§10. Urysohn の補題

正規な位相空間においては互いに交わらない閉集合を実連続関数を用いて区別することができる．これが Urysohn の補題である．
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする．X の互いに交わらない任意の閉集合 A, B が開集合によって分離されるとき, 即ち X の互いに交わらない開集合 U, V で, $A \subset U$ かつ $B \subset V$ となるものが存在するとき, X は正規であるという．
なお, 正規性の定義は上の条件に, 空間が T_1 空間であること, 即ち１点からなる部分集合が閉集合であることを付け加える場合もある．
正規性は次のように言い換えることができる．

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とすると, 次の (1), (2) は同値.

(1) X は正規.
(2) A を X の閉集合, U を X の開集合とする．$A \subset U$ ならば, X のある開集合 V が存在し, $A \subset V$ かつ $\overline{V} \subset U$.

証明 (1)⇒(2) のみ示す.
$A \subset U$ だから,

$$A \cap U^c = \emptyset.$$

また, U^c は X の閉集合.
X は正規だから, X のある開集合 V, W が存在し,

$$A \subset V,\ U^c \subset W,\ V \cap W = \emptyset.$$

このとき,

$$\begin{aligned} V &\subset W^c \\ &\subset U. \end{aligned}$$

W^c は X の閉集合だから,

$$\overline{V} \subset U.$$

□

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を正規な位相空間, A, B を X の互いに交わらず, 空でない閉集合とする．集合 D_n $(n \in \mathbf{N})$ および D を

$$D_n = \left\{ \frac{m}{2^n} \middle| m = 0, 1, \ldots, 2^n \right\},\ D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

により定める．このとき, 次の (1), (2) をみたす X の開集合からなる集合族 $\{U_t | t \in D\}$ が存在する．

(1) 任意の $t \in D_n$ に対し $A \subset U_t$ かつ $\overline{U}_t \subset B^c$.
(2) $s, t \in D_n$, $s < t$ ならば, $\overline{U}_s \subset U_t$.

証明 n に関する数学的帰納法により示す.
まず, B^c は X の開集合で,

$$A \subset B^c.$$

上の定理において $A=A,\ U=B^c$ とすると, X のある開集合 U_0 が存在し,

$$A \subset U_0,\ \overline{U}_0 \subset B^c.$$

上の定理において $A=\overline{U}_0,\ U=B^c$ とすると, X のある開集合 U_1 が存在し,

$$\overline{U}_0 \subset U_1,\ \overline{U}_1 \subset B^c.$$

上の定理において $A=\overline{U}_0,\ U=U_1$ とすると, X のある開集合 $U_{\frac{1}{2}}$ が存在し,

$$\overline{U}_0 \subset U_{\frac{1}{2}},\ \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subset U_1.$$

よって, $n=1$ のとき, 定理は正しい.
$n=k$ $(k\in\mathbf{N})$ のとき, 定理が正しいと仮定する.
まず,

$$D_{k+1}\setminus D_k = \left\{ \frac{2m-1}{2^{k+1}} \,\middle|\, m=1,2,\ldots,2^k \right\}$$

に注意する.
上の定理において $A=\overline{U}_{\frac{m-1}{2^k}},\ U=U_{\frac{m}{2^k}}$ とすると, X のある開集合 $U_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}}$ が存在し

$$\overline{U}_{\frac{m-1}{2^k}} \subset U_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}},\ \overline{U}_{\frac{2m-1}{2^{k+1}}} \subset U_{\frac{m}{2^k}}.$$

よって, $n=k+1$ のときも定理は正しい. □

なお, 上の定理の証明は厳密には選択公理を用いる必要がある.
それでは Urysohn の補題について述べよう.

Urysohn の補題 $(X,\mathfrak{O})$ を正規な位相空間, A, B を X の互いに交わらず, 空でない閉集合とすると, ある $f\in C(X)$ が存在し,

$$f(X)\subset[0,1],\ f(A)=\{0\},\ f(B)=\{1\}.$$

証明 $\{U_t | t\in D\}$ を上の定理における集合族とする.
まず, X で定義された実数値関数 f を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (\text{任意の } t\in D \text{ に対し } x\notin U_t), \\ \inf\{t\in D | x\in U_t\} & (\text{ある } t\in D \text{ に対し } x\in U_t) \end{cases}$$

