§3. 連続写像

微分積分においても現れる連続関数は位相空間から位相空間への連続写像として一般化することができる.
簡単のため, $\mathbf{R}^n$ の開集合 D で定義された実数値関数 f を考える.
$a \in D$ に対し f が a で連続であるとは, 直感的には D の点 x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近づくということであった. このようなことを数学的に厳密に扱うためには, いわゆる $\varepsilon - \delta$ 論法を用いる. $\mathbf{R}^n$ には Euclid 距離 d が定められていることを思い出そう.

定義 f を $\mathbf{R}^n$ の開集合 D で定義された実数値関数とし, $a \in D$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し, $x \in D$, $d(x, a) < \delta$ ならば,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となるとき, f は a で連続であるという.

$\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離を $d^{(n)}$ と次元を強調して書くことにしよう. このとき, 上の定義に現れた条件は

$$「d^{(n)}(x, a) < \delta \text{ ならば}, d^{(1)}(f(x), f(a)) < \varepsilon」$$

と表すことができる.
更に, $\mathbf{R}^n$ の点 a を中心とする半径 ε の球体も $B^{(n)}(a; \varepsilon)$ と次元を強調して書くことにすると, 上の条件は

$$f\left(B^{(n)}(a; \delta)\right) \subset B^{(1)}(f(a); \varepsilon)$$

または

$$B^{(n)}(a; \delta) \subset f^{-1}\left(B^{(1)}(f(a); \varepsilon)\right)$$

と表すことができる.
更に, 次が成り立つことが分かる. f は任意の $a \in D$ で連続なとき, D で連続であるということを思い出そう.

定理 f を $\mathbf{R}^n$ の開集合 D で定義された実数値関数とすると, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) f は D で連続.
(2) 任意の開区間 I に対し, $f^{-1}(I)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合.
(3) 任意の閉区間 I に対し, $f^{-1}(I)$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合.

位相空間から位相空間への写像に対しても連続であるという概念を考えることができる.
まず, $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, M を X の部分集合とし,

$$M^i = \bigcup \{O \subset M | O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

とおく. M^i を M の内部とよぶ. 距離空間の場合に成り立っていた性質を用いて, 位相空間に対しても部分集合の内部を定めるのである. 内部および位相の定義より, M^i は X の開集合である. M^i の点を M の内点とよぶ. 閉包や外点についても定めることができる.
次に, N を X の部分集合とし, $a \in X$ とする. a が N の内点となるとき, N を a の近傍とよぶ. 特に, a を含む開集合は a の近傍である.
近傍を用いると, 開集合は次のように特徴付けることができる.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, O を X の空でない部分集合とする. O が開集合であるための必要十分条件は任意の $x \in O$ に対し O が x の近傍であること.

証明 上で注意したように必要性は明らかであるから, 十分性のみ示せばよい.
任意の $x \in O$ に対し O が x の近傍であると仮定する.
このとき, 近傍の定義より, $x \in O^i$.
よって, $O \subset O^i$.
一方, $O^i \subset O$ だから, $O = O^i$.
従って, O は開集合. □

定義 $(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とし, $x \in X_1$ とする. $f(x)$ の任意の近傍 N に対し $f^{-1}(N)$ が x の近傍となるとき, f は x で連続であるという.

このとき, 次が成り立つ.

定理 $(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とすると, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) 任意の $x \in X_1$ に対し f は x で連続.
(2) X_2 の任意の開集合 O に対し $f^{-1}(O)$ は X_1 の開集合,
即ち任意の $O \in \mathfrak{O}_2$ に対し, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$.
(3) X_2 の任意の閉集合 A に対し $f^{-1}(A)$ は X_1 の閉集合.

証明 (1)⇒(2): $O \in \mathfrak{O}_2$, $x \in f^{-1}(O)$ とする.
O は X_2 の開集合で, $f(x) \in O$ だから, O は $f(x)$ の近傍.
よって, 仮定より, $f^{-1}(O)$ は x の近傍.
従って, 上の定理より, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$.
(2)⇒(1): $x \in X_1$ とし, N を $f(x)$ の近傍とする.
このとき,

$$f(x) \in O \subset N$$

となる $O \in \mathfrak{O}_2$ が存在する.
よって,

$$x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(N).$$

仮定より, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$ だから, $f^{-1}(N)$ は x の近傍.
従って, f は x で連続.
(2)⇒(3): A を X_2 の閉集合とすると, $A^c \in \mathfrak{O}_2$.
よって, 仮定より, $f^{-1}(A^c) \in \mathfrak{O}_1$.
ここで,

