§4. 実連続関数

位相空間で定義された連続な実数値関数全体の集合を考えよう.
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $\mathbf{R}$ に対しては Euclid 距離から定まる通常の位相を考える.
X で定義された実数値関数, 即ち X から $\mathbf{R}$ への写像で, 連続なものを X 上の実連続関数とよぶ. X 上の実連続関数全体の集合を $C(X)$ と書く.
X から $\mathbf{R}$ への写像が連続であることと任意の $x \in X$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対し x のある近傍 N が存在し, $y \in N$ ならば

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つこととは同値であることが分かる.
$f, g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$, $x \in X$ とすると, X で定義された実数値関数 $f+g, fg, cf$ をそれぞれ

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x),\ (cf)(x) = cf(x)$$

により定めることができる.
次に示すように, これらの関数は $C(X)$ の元となる. 即ち, $C(X)$ は和や積, 更にスカラー倍といった代数的構造をもつのである.

定理　$f, g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, $f+g, fg, cf \in C(X)$.

証明　$f + g \in C(X)$ のみ示す.
$x \in X$, $\varepsilon > 0$ とする.
まず,

$$U = \left\{ y \in X \,\middle|\, |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

とおくと, $x \in U$ で, $f, g \in C(X)$ だから, U は X の開集合.
よって, U は x の近傍.
$y \in U$ とすると,

$$\begin{aligned} |(f+g)(y) - (f+g)(x)| &= |f(y) + g(y) - f(x) - g(x)| \\ &= |(f(y) - f(x)) + (g(y) - g(x))| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって,

$$f + g \in C(X).$$

□

上の定理のような性質をもつ集合を多元環とよぶ.
また, $f \in C(X)$ に対し X で定義された実数値関数 $|f|$ を

$$|f|(x) = |f(x)| \quad (x \in X)$$

により定めると, $|f| \in C(X)$ となることも分かる.
$f, g \in C(X)$ に対し

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| | x \in X\}$$

とおく. 但し, $\{|f(x)-g(x)||x\in X\}$ が上に有界でない場合は $d(f,g)=+\infty$ と定める. 特に,

$$0\leq d(f,g)\leq +\infty$$

である.
また, $f\in C(X)$, $\varepsilon>0$ に対し

$$B(f;\varepsilon)=\{g\in C(X)|d(f,g)<\varepsilon\}$$

とおく.
上の d および $B(f;\varepsilon)$ は §2 において扱った距離空間の距離や半径 ε の球体と同じ記号を用いているが, 若干の違いがある. $d(f,g)$ は $+\infty$ のこともあり得るので, d は距離を定めるとは限らないのである. しかし, X がコンパクトならば, d は距離となる. 少し話がそれるが, 位相空間のコンパクト性について述べよう.
$(X,\mathfrak{O})$ を位相空間, $\mathfrak{U}$ を X の部分集合系とする. $\mathfrak{U}$ は

$$X=\bigcup\mathfrak{U}$$

が成り立つとき, X の被覆とよぶ.
$\mathfrak{U}$ が X の被覆で, $\mathfrak{U}$ の各元が X の開集合のとき, 即ち $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{O}$ のとき, $\mathfrak{U}$ を X の開被覆とよぶ.
$\mathfrak{U}$ が有限集合のとき, $\mathfrak{U}$ を X の有限被覆とよぶ.
$\mathfrak{U}'$ を $\mathfrak{U}$ の部分集合とする. $\mathfrak{U}'$ が X の被覆となるとき, $\mathfrak{U}'$ を $\mathfrak{U}$ の部分被覆とよぶ.
これらの言葉を用いてコンパクト性は次のように定める.

定義 $(X,\mathfrak{O})$ を位相空間とする. X の任意の開被覆に対し有限部分被覆が存在するとき, X はコンパクトであるという.

例 X を有限集合とし, $\mathfrak{O}$ を X の位相とすると, X はコンパクトである.
実際, X は有限集合であるから, $\mathfrak{O}$ は有限集合となり, 上の定義をみたす.

例 X を離散空間とする.
X の部分集合系 $\mathfrak{U}$ を

$$\mathfrak{U}=\{\{x\}|x\in X\}$$

により定めると, 離散位相の定義より, $\mathfrak{U}$ は X の開被覆である.
よって, X がコンパクトとなるのは X が有限集合のときに限る.

位相空間の部分集合に対しても相対位相を考えることにより, コンパクト性を定めることができる. ここでは, 特に重要な Euclid 空間の部分集合の場合について述べよう. このときは部分集合に対し Euclid 距離をそのまま用いることにより, 距離空間とするのである.

定理 M を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする. M がコンパクトであるための必要十分条件は M が $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であること.

