

## §9. Stone-Weierstrass の定理

実連続関数全体の集合の部分多元環がある条件をみたしていると, 任意の実連続関数を部分多元環の元でいくらでも近似することができる. これが Stone-Weierstrass の定理である.

まず, 上の条件に現れる言葉を用意しよう.

**定義**  $(X, \mathcal{D})$  を位相空間,  $S$  を  $C(X)$  の部分多元環とする.

相異なる  $x, y \in X$  に対し  $f(x) \neq f(y)$  となる  $f \in S$  が存在するとき,  $S$  は  $x, y$  を分離するという.

$x \in X$  に対し  $f(x) \neq 0$  となる  $f \in S$  が存在するとき,  $S$  は  $x$  で消滅しないという.

相異なる任意の  $x, y \in X$  および相異なる任意の  $a, b \in \mathbf{R}$  に対し  $f(x) = a$  かつ  $f(y) = b$  となる  $f \in S$  が存在するとき,  $S$  は 2点固有性をもつという.

**定理**  $(X, \mathcal{D})$  を位相空間,  $S$  を  $C(X)$  の部分多元環とすると, 次の (1), (2) は同値.

- (1)  $S$  は任意の 2 点を分離し, 任意の点で消滅しない.
- (2)  $S$  は 2 点固有性をもつ.

**証明** (1) $\Rightarrow$ (2):  $x, y \in X, x \neq y, a, b \in \mathbf{R}, a \neq b$  とする.

$S$  は  $x, y$  を分離し,  $x$  で消滅しないから, ある  $u, v \in S$  が存在し,

$$u(x) \neq u(y), v(x) \neq 0. \quad (*)$$

$\lambda \in \mathbf{R}$  に対し

$$h = u + \lambda v$$

とおく.

$h(x) = h(y)$  となるのは

$$u(x) + \lambda v(x) = u(y) + \lambda v(y),$$

即ち (\*) より,

$$v(x) \neq v(y), \lambda = \frac{u(x) - u(y)}{v(y) - v(x)}$$

のとき.

また,  $h(x) = 0$  となるのは (\*) より,

$$\lambda = -\frac{u(x)}{v(x)}$$

のとき.

よって,  $\lambda$  を

$$h(x) \neq h(y), h(x) \neq 0$$

となるように選んでおくことができる.

このとき,

$$\alpha = (h(x))^2 - h(x)h(y)$$

とおくと,  $\alpha \neq 0$ .

$S$  は  $C(X)$  の部分多元環だから,  $f_1 \in S$  を

$$f_1 = \frac{1}{\alpha}(h^2 - h(y)h)$$

により定めることができる.

このとき,

$$f_1(x) = 1, f_1(y) = 0.$$

同様に, ある  $f_2 \in S$  が存在し,

$$f_2(x) = 0, f_2(y) = 1.$$

更に,  $f \in S$  を

$$f = af_1 + bf_2$$

により定めると,

$$f(x) = a, f(y) = b.$$

従って,  $S$  は 2 点固有性をもつ.

(2) $\Rightarrow$ (1): 明らか. □

それでは Stone-Weierstrass の定理について述べよう.

**Stone-Weierstrass の定理**  $(X, \mathcal{D})$  をコンパクトな位相空間,  $S$  を  $C(X)$  の部分多元環とする.  $S$  が任意の 2 点を分離し, 任意の点で消滅しないならば,  $\bar{S} = C(X)$ .

**証明**  $f \in C(X)$ ,  $\varepsilon > 0$  とし,

$$B(f; \varepsilon) \cap \bar{S} \neq \emptyset$$

を示せばよい.

まず,  $x_0 \in X$  に対し

$$S(x_0) = \{g \in S \mid f(x_0) = g(x_0)\}$$

とおく.

仮定と上の定理より,  $S$  は 2 点固有性をもつから,

$$S(x_0) \neq \emptyset.$$

$g \in S(x_0)$  に対し

$$U(g) = \{x \in X \mid g(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

とおく.