により定めると,

$$f(X)\subset[0,1].$$

また, $A\subset U_0$ だから,

$$f(A)=\{0\}.$$

更に, 任意の $t\in D$ に対し $\overline{U}_t \subset B^c$ だから,

$$B\cap\left(\bigcup_{t\in D} U_t\right)=\emptyset.$$

よって,

$$f(B)=\{1\}.$$

次に, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し

$$L_\alpha = \{x \in X | f(x) < \alpha\}$$

とおくと,

$$L_\alpha = \begin{cases} \emptyset & (\alpha \leq 0), \\ X & (\alpha > 1). \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 1$ のとき,

$$L'_\alpha = \bigcup_{t<\alpha} U_t$$

とおき, $x \in L_\alpha$ とすると, ある $t \in D$ が存在し,

$$f(x) < t < \alpha.$$

f の定義と U_t の性質より, $x \in U_t$ だから, $x \in L'_\alpha$.
逆に, $x \in L'_\alpha$ とすると, ある $t \in \mathbf{R}$ が存在し,

$$t < \alpha, \ x \in U_t.$$

f の定義より,

$$f(x) \leq t.$$

よって, $x \in L_\alpha$ だから,

$$L_\alpha = L'_\alpha.$$

また,

$$R_\alpha = \{x \in X | f(x) > \alpha\}$$

とおくと,

$$R_\alpha = \begin{cases} \emptyset & (\alpha \geq 1), \\ X & (\alpha < 0). \end{cases}$$

$0 \leq \alpha < 1$ のとき,

$$R'_\alpha = \left(\bigcap_{t>\alpha} \bar{U}_t \right)^c$$

とおき, $x \in R_\alpha$ とすると, ある $s, t \in D$ が存在し

$$\alpha < s < t < f(x).$$

f の定義より, $x \notin U_t$ で, U_t の性質より, $x \notin \bar{U}_s$ だから, $x \in R'_\alpha$.
逆に, $x \in R'_\alpha$ とすると, ある $t \in D$ が存在し,

$$t > \alpha, \ x \notin \bar{U}_t.$$

f の定義より,

$$f(x) \geq t.$$

よって, $x \in R_\alpha$ だから,

$$R_\alpha = R'_\alpha.$$

以上より, L_α, R_α は X の開集合だから, f は連続. 即ち, $f \in C(X)$. $\square$

関連事項 10. Urysohn の距離付け定理

距離空間はもちろん位相空間の例であるが, §2 においても触れたように, 逆にあたえられた位相空間の位相がある距離から定まる位相に一致するとき, その位相空間は距離付け可能であるという.
(X, d) を距離空間, A を X の空でない部分集合とし, 関数 f_A を

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) | a \in A\} \quad (x \in X)$$

により定める. $f_A(x)$ を x と A の距離とよぶ.
関数 f_A に関して次の (1)〜(3) が成り立つ.

(1) 任意の $x, y \in X$ に対し $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$.
(2) $f_A(x) = 0$ となることと $x \in \overline{A}$ とは同値.
(3) $f_A(x) > 0$ となることと $x \in A^i$ とは同値.

特に, (1) より, f_A は X 上の実連続関数である.
よって, A, B が距離空間 X の互いに交わらず, 空でない閉集合のとき,

$$U = \{x \in X | f_A(x) < f_B(x)\},\ V = \{x \in X | f_A(x) > f_B(x)\}$$

とおくと, U, V は X の開集合で, $A \subset U$ かつ $B \subset V$ となる. 即ち, 距離空間は正規である.
従って, 位相空間が距離付け可能であるためには, まず正規でなければならない. Urysohn の距離付け定理とは, 第 2 可算公理をみたす正規な Hausdorff 位相空間は距離付け可能であるというものである. Urysohn の距離付け定理の証明には Urysohn の補題が用いられる.
なお, 任意の相異なる 2 点が開集合によって分離される位相空間を Hausdorff であるという.
第 2 可算公理について述べておこう.
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, $\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{O}$ の部分集合とする. 任意の $O \in \mathfrak{O}$ が

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda,\ W_\lambda \in \mathfrak{B}$$

と表されるとき, $\mathfrak{B}$ を X または $\mathfrak{O}$ の基底とよぶ.
位相空間は高々可算の基底が存在するとき, 第 2 可算公理をみたすという.
例えば, Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は第 2 可算公理をみたす. 実際, 有理点, 即ちすべての座標が有理数となる点を中心とする半径が有理数の球体全体の集合が基底となることが分かる.
なお, 上に現れた点と部分集合の距離を用いると, 距離空間に対しては Urysohn の補題は直ちに示すことができる. 実際, A, B が距離空間 X の互いに交わらず, 空でない閉集合のとき,

$$f(x) = \frac{f_A(x)}{f_A(x) + f_B(x)} \quad (x \in X)$$

とおくと, $f \in C(X)$ で,

$$f(X) \subset [0, 1],\ f(A) = \{0\},\ f(B) = \{1\}$$

である.