて \mathbf{R}^n で定義された実数値関数 $\| \cdot \|$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める。定義より、 $\|x\| \geq 0$ で、 $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである。 $\| \cdot \|$ を \mathbf{R}^n のノルム、 $\|x\|$ を x のノルムまたは長さともよぶ。

定理 $x, y \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ とすると、次の (1)~(3) が成り立つ。

- (1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
- (2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明 (2), (3) のみ示す。

(2): $y = 0$ のときは明らか。

$y \neq 0$ のとき、

$$\langle y, y \rangle > 0$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle \langle y, y \rangle \\ &= \left(\langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle^2} \langle y, y \rangle \right) \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2. \end{aligned}$$

よって,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

即ち,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

(3): (2) より,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

よって,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

ノルムを用いて $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 d を

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. d を \mathbf{R}^n の Euclid 距離, $d(x, y)$ を x と y の Euclid 距離とよぶ.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ とすると, 次の (1)~(3) が成り立つ.

- (1) $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ.
- (2) $d(y, x) = d(x, y)$.
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

証明 (3) のみ示す.

ノルムに関する三角不等式より,

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\|. \end{aligned}$$

よって,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

□

\mathbf{R}^n の位相に関して特に基本的な概念について述べていこう.

$a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とし, \mathbf{R}^n の部分集合 $B(a; \varepsilon)$ を

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n | d(a, x) < \varepsilon\}$$

により定める. $B(a; \varepsilon)$ を a を中心とする半径 ε の球体とよぶ. 例えば, $n = 1$ のときは $B(a; \varepsilon)$ は开区間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ で, $n = 2$ のときは $B(a; \varepsilon)$ は円板である.

M を \mathbf{R}^n の部分集合とし, $a \in \mathbf{R}^n$ とする. ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$B(a; \varepsilon) \subset M$$

が成り立つとき, a を M の内点とよぶ. M の内点全体の集合を M° または M^i と書き, M の内部とよぶ.

\mathbf{R}^n の位相を考える場合は、更に \mathbf{R}^n 自身を全体集合とする。このとき、 M の補集合 M^c の内点を M の外点とよぶ。 M の外点全体の集合を M^e と書き、 M の外部とよぶ。

M の内点でも外点でもない点を M の境界点とよぶ。 M の境界点全体の集合を ∂M と書き、 M の境界とよぶ。

和集合 $M^i \cup \partial M$ を \overline{M} と書き、 M の閉包とよぶ。

例 M を a を中心とする半径 ε の球体 $B(a; \varepsilon)$ とすると、

$$\begin{aligned} M^i &= M, \\ M^e &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(a, x) > \varepsilon\}, \\ \partial M &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(a, x) = \varepsilon\}, \\ \overline{M} &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

最後に現れた集合を a を中心とする半径 ε の閉球体とよぶ。

上で定義した概念を用いて、開集合および閉集合を定義しよう。

M を \mathbf{R}^n の部分集合とする。 M は $M = M^i$ となるとき \mathbf{R}^n の開集合、 $M = \overline{M}$ となるとき \mathbf{R}^n の閉集合とよぶ。

$(M^i)^i = M^i$ および $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ となることが分かるから、 M^i は \mathbf{R}^n の開集合で、 \overline{M} は \mathbf{R}^n の閉集合である。 また、 M^i は包含関係に関して M に含まれる最大の開集合で、 \overline{M} は包含関係に関して M を含む最小の閉集合であることが分かる。

例 \mathbf{R} の区間を考える。

开区間 (a, b) は開集合。

但し、 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ は開集合でもあり、閉集合でもある。

閉区間 $[a, b]$ は閉集合。

区間 $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ はともに閉集合である。

その他の区間は開集合でも閉集合でもない。

\mathbf{R}^n の開集合全体の集合を \mathfrak{O} と書くことにする。 \mathfrak{O} を \mathbf{R}^n の開集合系とよぶ。

定理 次の (1)~(3) が成り立つ。

- (1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{O}$.
- (2) $O_1, O_2, \dots, O_k \in \mathfrak{O}$ ならば、 $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.
- (3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathfrak{O} の元からなる集合族とすると、 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

\mathbf{R}^n の閉集合全体の集合を \mathfrak{C} と書くことにする。 \mathfrak{C} を \mathbf{R}^n の閉集合系とよぶ。

\mathbf{R}^n の開集合の補集合は閉集合で、閉集合の補集合は開集合となることが分かる。このことと上の定理および de Morgan の法則より、次が成り立つことが分かる。

定理 次の (1)~(3) が成り立つ。

- (1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{C}$.
- (2) $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathfrak{C}$ ならば、 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \in \mathfrak{C}$.
- (3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を \mathfrak{C} の元からなる集合族とすると、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{C}$.

関連事項 1. 内積とノルム

Euclid 空間に対する内積およびノルムは一般のベクトル空間に対しても考えることができる。 V を \mathbf{R} 上のベクトル空間とする。 V で定義された実数値関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が次の (1)~(4) をみたすとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積とよぶ。

- (1) $u, v, w \in V$ とすると、 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
- (2) $c \in \mathbf{R}, u, v \in V$ とすると、 $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$.
- (3) $u, v \in V$ とすると、 $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.
- (4) $u \in V, u \neq 0$ ならば、 $\langle u, u \rangle > 0$.

このとき、組 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とよぶ。

また、 V で定義された実数値関数 $\| \cdot \|$ が次の (5)~(7) をみたすとき、 $\| \cdot \|$ をノルムとよぶ。

- (5) 任意の $u \in V$ に対し $\|u\| \geq 0$ で、 $\|u\| = 0$ となるのは $u = 0$ のときのみ。
- (6) $c \in \mathbf{R}, u \in V$ とすると、 $\|cu\| = |c|\|u\|$.
- (7) $u, v \in V$ とすると、 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)。

このとき、組 $(V, \| \cdot \|)$ をノルム空間とよぶ。

三角不等式はとても重要な不等式である。なお、「三角」という言葉は三角形の三辺の長さのみたす不等式に由来する。

ノルム空間 $(V, \| \cdot \|)$ に対し $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ とすると、

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| + \dots + \|u_n\| \quad (7')$$

が成り立つ。

また、(7) において、 u を $u - v$ とすると、

$$\|u\| \leq \|u - v\| + \|v\|.$$

更に、(7) において、 v を $v - u$ とし、(6) を用いると、

$$\|v\| \leq \|u\| + \|u - v\|.$$

よって、上の二式を合わせて、

$$\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\| \quad (7'')$$

が成り立つ。

三角不等式から派生して得られた (7'), (7'') も重要な不等式である。

Euclid 空間の場合と同様に、ベクトル空間に内積があたえられていれば、その内積からノルムを定めることができる。即ち、内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対しノルム $\|u\|$ は

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (u \in V)$$

により定めればよい。

逆に、ノルム空間のノルムから内積が定まるためには内積空間に対し成り立つ中線定理、即ち

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad (u, v \in V)$$

が成り立てばよいことが知られている。