§11. Tietze の拡張定理

正規な位相空間の閉集合上の実連続関数は全空間上の実連続関数に拡張することができる．これが Tietze の拡張定理である．
位相空間の閉集合に対し相対位相を考える．相対位相については §4 においても触れたが, 改めて述べておこう．
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, A を X の空でない部分集合とし, A の部分集合系 $\mathfrak{O}_A$ を

$$\mathfrak{O}_A = \{A \cap O | O \in \mathfrak{O}\}$$

により定める．このとき, $(A, \mathfrak{O}_A)$ は位相空間となる．$\mathfrak{O}_A$ を相対位相とよぶ．相対位相を考えるときの部分集合を部分空間とよぶ．

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間, A を X の部分空間とし, $f \in C(A)$ とする．ある $g \in C(X)$ が存在し, 任意の $a \in A$ に対し $g(a) = f(a)$ となるとき, g を f の X 上への拡張とよび, f は X 上へ拡張可能であるという．

例 $f \in C((0,1))$ を

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1))$$

により定めると, f は $\mathbf{R}$ 上へ拡張可能ではない．

Tietze の拡張定理を証明するために必要な定理を用意しよう．

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を正規な位相空間, A を X の閉集合とする．更に, $m > 0$, $u \in C(A)$ とし, 任意の $a \in A$ に対し $|u(a)| \leq m$ が成り立つとする．このとき, ある $v \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対し

$$|v(x)| \leq \frac{m}{3},\ |u(a) - v(a)| \leq \frac{2}{3}m.$$

証明 A の部分集合 F, G を

$$F = \left\{ a \in A \middle| u(a) \geq \frac{m}{3} \right\},\ G = \left\{ a \in A \middle| u(a) \leq -\frac{m}{3} \right\}$$

により定めると,

$$F \cap G = \emptyset.$$

また, A は X の閉集合で, u は連続だから, F, G はともに X の閉集合．
X は正規だから, Urysohn の補題より, ある $v \in C(X)$ が存在し,

$$v(X) \subset \left[-\frac{m}{3}, \frac{m}{3} \right],\ v(F) = \left\{ \frac{m}{3} \right\},\ v(G) = \left\{ -\frac{m}{3} \right\}.$$

このとき, 任意の $a \in A$ に対し

$$|u(a) - v(a)| \leq \frac{2}{3}m.$$

□

定理 $(X, \mathfrak{O})$ を正規な位相空間, A を X の閉集合とする．更に, $f \in C(A)$ とし, 任意の $a \in A$ に対し $|f(a)| \leq 1$ が成り立つとする．このとき, 任意の $x \in X$ に対し $|g(x)| \leq 1$ となる f の X 上への拡張 g が存在する．

証明 まず, 上の定理において $m = 1$, $u = f$ とすると, ある $g_1 \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対し

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3},\ |f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}.$$

$f_1 \in C(A)$ を

$$f_1(a) = f(a) - g_1(a) \quad (a \in A)$$

により定めると, 任意の $a \in A$ に対し

$$|f_1(a)| \leq \frac{2}{3}.$$

同様の操作を続けると, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し, ある $g_n \in C(X)$, $f_n \in C(A)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対し

$$|g_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n},\ |f_n(a)| \leq \frac{2^n}{3^n},\ f_{n+1}(a) = f_n(a) - g_{n+1}(a). \tag{$*$}$$

ここで, $\varphi_n \in C(X)$ を

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$$

により定める.
$x \in X$, $m \geq n$ とすると, $(*)$ の第 1 式より,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| &\leq \sum_{i=n+1}^{m} |g_i(x)| \\
&\leq \frac{2^n}{3^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}}{1 - \frac{2}{3}} \\
&< \left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

よって, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は $C(X)$ の一様 Cauchy 列となるから, ある $g \in C(X)$ に一様収束する.
また,

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x)| &\leq \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

だから,

$$|g(x)| \leq 1.$$

更に, $a \in A$ とすると, $(*)$ の第 3 式より,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(a) &= \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \\
&= (f(a) - f_1(a)) + \sum_{i=2}^{n} (f_{i-1}(a) - f_i(a)) \\
&= f(a) - f_n(a).
\end{aligned}$$

従って, $(*)$ の第 2 式より,

$$\begin{aligned} g(a) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) \\ &= \lim_{n\to\infty} (f(a) - f_n(a)) \\ &= f(a) - \lim_{n\to\infty} f_n(a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

□

Tietze の拡張定理 $(X, \mathfrak{O})$ を正規な位相空間, A を X の閉集合とすると, $C(A)$ の任意の元は X 上へ拡張可能.

