§8. 代数的構造

§4 の始めにおいて簡単に触れた実連続関数全体の集合の代数的構造について, 更に詳しく調べていこう.
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする.
まず, 厳密な定義は行わないが, $C(X)$ は多元環の構造をもつのであった. 例えば, $f, g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$ とすると,

$$f+g, fg, cf \in C(X)$$

である.
ここでは $cf \in C(X)$ を示しておこう.
$x \in X$, $\varepsilon > 0$ とする.
まず,

$$U = \left\{ y \in X \,\middle|\, |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{1+|c|} \right\}$$

とおくと, $x \in U$ で, $f \in C(X)$ だから, U は X の開集合.
$y \in U$ とすると,

$$\begin{aligned} |(cf)(x) - (cf)(y)| &= |c||f(x) - f(y)| \\ &\leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{1+|c|} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

よって,

$$cf \in C(X).$$

$C(X)$ の部分集合で多元環としての構造をもつものを考えよう.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, S を $C(X)$ の部分集合とする. 任意の $f, g \in S$ および任意の $c \in \mathbf{R}$ に対し $f+g, fg, cf \in S$ となるとき, S を $C(X)$ の部分多元環とよぶ.

例 実数係数の多項式は自然に $\mathbf{R}$ 上の実連続関数とみなすことができる.
このとき, 実数係数の多項式全体の集合は $C(\mathbf{R})$ の部分多元環となる.

以下では $C(X)$ の一様収束位相も考えよう.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間, S を $C(X)$ の部分多元環とすると, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環.

証明 $f, g \in \overline{S}$ とすると, S の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を

$$\lim_{n \to \infty} d(f, f_n) = \lim_{n \to \infty} d(g, g_n) = 0$$

となるように選んでおくことができる.
まず, S は $C(X)$ の部分多元環だから,

$$f_n + g_n \in S.$$

$x \in X$ とすると,

$$|(f+g)(x) - (f_n + g_n)(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)|.$$

よって,

$$\begin{aligned} d(f+g, f_n+g_n) &\leq d(f, f_n) + d(g, g_n) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty} d(f+g, f_n+g_n) = 0.$$

従って,

$$f+g \in \overline{S}.$$

次に, S は $C(X)$ の部分多元環だから,

$$f_n g_n \in S.$$

$x \in X$ とすると,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (f_n g_n)(x)| &= |f(x)g(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f_n(x)g_n(x)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + |g_n(x)||f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g_n(x)| + (|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|)|f(x) - f_n(x)|. \end{aligned}$$

ここで, X はコンパクトで, $f \in C(X)$ だから, $\|f\| \in \mathbf{R}$ を

$$\|f\| = \max\{|f(x)||x \in X\}$$

により定めることができる. $\|g\|$ についても同様である.
よって,

$$\begin{aligned} d(fg, f_n g_n) &\leq \|f\| d(g, g_n) + (d(g, g_n) + \|g\|) d(f, f_n) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty} d(fg, f_n g_n) = 0.$$

従って,

$$fg \in \overline{S}.$$

更に, S は $C(X)$ の部分多元環だから,

$$cf_n \in C(X).$$

$x \in X$ とすると,

$$|(cf)(x) - (cf_n)(x)| = |c||f(x) - f_n(x)|.$$

よって,

$$\begin{aligned} d(cf, cf_n) &= |c| d(f, f_n) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから,

$$\lim_{n\to\infty} d(cf, cf_n) = 0.$$

従って,

$$cf \in \overline{S}.$$

以上より, $\overline{S}$ は $C(X)$ の部分多元環. □

また, 次も成り立つ.

定理 $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間, S を $C(X)$ の部分多元環とする. $f \in S$ ならば, $|f| \in \overline{S}$.

