曲線の射影微分幾何

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

2012 年 5 月 12 日 (土)
大阪市立大学, OCU48 セミナー

内容

1. 序
2. 微分方程式と射影空間内の曲線
3. 射影直線内の曲線
4. 平面曲線
5. 双対曲線
6. 空間曲線

動機

$\mathbf{P}^n$: n 次元射影空間
係数体は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$

射影微分幾何: $\mathbf{P}^n$ 内の多様体の微分幾何

射影極小曲面: 射影微分幾何における曲面族
いわゆる可積分系
アファイン球面を含む
中心アファイン極小曲面との関係
(佐々木武先生のノート)

参考文献

- T. Sasaki, Projective Differential Geometry and Linear Homogeneous Differential Equations, Rokko Lectures in Mathematics vol 5, 1999, pp. 114
- T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces, Kyushu J. Math. 60 (2006), 101-243

ともにダウンロード可

線形常微分方程式

曲線の射影微分幾何
藤岡敦
内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

まずは線形常微分方程式から考える
射影空間内の曲線と対応付けることができる
関数は実変数実数値または複素変数複素数値とする

$z(t)$: 未知関数
$p_1(t), \ldots, p_n(t)$: 既知関数
線形常微分方程式:

$$z^{(n+1)} + p_1 z^{(n)} + \cdots + p_n z' + p_{n+1} z = 0 \qquad (1)$$

を考える

微分方程式から曲線

$z_1, \dots, z_{n+1}$: (1) の 1 次独立な解
$\mathbf{P}^n$ 内の曲線を

$$t \mapsto [z_1(t), \dots, z_{n+1}(t)]$$

により定めることができる

異なる 1 次独立な解は線形変換で写り合う
$\Longrightarrow$ 対応する曲線は射影変換で写り合う

曲線から微分方程式

曲線の射影微分幾何
藤岡敦
内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

$\mathbf{P}^n$ 内の曲線:

$$z(t) = [z_1(t), \ldots, z_{n+1}(t)]$$

線形常微分方程式:

$$\begin{vmatrix} z^{(n+1)} & z^{(n)} & \cdots & z \\ z_1^{(n+1)} & z_1^{(n)} & \cdots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n+1}^{(n+1)} & z_{n+1}^{(n)} & \cdots & z_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

を考える

$\Longrightarrow z_1, \ldots, z_{n+1}$ は解

通常は $z_1, \ldots, z_n$ の 1 次独立性を仮定 (正則)

注意

内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

- 各同次座標を関数倍しても曲線は同じ
  $\Longrightarrow$ 対応する微分方程式は一意ではない
- パラメータを変換しても曲線の像は変わらない
  $\Longrightarrow$ 次の変数変換を認める

$$(z, t) \mapsto (w = \lambda(t) z,\ s = f(t))$$

$\mathbf{P}^1$ 内の曲線

$\mathbf{P}^1$ 内の曲線を考える
運動ともいう (E. Cartan)
正則性を仮定する
2 階の線形常微分方程式が対応する

$$z'' + p_1 z' + p_2 z = 0 \tag{2}$$

変数変換を行い (2) を簡単な形にしていく
$\Longrightarrow$ 曲線の不変量が現れる

変数変換

曲線の射影微分幾何
藤岡敦
内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

変数変換

$$w = \frac{1}{\lambda(t)} z$$

を考える
このとき

$$\begin{aligned} z &= \lambda w \\ z' &= \lambda' w + \lambda w' \\ z'' &= \lambda'' w + 2\lambda' w' + \lambda w'' \end{aligned}$$

(2) に代入して整理すると

$$w'' + \left(\frac{2\lambda'}{\lambda} + p_1 \right) w' + \left(\frac{\lambda''}{\lambda} + p_1 \frac{\lambda'}{\lambda} + p_2 \right) w = 0 \qquad (3)$$