証明 $f \in C(A)$ とする.
$\mathbf{R}$ から $(-1, 1)$ への写像 ψ を

$$\psi(t) = \frac{t}{1+|t|} \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めると, ψ は同相写像, 即ち ψ は全単射で ψ および逆写像 ψ^{-1} は連続である.
よって, $\psi \circ f \in C(A)$ で, 任意の $a \in A$ に対し

$$|(\psi \circ f)(a)| < 1.$$

上の定理より, ある $g \in C(X)$ が存在し, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対し

$$|g(x)| \leq 1, \ g(a) = (\psi \circ f)(a).$$

ここで,

$$B = \{x \in X | |g(x)| = 1\}$$

とおくと,

$$A \cap B = \emptyset.$$

また, g は連続だから, B は X の閉集合.
A も X の閉集合で, X は正規だから, Urysohn の補題より, ある $h \in C(X)$ が存在し,

$$h(X) \subset [0, 1], \ h(A) = \{1\}, \ h(B) = \{0\}.$$

$k \in C(X)$ を

$$k(x) = g(x)h(x) \quad (x \in X)$$

により定めると, 任意の $x \in X$ および任意の $a \in A$ に対し

$$|k(x)| < 1, \ k(a) = (\psi \circ f)(a).$$

更に, $l \in C(X)$ を

$$l = \psi^{-1} \circ k$$

により定めると, 任意の $a \in A$ に対し

$$l(a) = f(a).$$

即ち, l は f の X 上への拡張. □

関連事項 11. 分離公理

位相空間の正規性を定義する際に現れた条件を第 4 分離公理または Tietze の公理とよぶ.
位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ に対し次の四つの条件を考えよう.

(T_1) 相異なる任意の $x, y \in X$ に対し, y を含まない x のある近傍が存在する.
(T_2) 相異なる任意の $x, y \in X$ に対し, 互いに交わらない x の近傍および y の近傍が存在する.
(T_3) $x \notin A$ となる任意の $x \in X$ および X の任意の閉集合 A に対し, X の互いに交わらない開集合 U, V で, $x \in U$ かつ $A \subset V$ となるものが存在する.
(T_4) X の互いに交わらない任意の閉集合 A, B に対し, X の互いに交わらない開集合 U, V で, $A \subset U$ かつ $B \subset V$ となるものが存在する.

(T_1) を第 1 分離公理または Fréchet の公理とよぶ. X は (T_1) をみたすとき, T_1 空間とよぶ.
(T_1) は次の (T_1)' または (T_1)" と同値である.

(T_1)' 任意の $x \in X$ に対し, x のすべての近傍の共通部分は $\{x\}$.
(T_1)" 任意の $x \in X$ に対し, $\{x\}$ は X の閉集合.

(T_2) を第 2 分離公理または Hausdorff の公理とよぶ. X は (T_2) をみたすとき, Hausdorff であるという.
(T_2) は次の (T_2)' と同値である.

(T_2)' 任意の $x \in X$ に対し, x のすべての閉近傍, 即ち近傍かつ閉集合となる X の部分集合の共通部分は $\{x\}$.

定義より, Hausdorff な位相空間は (T_1) 空間である.
また, 任意の点列が高々1 点にしか収束しないことと位相空間が Hausdorff であることとは同値であることが分かる.
関連事項 10 においても述べたように, 距離空間は正規であるが, Hausdorff でもある.
(T_3) を第 3 分離公理または Vietoris の公理とよぶ. X は (T_3) をみたすとき, 正則であるという.
正規性の定義と同様に, 正則性の定義においても条件 (T_1) を付け加える場合がある.
(T_4) については既に述べた通りである.
位相空間が (T_1) または Hausdorff または正則ならば, 任意の部分空間もそれぞれ (T_1), Hausdorff, 正則となる.
また, $\{(X_\lambda, \mathfrak{O}_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ を位相空間の族とすると, 直積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に直積位相とよばれる位相を定めることができるが, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が (T_1) または Hausdorff または正則であることと各 X_λ がそれぞれ (T_1), Hausdorff, 正則であることとは同値であることが分かる.
正規な位相空間はその名に反して, 上のような性質を必ずしももたない. 例えば, 正規な位相空間の部分空間で, 正規にならないものとして Tychonoff の板とよばれるもの, また正規な位相空間の直積位相空間で, 正規にならないものとして Sorgenfrey の平面とよばれるものが知られている.