さて, 最初の方で注意したことに戻ろう. 位相空間 X 上の実連続関数全体の集合 $C(X)$ に対し定めた d は X がコンパクトならば, 距離となるのであった. その根拠となるのは次の事実である.

定理 コンパクト位相空間上の実連続関数は最大値および最小値をもつ.

上の定理より, X がコンパクトならば, 任意の $f,g\in C(X)$ に対し

$$0\leq d(f,g)<+\infty$$

となる. 更に, d が距離となることを示すのはそれほど難しくはない.
X がコンパクトであるとは限らなくとも, $C(X)$ に位相を定めることは可能である.
まず, $C(X)$ の部分集合系 $\mathfrak{O}'$ を

$$\mathfrak{O}' = \{O \subset C(X) |\ \text{任意の}\ f \in O\ \text{に対し, ある}\ \varepsilon > 0\ \text{が存在し}\ B(f;\varepsilon) \subset O\}$$

とおく.
このとき, $\mathfrak{O}'$ は $C(X)$ の位相を定める.
実際,

$$C(X), \emptyset \in \mathfrak{O}'$$

は明らか.
また,

$$O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}',\ f \in \bigcap_{i=1}^{k} O_i$$

とすると, 各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対し $f \in O_i$ だから, ある $\varepsilon_i > 0$ が存在し

$$B(f;\varepsilon_i) \subset O_i.$$

ここで,

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\}$$

とおくと, $\varepsilon > 0$ で,

$$\begin{aligned} B(f;\varepsilon) &\subset \bigcap_{i=1}^{k} B(f;\varepsilon_i) \\ &\subset \bigcap_{i=1}^{k} O_i. \end{aligned}$$

更に, $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}'$ の元からなる集合族とし,

$$f \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

とすると, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し, $f \in O_{\lambda_0}$.
よって, ある $\varepsilon > 0$ が存在し,

$$\begin{aligned} B(f;\varepsilon) &\subset O_{\lambda_0} \\ &\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda. \end{aligned}$$

従って, $(C(X), \mathfrak{O}')$ は位相空間となる. $\mathfrak{O}'$ を一様収束位相とよぶ.
X がコンパクトのときは一様収束位相は距離 d から定まる位相に他ならない.
一様収束位相を用いて $C(X)$ の点列, 即ち $C(X)$ に属する関数からなる列の収束を定めることができる.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $C(X)$ の一様収束位相を考える. $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を $C(X)$ の点列とし, $f \in C(X)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $f_n \in B(f;\varepsilon)$ が成り立つとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は f に一様収束するという.

関連事項 4. 数列空間

Euclid 空間の場合と同様に, ノルム空間の場合も次元が有限ならば, 部分集合がコンパクトであることと有界閉集合であることとは同値である. しかし, ノルム空間が無限次元の場合はこのことは成り立たない.
ノルム空間 $(V, \| \ \|)$ に対し V の部分集合 S を

$$S = \{u \in V \mid \|u\| = 1\}$$

により定める. S を V の単位球面とよぶ.
S は V の有界閉集合となるが, コンパクトであるとは限らない. 実は, S はコンパクトならば, V は有限次元であることが分かる.
無限次元のノルム空間の例として, 数列空間とよばれるものが知られている. よくある習慣に従い, ここでは複素数に値をとる数列, 即ち複素数列を考えよう.
$1 \leq p < +\infty$ をみたす実数 p を固定しておき, 集合 l^p を

$$l^p = \left\{ \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \,\middle|\, \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ は複素数列で, } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

により定める.
まず, $x \geq 0$ のとき, 関数 x^p は下に凸だから, $a, b \geq 0$ とすると,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}.$$

即ち,

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

よって, $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in l^p$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n + v_n|^p &\leq 2^{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^p \right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

だから, l^p は自然に複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間となり, 更に無限次元である.
また, $u = \{u_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in l^p$ に対し

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと, $\| \ \|_p$ は l^p のノルムとなることが分かる. l^p のノルム $\| \ \|_p$ に対する三角不等式は Minkowski の不等式ともよぶ.
さて, 距離空間に対してはコンパクト性は任意の点列が収束部分列をもつことと同値であることが分かる. 関連事項 2 においても述べたように, ノルム空間は自然に距離空間となるから, ノルム空間の部分集合に対するコンパクト性は上のように言い換えることができる.
例えば, 数列空間 l^2 の単位球面の元として, 第 i 成分が 1 でその他の成分が 0 のものを e_i とおく. このとき, $\|e_i\|_2 = 1$ であるが, $i \neq j$ ならば, $\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$ である.
よって, 点列 $\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ は収束部分列をもたないから, l^2 の単位球面はコンパクトではない.