§12. コンパクト開位相

位相空間から位相空間への連続写像全体の集合にはコンパクト開位相とよばれる位相を考えることができる.
X を集合, $\mathfrak{M}$ を X の部分集合系とする. $\mathfrak{M}$ を含む X の位相全体の中で最も小さいもの, 即ち $\mathfrak{M}$ を含む X のすべての位相の共通部分を $\mathfrak{M}$ により生成される位相とよぶ.
$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とし, X から Y への連続写像全体の集合を $C(X, Y)$ と書く.
また, A を X の部分集合, B を Y の部分集合とし, $C(X, Y)$ の部分集合 $W(A, B)$ を

$$W(A, B) = \{f \in C(X, Y) | f(A) \subset B\}$$

により定める.
更に, $C(X, Y)$ の部分集合系 $\mathfrak{M}$ を

$$\mathfrak{M} = \{W(A, B) | A \text{ はコンパクトで, } B \text{ は開集合}\}$$

により定める.
$\mathfrak{M}$ により生成される $C(X, Y)$ の位相をコンパクト開位相とよぶ.

定理　$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, A を X の部分集合, B を Y の閉集合とすると, コンパクト開位相に関して $W(A, B)$ は $C(X, Y)$ の閉集合.

証明　de Morgan の法則より,

$$\begin{aligned} W(A, B)^c &= \left(\bigcap_{a \in A} W(\{a\}, B) \right)^c \\ &= \bigcup_{a \in A} W(\{a\}, B)^c \\ &= \bigcup_{a \in A} W(\{a\}, B^c). \end{aligned}$$

ここで, 1 点からなる集合 $\{a\}$ はコンパクト. また, B は Y の閉集合だから, B^c は Y の開集合.
よって, コンパクト開位相を考えると, $W(\{a\}, B^c)$ は $C(X, Y)$ の開集合となるから, $W(A, B)^c$ は $C(X, Y)$ の開集合.
従って, $W(A, B)$ は $C(X, Y)$ の閉集合. □

コンパクト開位相を特徴付けるための準備として, 関連事項 11 においても触れた直積位相について, 二つの位相空間の直積の場合に少し詳しく述べておこう.
$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とし, 直積 $X \times Y$ の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{U \times V | U \in \mathfrak{O}_X,\ V \in \mathfrak{O}_Y\}$$

により定める. $\mathfrak{B}$ を基底とする $X \times Y$ の位相を直積位相とよぶ. 即ち, 関連事項 10 においても述べたように, $X \times Y$ の開集合 O は

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda),\ U_\lambda \in \mathfrak{O}_X,\ V_\lambda \in \mathfrak{O}_Y$$

と表される. 直積位相を考えた直積集合を直積空間とよぶ.
p_X, p_Y を $X \times Y$ からそれぞれ X, Y への射影, 即ち

$$p_X(x, y) = x,\ p_Y(x, y) = y\ ((x, y) \in X \times Y)$$

とし, $X \times Y$ の部分集合系 $\mathfrak{M}$ を

$$\mathfrak{M} = \{p_X^{-1}(U),\ p_Y^{-1}(V) | U \in \mathfrak{O}_X,\ V \in \mathfrak{O}_Y\}$$

により定めると, $X \times Y$ の直積位相は $\mathfrak{M}$ により生成される位相であることが分かる.
直積空間のコンパクト性に関して次が成り立つ.

定理 $(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ をともにコンパクトな位相空間とすると, 直積空間 $X \times Y$ もコンパクト.

$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, H を $C(X, Y)$ の部分集合とし, 直積 $H \times X$ から Y への写像 Φ を

$$\Phi(h, x) = h(x) \quad (h \in H,\ x \in X)$$

により定める.
$\mathfrak{O}_H$ を H の位相とし, $H \times X$ の直積位相に関して Φ がいつ連続となるかを考えよう. まず, H に離散位相を入れてしまえば, Φ は連続となる.

定理 $\mathfrak{O}_H$ が離散位相ならば, Φ は連続.

証明 U を Y の開集合とすると,

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(U) &= \{(h, x) \in H \times X | h(x) \in U\} \\ &= \bigcup_{h \in H} \left(\{h\} \times h^{-1}(U)\right).\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{O}_H$ は離散位相だから, $\{h\}$ は H の開集合. また, U は Y の開集合で, h は連続だから, $h^{-1}(U)$ は X の開集合.
よって, 直積位相の定義より, $\Phi^{-1}(U)$ は $H \times X$ の開集合.
従って, Φ_H は連続. □

$C(X, Y)$ のコンパクト開位相を考えたときの H の相対位相を H のコンパクト開位相とよぶ. H のコンパクト開位相は上の Φ が連続となるような H の位相の中で最も弱い, または小さいものであることが分かる. これを示すために次を用意しよう.

定理 $(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, K を X のコンパクトな部分集合, L を Y のコンパクトな部分集合, O を直積空間 $X \times Y$ の開集合とする. $K \times L$ が O の部分集合ならば, X のある開集合 U および Y のある開集合 V が存在し,

$$K \subset U,\ L \subset V,\ U \times V \subset O.$$

証明 $(x, y) \in K \times L$ とすると, $(x, y) \in O$ だから, X のある開集合 $U_{(x,y)}$ および Y のある開集合 $V_{(x,y)}$ が存在し,

$$(x, y) \in U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset O.$$

このとき,

$$\{x\} \times L \subset \bigcup_{y \in L} (U_{(x,y)} \times V_{(x,y)}).$$

$\{x\} \times L$ はコンパクトとなるから, ある $y_1, y_2, \ldots, y_n \in L$ が存在し

$$\{x\} \times L \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{(x,y_i)} \times V_{(x,y_i)}).$$

