§2. 距離空間と位相空間

Euclid 空間に対する Euclid 距離を一般化し, 距離空間というものを考えることができる.

定義 X を空でない集合とする. $X \times X$ で定義された実数値関数 d が次の (1)〜(3) をみたすとき, d を距離関数または単に距離とよぶ. また, 組 (X, d) または単に X を距離空間とよぶ.

(1) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ.

(2) $x, y \in X$ とすると, $d(y, x) = d(x, y)$.

(3) $x, y, z \in X$ とすると, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離とすると, $(\mathbf{R}^n, d)$ は距離空間となるが, 次のような距離を考えることもできる.

例 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 d' および d'' を

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \ d''(x, y) = \max\{|x_i - y_i|| i = 1, 2, \ldots, n\}$$

により定める. 但し,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$$

である.
このとき, $(\mathbf{R}^n, d')$, $(\mathbf{R}^n, d'')$ はともに距離空間となる.

例 X を空でない集合とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 d を

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

により定める.
このとき, (X, d) は距離空間となる.

例 X を空でない集合とし, X で定義された有界な実数値関数全体の集合を $B(X)$ と書くことにする.
$B(X) \times B(X)$ で定義された実数値関数 d を

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|| x \in X\} \quad (f, g \in B(X))$$

により定める.
このとき, $(B(X), d)$ は距離空間となる.

Euclid 空間の位相が Euclid 距離を用いて定められたように, 距離空間に対しても距離を用いて位相を定めることができる.
(X, d) を距離空間とする. $a \in X$, $\varepsilon > 0$ とし, X の部分集合 $B(a; \varepsilon)$ を

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in X | d(a, x) < \varepsilon\}$$

により定める. $B(a; \varepsilon)$ を a を中心とする半径 ε の球体とよぶ.
M を X の部分集合とし, $a \in X$ とする. ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$B(a; \varepsilon) \subset M$$

が成り立つとき, a を M の内点とよぶ. M の内点全体の集合を M° または M^i と書き, M の内部とよぶ.
更に, X を全体集合とする. このとき, M の補集合 M^c の内点を M の外点とよぶ. M の外点全体の集合を M^e と書き, M の外部とよぶ.
M の内点でも外点でもない点を M の境界点とよぶ. M の境界点全体の集合を ∂M と書き, M の境界とよぶ.
和集合 $M^i \cup \partial M$ を $\overline{M}$ と書き, M の閉包とよぶ.

例　(X,d) を距離空間とし, $a \in X$ とする. M を a を中心とする半径 ε の球体 $B(a;\varepsilon)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
&M^i = M,\\
&M^e = \{x \in X | d(a,x) > \varepsilon\},\\
&\partial M = \{x \in X | d(a,x) = \varepsilon\},\\
&\overline{M} = \{x \in X | d(a,x) \leq \varepsilon\}.
\end{aligned}
$$

最後に現れた集合を a を中心とする半径 ε の閉球体とよぶ.

更に, 距離空間の開集合および閉集合は次のように定めればよい.
M を距離空間 (X,d) の部分集合とする. M は $M = M^i$ となるとき X の開集合, $M = \overline{M}$ となるとき X の閉集合とよぶ.
特に, M^i は X の開集合で, $\overline{M}$ は X の閉集合となる.
§1 の後半に述べた $\mathbf{R}^n$ の開集合系がみたす三つの性質を一般化し, 更に位相空間というものを考えることができる.

定義　X を空でない集合とする. X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ が次の (1)〜(3) をみたすとき, $\mathfrak{O}$ を位相とよぶ. また, 組 $(X,\mathfrak{O})$ または単に X を位相空間とよぶ.

(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.
(2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.
(3) $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ に対し $\mathfrak{O}$ の元を X の開集合とよぶ. このとき, $\mathfrak{O}$ を X の開集合系ともよぶ.

例　(X,d) を距離空間とし, $\mathfrak{O}$ を X の開集合全体からなる X の部分集合系とする.
このとき, $(X,\mathfrak{O})$ は位相空間となる.

例　X を一つの元 p のみからなる集合とする.
このとき, X に対し考えることのできる位相は $\{\emptyset, X\}$ のみである.
X を二つの元 p, q からなる集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3, \mathfrak{O}_4$ を

$$
\mathfrak{O}_1 = \{\emptyset, X\},\ \mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, \{p\}, X\},\ \mathfrak{O}_3 = \{\emptyset, \{q\}, X\},\ \mathfrak{O}_4 = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, X\}
$$

により定める.
このとき, X に対し考えることのできる位相は $\mathfrak{O}_1$〜$\mathfrak{O}_4$ の四つである.
なお, 有限集合に対し考えることのできる位相の個数を簡単に表す式は知られていない.

