## §7. Ascoli-Arzela の定理

Ascoli-Arzela の定理は解析学における基本的な定理の一つである.
まず, Ascoli-Arzela の定理について述べるために必要となる言葉を用意しよう.

**定義** $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $S$ を $C(X)$ の部分集合とする. ある $C > 0$ が存在し, 任意の $f, g \in S$ に対し $d(f, g) \leq C$ となるとき, $S$ は一様有界であるという.

一様有界という言葉は関連事項 6 においても現れたが, 位相空間がコンパクトな場合は次のように言い換えることができる.

**定理** $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) $S$ は一様有界.
(2) ある $K > 0$ が存在し, 任意の $f \in S$ および任意の $x \in X$ に対し $|f(x)| \leq K$.

**証明** (1)⇒(2): 仮定より, ある $C > 0$ が存在し, 任意の $f, g \in S$ に対し $d(f, g) \leq C$.
$f_0 \in S$ を任意に選んで固定しておく.
$|f_0|$ は連続で, $X$ はコンパクトだから, $|f_0|$ は最大値をもつ.
よって, $f \in S$, $x \in X$ とすると,

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| \\
&\leq C + \max\{|f_0(x)|| x \in X\}.
\end{aligned}
$$

従って,

$$K = C + \max\{|f_0(x)|| x \in X\}$$

とおけばよい.
(2)⇒(1): 明らか. □

**定義** $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $S$ を $C(X)$ の部分集合とする. 任意の $\varepsilon > 0$ および任意の $x \in X$ に対し $x$ のある近傍 $U$ が存在し, 任意の $f \in S$ および任意の $y \in U$ に対し $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となるとき, $S$ は同程度連続であるという.

**例** $S$ を任意の元が $C^1$ 級となる $C([a, b])$ の部分集合とする.
このとき,

$$S' = \{f' | f \in S\}$$

とおくと, $S'$ も $C([a, b])$ の部分集合である.
$S'$ が一様有界ならば, 上の定理より, $S$ は同程度連続であることが分かる.

**定義** $(X, d)$ を距離空間とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $X$ の有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が存在し,

$$X = B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n; \varepsilon)$$

となるとき, $X$ は全有界であるという.

関連事項 4 において, 距離空間に対してはコンパクト性は任意の点列が収束部分列をもつことと同値であることを述べたが, 次も成り立つ.

**定理** $(X, d)$ を距離空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) $X$ はコンパクト.
(2) $X$ は完備かつ全有界.

それでは Ascoli-Arzela の定理について述べよう.

**Ascoli-Arzela の定理** $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間, $S$ を $C(X)$ の部分集合とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) $C(X)$ の一様収束位相に関して $S$ の閉包 $\overline{S}$ はコンパクト.

(2) $S$ は一様有界かつ同程度連続.

**証明** $X$ はコンパクトだから, $C(X)$ の一様収束位相は距離 $d$ により定まる位相に一致する.
§5 において示したように, $C(X)$ は完備となるから, $\overline{S}$ も完備.
よって, 上の定理より, (1) は次の (1)' と同値であることに注意する.

(1)' $\overline{S}$ は全有界.

(1)'⇒(2): まず, $\overline{S}$ は全有界だから, ある $f_1, f_2, \dots, f_n \in C(X)$ が存在し,

$$\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(f_i; 1\right).$$

$f, g \in S$ とすると, ある $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在し,

$$f \in B(f_{i_1}; 1),\ g \in B(f_{i_2}; 1).$$

よって,

$$\begin{aligned} d(f, g) &\leq d(f, f_{i_1}) + d(f_{i_1}, f_{i_2}) + d(f_{i_2}, g) \\ &\leq 2 + \max\{d(f_i, f_j) | 1 \leq i, j \leq n\}. \end{aligned}$$

従って, $S$ は一様有界.
次に, $\varepsilon > 0$ とすると, $\overline{S}$ は全有界だから, ある $g_1, g_2, \dots, g_m \in C(X)$ が存在し,

$$\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(g_i; \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

$f \in S$ とすると, ある $i' \in \{1, 2, \dots, m\}$ が存在し,

$$f \in B\left(g_{i'}; \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

$x_0 \in X$ とし, $x_0$ の近傍 $U$ を

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \left\{ x \in X \,\middle|\, |g_i(x) - g_i(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