微分方程式の簡単化

(3) の w' の係数が 0 となるように λ を選ぶ

$$\frac{2\lambda'}{\lambda} + p_1 = 0$$

このとき w の係数を Q とおくと

$$Q = p_2 - \frac{1}{4}p_1^2 - \frac{1}{2}p_1'$$

すなわち

$$w'' + Qw = 0 \tag{4}$$

Q は何か?
答え: Schwarz 微分

Schwarz 微分

Schwarz 微分:

$$\{g;t\} := \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

命題

(1) a, b, c, d: 定数, $ad - bc \neq 0$

$$\Longrightarrow \left\{\frac{ag+b}{cg+d}; t\right\} = \{g;t\}$$

(2) $\{g;t\} = 0 \Longrightarrow \exists a, b, c, d$: 定数, $ad - bc \neq 0$ s.t.

$$g(t) = \frac{at+b}{ct+d}$$

(3) $\{g;t\} = \{g;s\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \{s;t\}$ (接続公式)

$\mathbf{P}^1$ 内の曲線の基本定理

命題

z_1, z_2: (2) の 1 次独立な解

$$g := \frac{z_1}{z_2}$$

$$\Longrightarrow Q = \{g; t\}$$

特に $\mathbf{P}^1$ 内の曲線は Schwarz 微分によって射影変換を除いて定まる

証明

射影変換を除いて定まることを示すには上の命題の (2), (3) を用いればよい

命題の証明

Schwarz 微分の計算

証明

λ を上のように選んでおく
$gw_2 = w_1$ を 2 回微分すると

$$g''w_2 + 2g'w_2' + gw_2'' = w_1''$$

(4) より

$$g''w_2 + 2g'w_2' + \frac{w_1}{w_2}(-Qw_2) = -Qw_1$$

よって

$$\frac{g''}{g'} = -\frac{2w_2'}{w_2}$$

更に計算すると g の Schwarz 微分は Q となる

$\mathbf{P}^2$ 内の曲線

$\mathbf{P}^2$ 内の曲線を考える
正則性を仮定する
3 階の線形常微分方程式が対応する

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0 \tag{5}$$

変数変換

$$w = \frac{1}{\lambda(t)} z$$

を考える
このとき

$$\begin{aligned} z &= \lambda w \\ z' &= \lambda' w + \lambda w' \\ z'' &= \lambda'' w + 2\lambda' w' + \lambda w'' \\ z''' &= \lambda''' w + 3\lambda'' w' + 3\lambda' w'' + \lambda w''' \end{aligned}$$

微分方程式の簡単化

第 1 段階

(5) に代入して整理すると

$$w''' + \left(\frac{3\lambda'}{\lambda} + p_1\right) w'' + \left(\frac{3\lambda''}{\lambda} + p_1 \frac{2\lambda'}{\lambda} + p_2\right) w' + \left(\frac{\lambda'''}{\lambda} + p_1 \frac{\lambda''}{\lambda} + p_2 \frac{\lambda'}{\lambda} + p_3\right) w = 0$$

w'' の係数が 0 となるように λ を選ぶ

$$\frac{3\lambda'}{\lambda} + p_1 = 0$$

簡単化された微分方程式
第 1 段階

命題

$$w''' + q_2 w' + q_3 w = 0 \tag{6}$$

ただし

$$\begin{cases} q_2 = p_2 - p_1' - \dfrac{1}{3} p_1^2 \\ q_3 = p_3 - \dfrac{1}{3} p_1'' + \dfrac{2}{27} p_1^3 - \dfrac{1}{3} p_1 p_2 \end{cases}$$

証明

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{1}{3} p_1, \quad \frac{\lambda''}{\lambda} = -\frac{1}{3} p_1' + \frac{1}{9} p_1^2, \quad \frac{\lambda'''}{\lambda} = -\frac{1}{3} p_1'' + \frac{1}{3} p_1 p_1' - \frac{1}{27} p_1^3$$

を用いればよい

パラメータ込みの変数変換
第 2 段階

変数変換

$$u = \frac{1}{\mu(t)} w, \ s = f(t)$$

を考える
このとき

$$\begin{aligned} w &= \mu u \\ w' &= \mu' u + \mu f' \dot{u} \\ w'' &= \mu'' u + (2\mu' f' + \mu f'')\dot{u} + \mu (f')^2 \ddot{u} \\ w''' &= \mu''' u + (3\mu'' f' + 3\mu' f'' + \mu f''')\dot{u} + 3(\mu'(f')^2 + \mu f' f'')\ddot{u} \\ &\quad + \mu (f')^3 \dddot{u} \end{aligned}$$

