§5. 完備性

実連続関数全体の集合は完備な距離空間と同様の性質をもつ.
まず, 距離空間の完備性について述べよう.

定義 (X, d) を距離空間, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を X の点列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $d(x_n, x_N) < \varepsilon$ となるとき, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を Cauchy 列とよぶ.

上の定義において,「$n \geq N$ ならば $d(x_n, x_N) < \varepsilon$」という条件は, 三角不等式より,「$n, m \geq N$ ならば $d(x_n, x_m) < \varepsilon$」と置き換えてもよい.
距離空間の収束する点列は Cauchy 列である. 実際, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を距離空間 (X, d) の点 x に収束する点列とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるから, $n \geq N$ ならば, 三角不等式より,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_N) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_N) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列である.
任意の Cauchy 列が収束する距離空間は完備であるという.

例 有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は Euclid 距離を用いて距離空間となるが, 完備ではない.
実際, $a_n \in \mathbf{Q}$ を $\sqrt{2}$ の小数第 n 位までを取り出したものとする. 例えば,

$$a_1 = 1.4,\ a_2 = 1.41,\ a_3 = 1.414,\ a_4 = 1.4142,\ a_5 = 1.41421,\ a_6 = 1.414213,\ a_7 = 1.4142135$$

である.
このとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列となるが, $\sqrt{2}$ は有理数ではないから, $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\mathbf{Q}$ の中では収束しない.

完備とは限らない距離空間を完備化とよばれる操作を行うことにより, 完備な距離空間に埋め込んでしまうことができる. 完備化は次のようにして行う.
まず, $\mathbf{Q}$ の完備化について述べよう.
$\mathbf{Q}$ の Cauchy 列全体の集合を $C_{\mathbf{Q}}$ と書くことにする.
$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_{\mathbf{Q}}$ に対し数列 $\{|a_n - b_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ が 0 に収束するとき, 即ち

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

となるとき, $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と書くことにする.
このとき, $\sim$ は $C_{\mathbf{Q}}$ 上の同値関係を定めることが分かる. 即ち, 次の (1)〜(3) が成り立つ.

(1) 任意の $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_{\mathbf{Q}}$ に対し $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (反射律).
(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_{\mathbf{Q}}$ とする. $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ならば, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (対称律).
(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_{\mathbf{Q}}$ とする. $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ かつ $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ならば, $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (推移律).

$C_{\mathbf{Q}}$ の $\sim$ による商集合, 即ち $\mathbf{Q}$ の同値な Cauchy 列は同じとみなしたものからなる集合を考えると, この集合には大小関係や四則演算, 更に絶対値を定め, 完備な距離空間とすることができる. これが実数全体の集合 $\mathbf{R}$ である.
次に, 一般の距離空間の完備化について述べよう.
(X, d) を距離空間とし, X の Cauchy 列全体の集合を C_X と書くことにする.
$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_X$ に対し数列 $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ が 0 に収束するとき, 即ち

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

となるとき, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と書くことにする.
このとき, $\sim$ は C_X 上の同値関係を定めることが分かる. C_X の $\sim$ による商集合を $\tilde{X}$ と書くことにする.
$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in C_X$ を含む同値類を (x_n) と書くことにする. (x_n) は $\tilde{X}$ の元である.
$\tilde{x} = (x_n), \tilde{y} = (y_n) \in \tilde{X}$ とすると, 数列 $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列となることが分かる.
$\mathbf{R}$ は完備であるから, $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する.
そこで, $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}$ を

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

により定める. 右辺の式は $\tilde{x}, \tilde{y}$ の代表元 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の選び方に依存しないことが分かる.
数学ではこのようなとき, 定義は well-defined であるという.
更に, $x \in X$ に対しすべての項が x となる点列は Cauchy 列であるから, この Cauchy 列を含む同値類を $\iota(x)$ と書くことにより, X から $\tilde{X}$ への写像 ι を定めることができる.
上のようにして得られた $\tilde{X}, \tilde{d}, \iota$ は次の (1)〜(3) をみたす.

(1) $(\tilde{X}, \tilde{d})$ は完備な距離空間.
(2) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = \tilde{d}(\iota(x), \iota(y))$.
(3) $\iota(X)$ は $\tilde{X}$ において稠密, 即ち $\overline{\iota(X)} = \tilde{X}$.