例 (密着位相)
X を空でない集合とすると, X の部分集合系 $\{\emptyset, X\}$ は X の位相を定める. この位相を密着位相とよぶ. 密着位相を考えた位相空間を密着空間とよぶ.

X が一つの元のみからなる集合でないならば, X の密着位相は距離から定まる位相とはなりえないことが分かる. このようなとき, 位相空間は距離付け可能でないという.

例 (離散位相)
X を空でない集合とすると, X の巾集合, 即ち X の部分集合全体からなる部分集合系は X の位相を定める. この位相を離散位相とよぶ. 離散位相を考えた位相空間を離散空間とよぶ.
前半において現れた距離空間の二つめの例の距離は離散位相を定めることが分かる. 即ち, 離散空間は距離付け可能である.

$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする. X を全体集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{A}$ を

$$\mathfrak{A} = \{A \subset X | A^c \in \mathfrak{O}\}$$

により定める. $\mathfrak{A}$ の元を X の閉集合とよぶ. また, $\mathfrak{A}$ を X の閉集合系とよぶ.

定理　$\mathfrak{A}$ を位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ の閉集合系とすると, 次の (1)〜(3) が成り立つ.
(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{A}$.
(2) $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ ならば, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.
(3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

証明　(1): まず,

$$(X)^c = \emptyset \in \mathfrak{O}.$$

また,

$$(\emptyset)^c = X \in \mathfrak{O}.$$

よって,

$$X, \emptyset \in \mathfrak{A}.$$

(2): 仮定より,

$$A_1^c, A_2^c, \ldots, A_k^c \in \mathfrak{O}.$$

よって, de Morgan の法則および位相の定義より,

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c \in \mathfrak{O}.$$

従って,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}.$$

(3): 仮定より, $(A_\lambda^c)_{\lambda \in \Lambda}$ は $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族.
よって, de Morgan の法則および位相の定義より,

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \in \mathfrak{O}.$$

従って,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}.$$

□

関連事項 2. 同値なノルム

$\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離がノルムを用いて定義されたように, 一般のノルム空間も自然に距離空間となる. 即ち, ノルム空間 $(V, \| \ \|)$ に対し V の距離 d は

$$d(u,v) = \|u - v\| \quad (u, v \in V)$$

により定めればよい.
ベクトル空間 V を固定しておき, V のノルム全体の集合を $N(V)$ と書くことにする.
更に, V の二つのノルム $\| \ \|_1, \| \ \|_2 \in N(V)$ に対し, ある $c, c' > 0$ が存在し

$$c\|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq c'\|u\|_2 \qquad (*)$$

が任意の $u \in V$ に対し成り立つとき, $\| \cdot \|_1 \sim \| \cdot \|_2$ と書くことにする.
このとき, $\sim$ は $N(V)$ 上の同値関係を定める. 即ち, 次の (1)〜(3) が成り立つ.

(1) 任意の $\| \ \| \in N(V)$ に対し $\| \ \| \sim \| \ \|$ (反射律).

(2) $\| \ \|_1, \| \ \|_2 \in N(V)$ とする. $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$ ならば, $\| \ \|_2 \sim \| \ \|_1$. (対称律).

(3) $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_3 \in N(V)$ とする. $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$ かつ $\| \ \|_2 \sim \| \ \|_3$ ならば, $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_3$. (推移律).

同値なノルムは同じ位相を定めることが分かる. 即ち, 同値なノルムから定まる開集合系は一致する.
一つのベクトル空間に対し考えることのできるノルムは一通りではない. しかし, ベクトル空間が有限次元ならば, 任意の二つのノルムは同値となることが分かる. よって, 有限次元ベクトル空間に対してはどのようなノルムを考えても同じ位相空間を定める. この事実は次の手順により示すことができる.
まず, V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, V の基底 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ を選んでおく.
$u \in V$ を

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R})$$

と表しておき,

$$\|u\|_0 = \max\{|x_i| | i = 1, 2, \ldots, n\}$$

とおくと, $\| \ \|_0 \in N(V)$ となる.
次に, $\| \ \|_0$ が任意の $\| \ \| \in N(V)$ と同値であることを示す.
$(*)$ に対応する左側の不等式は

$$\begin{aligned}\|u\| &\leq |x_1|\|u_1\| + |x_2|\|u_2\| + \cdots + |x_n|\|u_n\| \\ &\leq \|u\|_0 \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|\end{aligned}$$

だから,

$$c = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\| \right)^{-1}$$

とおけばよい.
$(*)$ に対応する右側の不等式は少々やっかいであるが, c' が存在しないと仮定し, 背理法を用いることにより示すことができる.
更に, これらのことから V の任意の二つのノルムが同値となることを示すのは容易である.