$x \in X$  とすると,  $S$  は 2 点固有性をもつから, ある  $g \in S$  が存在し,

$$g(x_0) = f(x_0), g(x) = f(x).$$

このとき,

$$g \in S(x_0), x \in U(g).$$

また,  $f, g$  は連続だから,  $U(g)$  は  $X$  の開集合.

よって,

$$\{U(g) \mid g \in S(x_0)\}$$

は  $X$  の開被覆.

$X$  はコンパクトだから, ある  $g_1, g_2, \dots, g_n \in S(x_0)$  が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^n U(g_i).$$

ここで,

$$h = \max(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

とおくと,

$$h \in \bar{S}, h(x_0) = f(x_0)$$

で, 任意の  $x \in X$  に対し

$$h(x) > f(x) - \varepsilon.$$

次に,

$$\bar{S}(\varepsilon) = \{h \in \bar{S} \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対し } h(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

とおくと, 上で示したことから,

$$\bar{S}(\varepsilon) \neq \emptyset.$$

$h \in \bar{S}(\varepsilon)$  に対し

$$V(h) = \{x \in X \mid h(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

とおく.

$x_0 \in X$  とすると, 上で示したことから, ある  $h \in \bar{S}(\varepsilon)$  が存在し,  $x_0 \in V(h)$ .

また,  $f, h$  は連続だから,  $V(h)$  は  $X$  の開集合.

よって,

$$\{V(h) \mid h \in \bar{S}(\varepsilon)\}$$

は  $X$  の開被覆.

$X$  はコンパクトだから, ある  $h_1, h_2, \dots, h_m \in \bar{S}(\varepsilon)$  が存在し,

$$X = \bigcup_{j=1}^m V(h_j).$$

ここで,

$$k = \min(h_1, h_2, \dots, h_m)$$

とおくと,  $k \in \bar{S}$  で, 任意の  $x \in X$  に対し

$$|f(x) - k(x)| < \varepsilon.$$

$X$  はコンパクトだから,

$$d(f, k) < \varepsilon.$$

従って,

$$B(f; \varepsilon) \cap \bar{S} \neq \emptyset.$$

即ち,

$$\bar{S} = C(X).$$

□

定数関数および一次関数は多項式であることより, 次が成り立つ.

**Weierstrass の多項式近似定理** 任意の  $f \in C([a, b])$  および任意の  $\varepsilon > 0$  に対しある実数係数の多項式  $P$  が存在し, 任意の  $x \in [a, b]$  に対し

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

### 関連事項 9. Bernstein 多項式

Weierstrass の多項式近似定理は Bernstein 多項式とよばれるものを用いて直接的に証明することができる。

まず, 必要ならば一次関数を用いて変数変換することにより, 関数の定義域は区間  $[0, 1]$  としてよい。

$k = 0, 1, 2, \dots, n$  に対し

$$\varphi_{n,k}(x) = {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k}$$

とおく. 但し,  ${}_n C_k$  は二項係数, 即ち

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

である.

$f \in C([0, 1])$  に対し多項式  $P_n$  を

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x)$$

により定める. この多項式が Bernstein 多項式である.

ここで, パラメータ  $t \in \mathbf{R}$  を導入し,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) t^k$$

とおく.  $\varphi$  を  $\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}, \dots, \varphi_{n,2}$  の母関数とよぶ.

二項展開より,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k (tx)^k (1-x)^{n-k} \\ &= (tx + 1 - x)^n \end{aligned}$$

だから,  $\varphi(1), \varphi'(1), \varphi''(1)$  を計算すると,

$$\sum_{k=0}^n \varphi_{n,k}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^n k \varphi_{n,k}(x) = nx, \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) \varphi_{n,k}(x) = n(n-1)x^2.$$

よって,  $\delta > 0$  とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta} \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \varphi_{n,k}(x) \\ &\leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \\ &\leq \frac{1}{4n\delta^2}. \end{aligned}$$

特に, この計算から二項分布に対する大数の弱法則が成り立つことが分かる. 更に計算を続けると, Bernstein 多項式の列  $\{P_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は  $f$  に一様収束する.