微分方程式の簡単化
第 2 段階

(6) に代入して整理する
$\ddot{u}$ の係数が 0 となるようにしておく

$$\mu' f' + \mu f'' = 0$$

すなわち

$$\mu = \frac{c}{f'} \quad (c \neq 0)$$

このとき

$$(f')^2 \dddot{u} + (q_2 - 4\{f;t\})\dot{u} + \left\{ \frac{q_3}{f'} - q_2 \frac{f''}{(f')^2} - \frac{f''''}{(f')^2} + \frac{6f''f'''}{(f')^3} - \frac{6(f'')^3}{(f')^4} \right\} u = 0$$

$\dot{u}$ の係数が 0 となるように f を選ぶ

$$\{f;t\} = \frac{1}{4} q_2$$

簡単化された微分方程式
第 2 段階

命題

$$\dddot{u} + ru = 0 \quad \text{(Laguerre-Forsyth 標準形)}$$

ただし

$$r = \left(q_3 - \frac{1}{2}q_2'\right)\frac{1}{(f')^3}$$

$$rds^3 = \left(q_3 - \frac{1}{2}q_2'\right)dt^3 \text{ は変数変換}$$

$$(u, s) \mapsto \left(\frac{1}{\nu(s)}u, g(s)\right) \quad \left(\nu = \frac{\tilde{c}}{\dot{g}},\ \tilde{c} \neq 0,\ \{g; s\} = 0\right)$$

で不変

$\Longrightarrow$ 曲線の不変量 (Laguerre-Forsyth 3 次微分)

例

曲線の射影微分幾何
藤岡敦
内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

$rds^3 = 0$ とする
このとき

$$\dddot{u} = 0$$

1 次独立な解は

$$1, s, s^2$$

対応する曲線は 2 次曲線

$\mathbf{P}^2$ 内の曲線の基本定理

$rds^3 \neq 0$ とする
微分方程式

$$\frac{dz^3}{dt^3} + 2k\frac{dz}{dt} + hz = 0$$

に対応する Laguerre-Forsyth 3 次微分が dt^3 であるとする
t: 射影弧長径数
このとき

$$z''' + 2kz' + (k' + 1)z = 0 \tag{7}$$

k: 射影曲率

命題

射影弧長により径数付けられた $\mathbf{P}^2$ 内の曲線は射影曲率によって射影変換を除いて一意的に定まる

定曲率曲線

k が定数のとき (7) は

$$z''' + 2kz' + z = 0$$

特性方程式

$$x^3 + 2kx + 1 = 0$$

を考える
次の 3 つの場合に分ければよい

(1) 相異なる 3 つの実数解をもつ $\left(k < -\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

(2) 重解をもつ $\left(k = -\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

(3) 1 つの実数解をもつ $\left(k > -\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$

定曲率曲線

相異なる 3 つの実数解をもつ場合

非同次座標で考える

$$\gamma(t) = (e^{\alpha t}, e^{\beta t}, 1)$$

と表すことができる
ただし

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \alpha, \beta \neq 0,\ \beta \neq \frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, 2\alpha$$

$X = e^{\alpha t},\ Y = e^{\beta t}$ とおくと

$$Y = X^m$$

ただし

$$m \neq 0, \frac{1}{2}, \pm 1, 2$$

定曲率曲線
その他の場合

重解をもつ場合:

$$\gamma(t) = (t, e^t, 1)$$

と表すことができる

1 つの実数解をもつ場合:

$$\gamma(t) = (e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, 1)$$

と表すことができる
ただし

$$\alpha, \beta \neq 0$$

これは対数螺旋

Plücker 写像

$V = \mathbf{C}^n$ または $\mathbf{R}^n$

$G(k, V)$: V の k 次元部分空間全体
$k(n-k)$ 次元多様体
Grassmann 多様体

$\mathbf{P}(\wedge^k V)$: V の k 次外積代数の 1 次元部分空間全体
$\left(\binom{n}{k} - 1\right)$ 次元射影空間