$(\tilde{X}, \tilde{d})$ が (X, d) の完備化である.

例　Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は完備である.
より一般には, 関連事項 2 において扱ったノルム空間の中でも有限次元のものは完備である.
また, 関連事項 4 において現れた数列空間 l^p も完備なノルム空間である.
完備なノルム空間を Banach 空間とよぶ.

さて, 実連続関数全体の集合について考えよう.

定義　$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし, $C(X)$ の一様収束位相を考える. $\{f_n\}$ を $C(X)$ の点列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $f_n \in B(f_N; \varepsilon)$ となるとき, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を一様 Cauchy 列とよぶ.

距離空間の場合と同様に, $C(X)$ の一様収束する点列は一様 Cauchy 列であることが分かる.
また, X がコンパクトなときは一様 Cauchy 列は距離空間 $(C(X), d)$ の Cauchy 列に他ならない.
次に示すように $C(X)$ は完備な距離空間と同様の性質をもつ.

定理　$C(X)$ の一様 Cauchy 列は一様収束する.

証明　$\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を $C(X)$ の一様 Cauchy 列とし, $x \in X$ とする.
このとき, 数列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列.
$\mathbf{R}$ は完備だから, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する.

よって, X で定義された実数値関数 f を

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

により定めることができる.
まず, $f \in C(X)$ であることを示す.
$\varepsilon > 0$ とすると, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は一様 Cauchy 列だから, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば

$$f_n \in B\left(f_N; \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

即ち,

$$d(f_n, f_N) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

よって, $n \to \infty$ とすると,

$$|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$x_0 \in X$ とすると, f_N は連続だから, x_0 のある近傍 U が存在し, $x \in U$ ならば

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

従って, $x \in U$ ならば,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

即ち, f は x_0 で連続.
x_0 は任意だから,

$$f \in C(X).$$

次に, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が f に一様収束することを示す.
$n \geq N$, $x \in X$ とすると,

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}d(f_n, f) &\leq \frac{2}{3}\varepsilon \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

即ち,

$$f_n \in B(f; \varepsilon).$$

従って, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は f に一様収束する. □

関連事項 5. 縮小写像の原理

不動点定理は数学のみならず, 経済学においても様々な形で現れる重要な定理であるが, ここでは不動点定理の一つである縮小写像の原理について述べよう.
縮小写像の原理は数学では, 例えば陰関数の定理や常微分方程式の解の存在と一意性定理を証明する際に用いられる.
(X,d) を距離空間, f を X から X 自身への写像とする. $0<c<1$ をみたす定数 c が存在し, 任意の $x,y\in X$ に対し

$$d(f(x),f(y))\le cd(x,y) \tag{$*$}$$

となるとき, f を縮小写像とよぶ.
定義より, 縮小写像は常に連続写像である.
f が完備な距離空間 (X,d) の縮小写像ならば, $f(x)=x$ となる $x\in X$ が一意的に存在する. これが縮小写像の原理である. 上のような x を f の不動点とよぶ.
縮小写像の原理を不動点の存在についてのみ証明しよう.
まず, f が縮小写像だから, $0<c<1$ で任意の $x,y\in X$ に対し $(*)$ をみたす定数 c が存在する.
$x_1\in X$ を一つ選んでおき, X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$x_n=f(x_{n-1})\quad(n=2,3,4,\dots)$$

により定める.
ここで, $n\in\mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+1})&=d(f(x_{n-1}),f(x_n))\\
&\le cd(x_{n-1},x_n)\\
&\quad\vdots\\
&\le c^{n-1}d(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

だから, 更に $m\in\mathbf{N}$ とすると,

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+m})&\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+m-1},x_{n+m})\\
&\le (c^{n-1}+c^n+\cdots+c^{n+m-2})d(x_1,x_2)\\
&\le \frac{c^{n-1}}{1-c}d(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

よって, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は Cauchy 列となる.
従って, (X,d) が完備であることより, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ はある $x_\infty\in X$ に収束する.
更に, 縮小写像は連続だから,

$$\begin{aligned}
f(x_\infty)&=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\\
&=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}\\
&=x_\infty.
\end{aligned}$$

即ち, x_∞ は f の不動点である.