証明 上の定理の証明において定めた $\|f\|$ が正のときに示せばよい.
§6 において扱った例のように, $g_n, g \in C([0,1])$ $(n \in \mathbf{N})$ を

$$\begin{cases} g_1(t) = 0, \\ g_{n+1}(t) = g_n(t) + \dfrac{t - (g_n(t))^2}{2}, \end{cases} \qquad g(t) = \sqrt{t} \quad (t \in [0,1])$$

により定める.
このとき, $f_n \in C(X)$ を

$$f_n(x) = g_n\left(\left(\frac{f(x)}{\|f\|}\right)^2\right) \quad (x \in X)$$

により定める.
g_n は実数係数の多項式で, S は $C(X)$ の部分多元環だから, $f_n \in S$.
また, $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は g に一様収束するから, $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $\dfrac{1}{\|f\|}|f|$ に一様収束する.
よって,

$$\frac{1}{\|f\|}|f| \in \overline{S}.$$

上の定理より,

$$|f| = \|f\| \left(\frac{1}{\|f\|}|f|\right) \in \overline{S}.$$

□

定理 $(X, \mathfrak{O})$ をコンパクトな位相空間とし, $f_1, f_2 \ldots, f_n \in C(X)$, $x \in X$ に対し

$$\max(f_1, f_2 \ldots, f_n)(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\},$$
$$\min(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

とおく. このとき, $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n), \min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C(X)$.
また, S を $C(X)$ の部分多元環とする. $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S$ ならば, $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n), \min(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \overline{S}$.

証明 $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ についてのみ示す.
まず,

$$\max(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \max(f_1, \max(f_2, \ldots, f_n))$$

だから, $n = 2$ のときに示せばよい.
次に,

$$\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\left((f_1 + f_2) + |f_1 - f_2|\right)$$

だから, 上の定理を用いればよい. □

関連事項 8. 群

代数的な構造をもつ集合は数学の様々な場面において現れる．ここではその中でも最も基本的な群とよばれるものについて述べよう．
集合 G に対し集合 $G \times G$ から G への写像 μ があたえられ, 次の (1)〜(3) が成り立つとき, 組 (G, μ) または単に G を群とよぶ．

(1) $\mu(\mu(a, b), c) = \mu(a, \mu(b, c))$ (結合律).
(2) ある $e \in G$ が存在し, 任意の $a \in G$ に対し $\mu(a, e) = \mu(e, a) = a$.
(3) 各 $a \in G$ に対しある $a' \in G$ が存在し, $\mu(a, a') = \mu(a', a) = e$.

$\mu(a, b)$ を a と b の積とよび, 単に $a \cdot b$ または ab と書くことが多い．また, (2) の e を単位元, (3) の a' を a の逆元とよび, a^{-1} と書く．
$\mathbf{R}$ は加法 $+$ を積とみなすことにより, 群となる．このような群を加法群とよぶ．ベクトル空間も加法群となる．
線形代数においては行列式を定義する際に置換が用いられる．n 文字の置換全体の集合は群となる．これを n 次の対称群とよぶ．
n 次の対称群を S_n と書くことにすると, 置換の符号は S_n から集合 $\{\pm 1\}$ への写像を定める．ここで, $\{\pm 1\}$ も乗法 $\times$ により群とみなすと, 符号は群の演算を保つ写像となる．即ち, 符号を記号 sgn を使って表すと, 任意の $\sigma, \tau \in S_n$ に対し

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$$

が成り立つ．このような性質をみたす群から群への写像を準同型写像とよぶ．
行列からなる群の中でも特に重要なものを挙げておこう．
実数を成分とする n 次の正則行列全体の集合は, 行列の積に関して群となる．これを $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ 等と書き, n 次の実一般線形群とよぶ．
$\mathbf{R}$ から 0 を除いた集合は $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ と書くが, これを乗法 $\times$ に関して群とみなす場合は $\mathbf{R}^\times$ と書くことがある．このとき, 行列式は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ から $\mathbf{R}^\times$ への準同型を定める．即ち, 任意の $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ に対し

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

が成り立つ．
実数を成分とし, 行列式が 1 となる n 次の正方行列全体の集合は, 行列の積に関して群となる．これを $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ 等と書き, n 次の実特殊線形群とよぶ．
n 次の直交行列全体の集合は, 行列の積に関して群となる．これを $\mathrm{O}(n)$ 等と書き, n 次の直交群とよぶ．
行列式が 1 となる n 次の直交行列全体の集合は, 行列の積に関して群となる．これを $\mathrm{SO}(n)$ 等と書き, n 次の特殊直交群とよぶ. 幾何学的な意味から $\mathrm{SO}(n)$ を回転群とよぶこともある．
同様に, 複素数を成分とする行列からなる群として, 複素一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ や複素特殊線形群 $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ を定めることができる．
また, n 次のユニタリ行列全体からなるユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ や行列式が 1 となる n 次のユニタリ行列全体からなる特殊ユニタリ群 $\mathrm{SU}(n)$ も重要な群である．