Plücker 写像:

$$p : G(k, V) \to \mathbf{P}(\wedge^k V)$$

$$\Big(p(W) = \wedge^k W \quad (W \in G(k, V))\Big)$$

埋め込みをあたえる

Plücker 座標

$\{e_1, \ldots, e_n\}$: V の基底
$v_1, \ldots, v_k \in V$: 1 次独立
$j = 1, \ldots, k$
$x_{1j}, \ldots, x_{nj}$: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関する v_j の成分
$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k}$: $\wedge^k V$ の標準基底
$\Longrightarrow \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k}$ に関する $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ の成分は

$$\begin{vmatrix} x_{i_1 1} & \cdots & x_{i_1 k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i_k 1} & \cdots & x_{i_k k} \end{vmatrix} \quad (i_1 < \cdots < i_k)$$

(Plücker 座標)

双対曲線の定義

$V = \mathbf{C}^3$ または $\mathbf{R}^3$
$\gamma : I \to \mathbf{P}^2$: 平面曲線
Plücker 写像を用いると一般に

$$\gamma \wedge \gamma' : \ \mathbf{P}(\wedge^2 V) = \mathbf{P}^2 \text{内の曲線}$$

$$(\text{双対曲線})$$

以下では $\gamma \wedge \gamma'$ が $\mathbf{P}^2$ 内の曲線を定めると仮定する

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

$\gamma : I \to \mathbf{P}^2$: 平面曲線
対応する微分方程式を

$$\gamma''' + p_1\gamma'' + p_2\gamma' + p_3\gamma = 0 \tag{8}$$

とする
$\xi = \gamma \wedge \gamma'$ とおく
このとき

$$\begin{aligned}
\xi' &= \gamma \wedge \gamma'' \\
\xi'' &= \gamma' \wedge \gamma'' + \gamma \wedge \gamma''' \\
&= \gamma' \wedge \gamma'' + \gamma \wedge (-p_1\gamma'' - p_2\gamma' - p_3\gamma) \\
&= \gamma' \wedge \gamma'' - p_1\xi' - p_2\xi \\
\xi''' &= \gamma' \wedge \gamma''' - (p_1\xi' + p_2\xi)'
\end{aligned}$$

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

一方 (8) より

$$\gamma' \wedge \gamma''' + p_1\gamma' \wedge \gamma'' + p_3\gamma' \wedge \gamma = 0$$

よって

$$\xi''' + (p_1\xi' + p_2\xi)' + p_1(\xi'' + p_1\xi' + p_2\xi) - p_3\xi = 0$$

したがって

$$\xi''' + 2p_1\xi'' + (p_1' + p_1^2 + p_2)\xi' + (p_2' + p_1p_2 - p_3)\xi = 0$$

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

γ に対応する簡単化された微分方程式:

$$w''' + q_2 w' + q_3 w = 0$$

ただし

$$\begin{cases} q_2 = p_2 - p_1' - \dfrac{1}{3}p_1^2 \\ q_3 = p_3 - \dfrac{1}{3}p_1'' + \dfrac{2}{27}p_1^3 - \dfrac{1}{3}p_1 p_2 \end{cases}$$

ξ に対する量は $*$ を付けて表すことにする

命題

$$q_2^* = q_2, \quad q_3^* = -q_3 + q_2'$$

特に

$$q_3^* - \frac{1}{2}(q_2^*)' = -\left(q_3 - \frac{1}{2}q_2'\right)$$

自己双対性

自己双対: 双対曲線が元の曲線と射影同値

命題

$\mathbf{P}^2$ 内の曲線が自己双対となるのは 2 次曲線のときに限る

証明

上の命題より

$$\gamma : I \to \mathbf{P}^2 : \text{ 自己双対}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Laguerre-Forsyth 3 次微分は } 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma : \text{ 2 次曲線}$$