$$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c).$$

従って, $f^{-1}(A)$ は X_1 の閉集合.
(3)⇒(2): $O \in \mathfrak{O}_2$ とすると, O^c は X_2 の閉集合.
よって, 仮定より, $f^{-1}(O^c)$ は X_1 の閉集合.
ここで,

$$(f^{-1}(O))^c = f^{-1}(O^c).$$

従って, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$. □

上の定理より, 位相空間 $(X_1, \mathfrak{O}_1)$ から位相空間 $(X_2, \mathfrak{O}_2)$ への写像 f が連続であることの定義は上の定理の (1)〜(3) のどれを用いてもよい.

例 $(X_1, \mathfrak{O}_1)$ を離散空間, $(X_2, \mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とする.

$O \in \mathfrak{O}_2$ とすると, $f^{-1}(O)$ は X_1 の部分集合である.
離散位相の定義より, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_1$.
よって, f は連続.
即ち, 離散空間から任意の位相空間への写像は連続である.

例 $(X_1, \mathfrak{O}_1)$ を位相空間, $(X_2, \mathfrak{O}_2)$ を密着空間, f を X_1 から X_2 への写像とする.
密着位相の定義より,

$$\mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, X_2\}.$$

ここで,

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(X_2) = X_1.$$

位相の定義より,

$$\emptyset, X_1 \in \mathfrak{O}_1.$$

よって, f は連続.
即ち, 任意の位相空間から密着空間への写像は連続である.

例 (定値写像)
$(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2)$ を位相空間とし, $y_0 \in X_2$ を固定しておく.
X_1 から X_2 への写像 f を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X_1)$$

により定める. f を定値写像とよぶ.
$O \in \mathfrak{O}_2$ とすると,

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X_1 & (y_0 \in O), \\ \emptyset & (y_0 \notin O). \end{cases}$$

よって, 上の例と同様に, f は連続.
即ち, 定値写像は連続である.

例 (合成写像)
$(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2), (X_3, \mathfrak{O}_3)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への連続写像, g を X_2 から X_3 への連続写像とする.
X_1 から X_3 への写像 $g \circ f$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X_1)$$

により定める. $g \circ f$ を f と g の合成写像とよぶ.
$O \in \mathfrak{O}_3$ とすると, f は連続だから, $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_2$.
更に, g は連続だから, $g^{-1}(f^{-1}(O)) \in \mathfrak{O}_1$.
ここで,

$$(g \circ f)^{-1}(O) = g^{-1}(f^{-1}(O)).$$

よって, $g \circ f$ は連続.
即ち, 連続写像の合成は連続である.

関連事項 3. 凸関数

凸関数は経済学においても現れる重要な関数で, 一般にはベクトル空間の凸集合で定義された関数に対し定義することができる. 簡単のため, 定義域が区間の場合を考えよう.
f を区間 I で定義された実数値関数とする. 任意の $x, y \in I$ および任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つとき, f を凸関数とよぶ. このとき, f は下に凸であるともいう.
開区間で定義された凸関数は連続であることが次のようにして分かる.
まず, f を開区間 (a,b) で定義された凸関数とし, $x, y, z \in (a,b)$ が不等式

$$x < y < z$$

をみたすとする.
等式

$$y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$$

および f が凸関数であることを用いると,

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$

この式は

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \tag{$*$}$$

と同値である.
ここで, $x \in (a,b)$ に対し,

$$x \in [\alpha, \beta] \subset (a,b)$$

となる閉区間 $[\alpha, \beta]$ を選んでおき, $h > 0$ が $x \pm h \in [\alpha, \beta]$ をみたすとする.
このとき,

$$a < \alpha < x - h < x < x + h < \beta < b$$

だから, $(*)$ より,

$$\frac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha - a} \leq \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(b)-f(\beta)}{b-\beta}.$$

一番左と一番右の式は定数だから,

$$\lim_{h \to +0} f(x \pm h) = f(x)$$

となり, f は x で連続である.
更に, 上の x は任意だから, f は (a,b) で連続である.
f が閉区間で定義された凸関数のとき, 閉区間の両端における値を任意のより大きな値に置き換えても関数が凸であることに変わりはないから, 閉区間で定義された凸関数は連続であるとは限らない.