により定める.
$x \in U$ とすると,

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &\leq |f(x_0) - g_{i'}(x_0)| + |g_{i'}(x_0) - g_{i'}(x)| + |g_{i'}(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $S$ は同程度連続.
(2)⇒(1)': $\varepsilon > 0$ に対し

$$\mathfrak{U} = \left\{ (O, x) \in \mathfrak{O} \times X \,\middle|\, x \in O \text{ で, 任意の } f \in S \text{ および任意の } y \in O \text{ に対し } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} \right\}$$

とおく.
$S$ は同程度連続だから, $\{O | (O, x) \in \mathfrak{U}\}$ は $X$ の開被覆.
$X$ はコンパクトだから, ある $(O_1, x_1), (O_2, x_2), \ldots, (O_n, x_n) \in \mathfrak{U}$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i.$$

ここで, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ に対し

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \left\{ f \in S \,\middle|\, \text{任意の } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対し } \frac{\alpha_i \varepsilon}{4} \leq f(x_i) \leq \frac{(\alpha_i + 1)\varepsilon}{4} \right\}$$

とおく.
$S$ は一様有界だから, 空でない $S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ は有限個.
これらを $S_1, S_2, \ldots, S_m$ とおくと,

$$S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j.$$

各 $j = 1, 2, \ldots, m$ に対し $f_j \in S_j$ を任意に選んで固定しておく.
$x \in O_i$, $f \in S_j$ とすると,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_j(x_i)| + |f_j(x_i) - f_j(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} d(f, f_j) &\leq \frac{3}{4}\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

だから,

$$\overline{S}_j \subset B(f_j; \varepsilon) \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

従って,

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \bigcup_{j=1}^{m} \bar{S}_j \\ &\subset \bigcup_{j=1}^{m} B(f_j; \varepsilon). \end{aligned}$$

即ち, $\overline{S}$ は全有界. □

## 関連事項 7. 常微分方程式の解の存在

自然現象や社会現象はしばしば微分方程式を用いて記述することができる.
微分方程式はいつでも解が具体的に求められるとは限らないし, そもそも解が存在しない場合もある. 常微分方程式の初期値問題の解の存在や一意性については以下に述べる二つの定理が基本的である.
$t_0, x_0 \in \mathbf{R}$, $r, R > 0$ とし, $\mathbf{R}^2$ の閉領域 $D$ を

$$D = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 | |t - t_0| \leq r,\ |x - x_0| \leq R\}$$

により定める. $f(t,x)$ を $D$ で定義された実数値関数とし, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える.
まず, $f$ が $D$ で連続ならば,

$$M = \max\{|f(t,x)| | (t,x) \in D\},\ \delta = \min\left\{r, \frac{R}{M}\right\}$$

とおくと, 区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で定義された $(*)$ の解が存在する. この事実を Cauchy の存在定理とよぶ.
Cauchy の存在定理の証明には Ascoli-Arzela の定理が用いられる. Cauchy の折線近似とよばれる方法で, 閉区間上の実連続関数からなるある集合を考え, この集合が一様有界かつ同程度連続となることを示すのである. Ascoli-Arzela の定理より, この集合の閉包はコンパクトであるから, ある実連続関数列で収束部分列が $(*)$ の解に一様収束するようなものが存在することが分かる.
次に, $f$ が $D$ で連続で, 更にある定数 $L$ が存在し, 任意の $(t,x), (t,y) \in D$ に対し

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

が成り立つならば, 区間 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で定義された $(*)$ の解が一意的に存在する. この事実を Picard の存在と一意性定理とよぶ. また, 上の不等式を Lipschitz 条件, $L$ を Lipschitz 定数とよぶ.
Picard の存在と一意性定理の証明には関連事項 5 において述べた縮小写像の原理が用いられる. Picard の逐次近似法とよばれる方法を用いて, $(*)$ の解に一様収束する関数列を構成するのである.
常微分方程式の解の存在と一意性を用いて, 指数関数や三角関数を定義することができる. 例えば, 指数関数 $e^t$ は初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

の一意的な解として定めることができる.
なお, 上のような常微分方程式は線形常微分方程式とよばれ, 解は $\mathbf{R}$ 全体で定義されることが分かる.