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

$\mathbf{P}^3$ 内の曲線を考える
正則性を仮定する
4 階の線形常微分方程式が対応する

$$z'''' + p_1 z''' + p_2 z'' + p_3 z' + p_4 z = 0$$

z を関数倍すると

$$w'''' + q_2 w'' + q_3 w' + q_4 w = 0 \tag{9}$$

とすることができる

パラメータ込みの変数変換
第 2 段階

変数変換

$$u = \frac{1}{\mu(t)} w, \ \ s = f(t)$$

を考える
このとき

$$\begin{aligned}
w &= \mu u \\
w' &= \mu' u + \mu f' \dot{u} \\
&\ \ \vdots \\
w'''' &= \mu'''' u + (4\mu''' f' + 6\mu'' f'' + 4\mu' f''' + \mu f'''')\dot{u} \\
&\quad + (6\mu''(f')^2 + 12\mu' f' f'' + 3\mu(f'')^2 + 4\mu f' f''')\ddot{u} \\
&\quad + (4\mu'(f')^3 + 6\mu(f')^2 f'')\dddot{u} + \mu(f')^4 \ddddot{u}
\end{aligned}$$

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

(9) に代入して整理する

$\dddot{u}$ の係数が 0 となるようにしておく

$$2\mu' f' + 3\mu f'' = 0$$

すなわち

$$\mu = c(f')^{-\frac{3}{2}} \quad (c \neq 0)$$

このとき

$$(f')^2 \ddddot{u} + (q_2 - 10\{f; t\})\ddot{u} + \cdots = 0$$

$\ddot{u}$ の係数が 0 となるように f を選ぶ

$$\{f; t\} = \frac{1}{10} q_2$$

曲線の射影微分幾何

藤岡敦

内容

序

微分方程式と射影空間内の曲線

射影直線内の曲線

平面曲線

双対曲線

空間曲線

このとき

$$\ddddot{u} + r_3 \dot{u} + r_4 u = 0$$

と表される
例えば

$$r_3 = (q_3 - q_2')\frac{1}{(f')^3}$$

$r_3 ds^3 = (q_3 - q_2')dt^3$ は変数変換

$$(u, s) \mapsto \left(\frac{1}{\nu(s)}u, g(s)\right) \quad \left(\nu = \tilde{c}(\dot{g})^{-\frac{3}{2}},\ \tilde{c} \neq 0,\ \{g; s\} = 0\right)$$

で不変
$\Longrightarrow$ 曲線の 1 つの不変量

もう１つの不変量

上の変数変換によって

$$r_4 - \frac{1}{2}\dot{r}_3$$

に相当する量は

$$\frac{r_4}{\dot{g}^4} - \frac{1}{2}\frac{\dot{r}_3}{(\dot{g})^3}$$

に変化する

$\Longrightarrow \left(r_4 - \frac{1}{2}\dot{r}_3\right) ds^4$ も曲線の不変量

$\mathbf{P}^3$ に対する Plücker 写像

$V = \mathbf{C}^4$ または $\mathbf{R}^4$
$\gamma : I \to \mathbf{P}^3$: 空間曲線
Plücker 写像を用いると一般に

$$\gamma \wedge \gamma' : \ \mathbf{P}(\wedge^2 V) = \mathbf{P}^5 \text{内の曲線}$$

以下では $\gamma \wedge \gamma'$ が $\mathbf{P}^5$ 内の曲線を定めると仮定する
対応する微分方程式を

$$\ddddot{\gamma} + r_3 \dot{\gamma} + r_4 \gamma = 0$$

とする
$\xi = \gamma \wedge \dot{\gamma}$ とおく

r_3 の特徴付け

曲線の射影微分幾何
藤岡敦
内容
序
微分方程式と射影空間内の曲線
射影直線内の曲線
平面曲線
双対曲線
空間曲線

命題

$$\xi^{(5)} + r_3\ddot{\xi} - 2(2r_4 - \dot{r}_3)\dot{\xi} - (2\dot{r}_4 - \ddot{r}_3)\xi = 2r_3\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}$$

左辺を L とおくと

$$r_3\dot{L} - \dot{r}_3 L - r_3^2(\dddot{\xi} + r_3\xi) = 0$$

定理

$$r_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

ξ: ある超平面に含まれる

ご清聴ありがとうございました