§6. Dini の定理

Dini の定理は連続関数の列が一様収束するための十分条件をあたえるものである.
まず, Dini の定理を証明する際に必要となる事実として, コンパクト性と有限交叉性の関係について述べよう.
X を集合, $\mathfrak{U}$ を X の部分集合系とする. 任意の $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathfrak{U}$ に対し

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \neq \emptyset$$

となるとき, $\mathfrak{U}$ は有限交叉性をもつという.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) X はコンパクト.
(2) $\mathfrak{U}$ を任意の元が X の閉集合となる X の任意の部分集合系とする. $\mathfrak{U}$ が有限交叉性をもつならば, $\bigcap \mathfrak{U} \neq \emptyset$.

証明 (1)⇒(2): (2) の対偶が成り立つことを示す.
$\mathfrak{U}$ を任意の元が X の閉集合となる X の部分集合系とし,

$$\bigcap \mathfrak{U} = \emptyset \qquad (*)$$

が成り立つとする.
X の部分集合系 $\mathfrak{U}^c$ を

$$\mathfrak{U}^c = \{A^c | A \in \mathfrak{U}\}$$

により定めると, $\mathfrak{U}^c$ の任意の元は X の開集合.
$(*)$ および de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned} X &= \emptyset^c \\ &= \left(\bigcap \mathfrak{U}\right)^c \\ &= \bigcup \mathfrak{U}^c. \end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{U}^c$ は X の開被覆.
X はコンパクトだから, ある $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c \in \mathfrak{U}^c$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

de Morgan の法則より,

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

従って, $\mathfrak{U}$ は有限交叉性をもたない.
(2)⇒(1): $\mathfrak{V}$ を X の開被覆とする.
X の部分集合系 $\mathfrak{V}^c$ を

$$\mathfrak{V}^c = \{O^c | O \in \mathfrak{V}\}$$

により定めると, $\mathfrak{V}^c$ の任意の元は X の閉集合.

de Morgan の法則より,

$$\bigcap \mathfrak{V}^c = \emptyset.$$

(2) の対偶を考えると, $\mathfrak{V}^c$ は有限交叉性をもたないから, ある $O_1^c, O_2^c, \ldots, O_m^c \in \mathfrak{V}^c$ が存在し

$$\bigcap_{i=1}^{m} O_i^c = \emptyset.$$

de Morgan の法則より,

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} O_i.$$

よって, X はコンパクト. □

それでは Dini の定理について述べよう.

Dini の定理 $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を $C(X)$ の点列とし, $f \in C(X)$ とする. 次の (1), (2) が成り立つならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は f に一様収束する.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}$ および任意の $x \in X$ に対し $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.
(2) 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

証明 $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X | f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\}$$

とおく.
f_n および f は連続だから, $A(\varepsilon, n)$ は X の閉集合.
ここで, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$A(\varepsilon, n) \neq \emptyset$$

であると仮定する.
$x \in A(\varepsilon, n+1)$ とすると, (1) より,

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq f_{n+1}(x) \\ &\leq f(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

即ち, $x \in A(\varepsilon, n)$ だから,

$$A(\varepsilon, n+1) \subset A(\varepsilon, n). \tag{$*$}$$

よって, X の部分集合系

$$\{A(\varepsilon, n) | n \in \mathbf{N}\}$$

は有限交叉性をもつ.
従って, 上の定理より, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\varepsilon, n)$ が存在する.
このとき, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$f_n(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon.$$

$n \to \infty$ とすると, (2) より,

$$f(x_0) \leq f(x_0) - \varepsilon.$$

即ち, $\varepsilon \leq 0$ となるから, 矛盾.

以上より, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在し

$$A(\varepsilon, N) = \emptyset.$$

$n \geq N$ とすると, $(*)$ より,

$$A(\varepsilon, n) = \emptyset.$$

即ち, 任意の $x \in X$ に対し

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x).$$

また, (1), (2) より,

$$f_n(x) \leq f(x).$$

上の二つの式を合わせると, $f_n \in B(f; \varepsilon)$.
即ち, $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は f に一様収束する. □

上の定理の (2) が成り立つとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は f に各点収束するという.