よって,

$$U_x = \bigcap_{i=1}^n U_{(x,y_i)},\ V_x = \bigcup_{i=1}^n V_{(x,y_i)}$$

とおくと, U_x は X の開集合, V_x は Y の開集合で,

$$\{x\} \times L \subset U_x \times V_x \subset O.$$

このとき,

$$K \times L \subset \bigcup_{x \in K} (U_x \times V_x).$$

$K \times L$ はコンパクトとなるから, ある $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ が存在し

$$K \times L \subset \bigcup_{j=1}^m (U_{x_j} \times V_{x_j}).$$

従って,

$$U = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j},\ V = \bigcap_{j=1}^m V_{x_j}$$

とおけばよい. □

定理　$(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間, H を $C(X,Y)$ の部分集合, $\mathfrak{O}_H$ を H の位相とする. 上で定めた Φ が連続ならば, $\mathfrak{O}_H$ は H のコンパクト開位相より大きい, 即ち $\mathfrak{O}_H$ は H のコンパクト開位相を含む.

証明　K を X のコンパクトな部分集合, U を Y の開集合とし,

$$f_0 \in H \cap W(K,U)$$

とすると,

$$\{f_0\} \times K \subset \Phi^{-1}(U).$$

Φ は連続だから, $\Phi^{-1}(U)$ は $H \times X$ の開集合.
更に, $\{f_0\}$ は H のコンパクトな部分集合で, K は X のコンパクトな部分集合だから, 上の定理より, H のある開集合 N および X のある開集合 V が存在し,

$$\{f_0\} \subset N,\ K \subset V,\ N \times V \subset \Phi^{-1}(U).$$

$f \in N$ とすると,

$$\begin{aligned} f(K) &= \Phi(\{f\} \times K) \\ &\subset \Phi(N \times V) \\ &\subset U. \end{aligned}$$

よって,

$$N \subset H \cap W(K,U)$$

だから, 相対位相の定義より,

$$H \cap W(K,U) \in \mathfrak{O}_H.$$

即ち, $\mathfrak{O}_H$ は H のコンパクト開位相より大きい. □

関連事項 12. 位相の比較

一つの集合に対し考えることのできる位相は様々である.
まず, 密着位相や離散位相はその中でも両極端な例である. 即ち, 一つの集合に対し考えることのできる位相の中で, 密着位相は最も小さいものであり, 離散位相は最も大きいものである.
一方, 有限次元のベクトル空間のノルムから定まる位相を考えると, ノルムの選び方は様々であっても, 位相は一通りにしか定まらないのであった.
集合 X に対し二つの位相 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2$ があたえられているとする. $\mathfrak{O}_1$ が $\mathfrak{O}_2$ より大きいということは X の上の恒等写像 ι を $(X, \mathfrak{O}_1)$ から $(X, \mathfrak{O}_2)$ への写像とみなして連続であるということである. 実際, O を $\mathfrak{O}_2$ に関する X の任意の開集合とすると, $\mathfrak{O}_1$ が $\mathfrak{O}_2$ より大きいならば, X の部分集合 $\iota^{-1}(U) = U$ は $\mathfrak{O}_1$ に関する開集合となるからである.
また, 位相空間 $(X, \mathfrak{O}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ への写像は, X の位相が大きいほど, また Y の位相が小さいほど連続になりやすい.
集合 X に対し考えることのできる位相全体の集合を $\mathfrak{T}$ と書くことにする. 位相の大小は部分集合系に対する包含関係を用いて定められるから, $\mathfrak{T}$ は位相の大小関係に関して順序集合となる. 即ち, 次の (1)〜(3) が成り立つ.

(1) 任意の $\mathfrak{O} \in \mathfrak{T}$ に対し $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}$ (反射律).

(2) $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2 \in \mathfrak{T}$ とする. $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ かつ $\mathfrak{O}_2 \subset \mathfrak{O}_1$ ならば, $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$ (反対称律).

(3) $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3 \in \mathfrak{T}$ とする. $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ かつ $\mathfrak{O}_2 \subset \mathfrak{O}_3$ ならば, $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_3$ (推移律).

$\mathfrak{T}$ は一般に全順序集合ではないが, 最大限と最小元をもつ. 始めに述べたように, 最大元は離散位相で, 最小元は密着位相である.
実連続関数全体の集合に対しては一様収束位相を考えることができるが, コンパクト開位相も考えることができる. この二つの位相を比較してみよう.
$(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする. まず, 一般に $C(X)$ の一様収束位相はコンパクト開位相より大きいことが分かる. しかし, X がコンパクトならば $C(X)$ の一様収束位相とコンパクト開位相は一致することが分かる.
X がコンパクトではなくとも上の二種類の位相が一致することはある.
実数を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と書くことにする.
まず, $M_{m,n}(\mathbf{R}) \times M_{m,n}(\mathbf{R})$ で定義された実数値関数 d を

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (a_{ij} - b_{ij})^2} \quad (A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{R}))$$

により定める.
これは $M_{m,n}(\mathbf{R})$ を自然に mn 次元の Euclid 空間とみなしたものに他ならないから, $(M_{m,n}(\mathbf{R}), d)$ は距離空間となる.
一方, $\mathbf{R}^n$ の元を列ベクトルで表しておき, $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ に対し $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像 L_A を

$$L_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると, L_A は連続で, A は L_A と同一視することができる.
よって, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は $C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ の部分集合とみなすことができるから, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ のコンパクト開位相を考えることができる.
$\mathbf{R}^n$ はコンパクトではないが, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ に対する上の二つの位相は一致することが分かる.