例　まず, 閉区間 $[0, 1]$ はコンパクトである.
$n \in \mathbf{N}$ に対し $[0, 1]$ で定義された実数値関数 f_n を

$$\begin{cases} f_1(t) = 0, \\ f_{n+1}(t) = f_n(t) + \dfrac{t - (f_n(t))^2}{2} \end{cases} \tag{1}$$

により定める.
$f_n(t)$ は t の実数係数多項式だから, $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は $C([0, 1])$ の点列である.
ここで, $t \in [0, 1]$ を固定しておき,

$$0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{t} \tag{2}$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法により示す.
$n = 1$ のとき, (2) は成り立つ.
$n = k$ $(k \in \mathbf{N})$ のとき, (2) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(t) &= f_k(t) + \frac{t - (f_k(t))^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(f_k(t) - 1)^2 + \frac{t+1}{2} \end{aligned}$$

だから,

$$0 \leq f_{k+1}(t) \leq \sqrt{t}.$$

よって, $n = k + 1$ のときも (2) は成り立つ.
更に, (1), (2) より,

$$f_n(t) \leq f_{n+1}(t). \tag{3}$$

(2), (3) より, $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbf{N}}$ は上に有界な単調増加数列だから, 収束する.
従って, $[0, 1]$ 上の関数 f を

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

により定めることができる.
$n \to \infty$ とすると, (1), (2) より,

$$f(t) = \sqrt{t}.$$

更に, $f \in C([0, 1])$ だから, Dini の定理より, $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は f に一様収束する.

関連事項 6. 項別積分定理

積分可能な関数列があたえられたとき, 関数の積分の極限と関数の極限の積分は必ずしも一致しない. 例えば, 閉区間 $[0,1]$ で定義された実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2} \quad (x \in [0,1])$$

により定めると,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{n^2x^2}\right]_0^1\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-e^{n^2}+1\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx &= \int_0^1 0dx\\ &= 0\end{aligned}$$

である.
関数の積分の極限と関数の極限の積分が一致することを保証する定理を項別積分定理とよぶ.
簡単のため, 有界閉区間上の実連続関数列に対する項別積分定理について述べよう.
有界閉区間 $[a,b]$ を固定しておき, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を $C([a,b])$ の点列とし, $f \in C([a,b])$ とする.
まず, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が f に一様収束するならば,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{$*$}$$

が成り立つ. これが最も基本的な項別積分定理である.
次に, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が f に各点収束し, かつ $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が一様有界ならば, $(*)$ が成り立つ. 但し, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が一様有界であるとは, ある $C>0$ が存在し任意の $n\in\mathbf{N}$ に対し

$$\sup\{|f(x)||x\in[a,b]\} < C$$

が成り立つことである. この形の項別積分定理を Arzela の項別積分定理とよぶ.
一様収束する関数列は各点収束するから, 各点収束は一様収束よりも弱い概念である. また, 一様有界性も概して調べやすいため, Arzela の項別積分定理は最初のものよりは使い勝手がよいであろう. なお, Arzela の項別積分定理は Dini の定理を用いて証明することができる.
項別積分定理は Lebesgue 積分論あるいは測度論においても重要で, Arzela の定理に相当するものは Lebesgue の収束定理の系として得られる Lebesgue の有界収束定理である.
項別積分定理に対し次に述べる項別微分定理も重要である.
$\{f_n\}_{\mathbf{N}}$ を $[a,b]$ で定義された実数値関数列とし, 次の (1)〜(3) が成り立つと仮定する.

(1) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ はある関数 f に各点収束する.
(2) 各 f_n $(n\in\mathbf{N})$ は C^1 級.
(3) $\{f'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ はある関数 g に一様収束する.

このとき, f は C^1 級で, $f'=g$ となる.