等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間に付随する多重 Hamilton 構造

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

2012 年 11 月 20 日
放送大学秋田学習センター
研究集会「シンプレクティック幾何とその周辺 2012」
(黒瀬俊氏（関西学院大学）との共同研究)

内容

曲線の運動と可積分系

- 曲線の 1 径数族を曲線の運動という
- 曲線が運動すると幾何学的な量が変化する
- 可積分系として知られる発展方程式が現れることがある
- Hamilton 系として定式化できる場合がある
- 更に双 Hamilton 構造をもつ場合がある

例と主結果

- KdV 方程式: 曲線の運動に付随して現れる
- Hamilton 系として定式化できる
- 更に双 Hamilton 構造をもつ
- 1995 U. Pinkall: 等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間を考え無限次元シンプレクティック多様体とみなす
- 全等積中心アファイン曲率により生成される Hamilton 流に沿って等積中心アファイン曲率は KdV 方程式に従う
- 2010 F-T. Kurose: Pinkall の結果を高次の KdV 流の場合へと一般化
- 今回の主結果: 高次 KdV 流に現れる Hamilton 関数による等位集合は多重 Hamilton 構造をもつ

等積中心アファイン平面曲線

定義

I: 区間

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 平面曲線

$$\gamma\text{: 等積中心アファイン平面曲線} \\ \Updownarrow \text{def} \\ \text{接線が原点を通らない}$$

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン平面曲線

変数変換すると

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} = 1$$

とすることができる (面積速度一定)

このときのパラメータを等積中心アファイン弧長径数という

等積中心アファイン曲率

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン平面曲線
等積中心アファイン弧長により径数付けておく:

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma'' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma'' = -\det \begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \end{pmatrix} \gamma$$

$$=: -\kappa\gamma$$

κ: 等積中心アファイン曲率

等積中心アファイン平面曲線の基本定理

等積中心アファイン変換: 原点を固定する等積アファイン変換

$$x \in \mathbf{R}^2 \mapsto xA \quad (A \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}))$$

等積中心アファイン平面曲線の基本定理

I: 区間

$\kappa : I \to \mathbf{R}$

$\Longrightarrow {}^{\exists}\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン曲率 κ の等積中心アファイン平面曲線

等積中心アファイン変換の合成を除いて一意

等積中心アファイン平面曲線の運動

等積中心アファイン平面曲線の運動を考える:

$$\gamma = \gamma(s, t) : I \times J \to \mathbf{R}^2$$

I, J: 区間
$t \in J$ を固定する毎に $\gamma(\cdot, t)$ は等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン平面曲線

命題

$^\exists \alpha : I \times J \to \mathbf{R}$ s.t.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_s & \alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha_{ss} - \kappa\alpha & \frac{1}{2}\alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (*)$$

命題の証明

証明

$$\gamma_t = \beta\gamma + \alpha\gamma_s$$

とおくと

$$\gamma_{ts} = (\beta_s - \kappa\alpha)\gamma + (\beta + \alpha_s)\gamma_s$$

等積性より

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} \gamma_t \\ \gamma_s \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_{st} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \beta\gamma + \alpha\gamma_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \gamma \\ (\beta_s - \kappa\alpha)\gamma + (\beta + \alpha_s)\gamma_s \end{pmatrix} \\ &= 2\beta + \alpha_s \end{aligned}$$

積分可能条件

連立線形偏微分方程式 (∗) の積分可能条件は

$$\kappa_t = \frac{1}{2}\alpha_{sss} + 2\kappa\alpha_s + \kappa_s\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\kappa_t = \Omega\alpha_s, \quad \Omega = \frac{1}{2}D_s^2 + 2\kappa + \kappa_s D_s^{-1}$$

但し Ω は KdV 方程式:

$$\kappa_t = \frac{1}{2}\kappa_{sss} + 3\kappa\kappa_s$$

の再帰作用素

特に

$$\alpha = D_s^{-1}\Omega^{n-1}\kappa_s \quad (n \in \mathbf{N})$$

のときは n 次 KdV 方程式

等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間

$\mathcal{M}$: 囲む面積が π の等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン平面閉曲線全体

$$\mathcal{M} = \left\{ \gamma : S^1 \to \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix} = 1 \right\} \quad (S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$$

$\gamma \in \mathcal{M}$
連立線形偏微分方程式 $(*)$ より

$$T_\gamma \mathcal{M} = \left\{ -\frac{1}{2}\alpha_s \gamma + \alpha \gamma_s \,\middle|\, \alpha : S^1 \to \mathbf{R} \right\}$$

$X, Y \in T_\gamma \mathcal{M}$

$$\omega_0(X, Y) := \int_{S^1} \det \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ds$$

前シンプレクティック形式

命題

ω_0 は $\mathcal{M}$ 上の前シンプレクティック形式を定める

$\gamma(\cdot, t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ の元の 3 径数族

$$\omega_0: \text{閉形式}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial t_1}\omega_0(\gamma_{t_2}, \gamma_{t_3}) + \frac{\partial}{\partial t_2}\omega_0(\gamma_{t_3}, \gamma_{t_1}) + \frac{\partial}{\partial t_3}\omega_0(\gamma_{t_1}, \gamma_{t_2}) = 0$$

$$X = -\frac{1}{2}\alpha_s\gamma + \alpha\gamma_s, \ \ Y = -\frac{1}{2}\beta_s\gamma + \beta\gamma_s \quad (\alpha, \beta : S^1 \to \mathbf{R})$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_0(X, Y) = \int_{S^1} \alpha\beta_s ds$$

Hamilton 関数

n 次 KdV 方程式:

$$\kappa_t = \Omega^n \kappa_s \quad (\kappa : S^1 \to \mathbf{R})$$

無限個の保存量 $\{H_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ をもつ

$$H_m = \int_{S^1} h_m(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \dots) ds$$

と表すことができる
例えば

$$h_1 = \kappa, \ h_2 = \frac{1}{2}\kappa^2, \ h_3 = \frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{4}\kappa_s^2$$

Hamilton 系による定式化

定理 (cf. U. Pinkall 1995 ($n = 1$), F-T. Kurose 2010)

$n \in \mathbf{N}$: 固定

$$X_n := -\frac{1}{2}(\Omega^{n-1}\kappa_s)\gamma + (D_s^{-1}\Omega^{n-1}\kappa_s)\gamma_s \quad (\gamma \in \mathcal{M})$$

$\Longrightarrow X_n$ は ω_0 に関する H_n に対する Hamilton ベクトル場:

$$dH_n = \omega_0(X_n, \cdot)$$

特に H_n は n 次 KdV 流:

$$\gamma_t = X_n$$

に対する Hamilton 関数

もう1つの前シンプレクティック形式

$X, Y \in T_\gamma \mathcal{M}$

$$\omega_1(X, Y) := \int_{S^1} \det \begin{pmatrix} X \\ (D_s^2 + \kappa)Y \end{pmatrix} ds$$

$$X = -\frac{1}{2}\alpha_s \gamma + \alpha \gamma_s, \ \ Y = -\frac{1}{2}\beta_s \gamma + \beta \gamma_s \quad (\alpha, \beta : S^1 \to \mathbf{R})$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1(X, Y) = \int_{S^1} \alpha \Omega \beta_s ds$$

定理 (F-T. Kurose)

ω_1 は $\mathcal{M}$ 上の前シンプレクティック形式
X_n は ω_1 に関する H_{n+1} に対する Hamilton ベクトル場

Hamilton ベクトル場と Poisson 構造

(M, ω): シンプレクティック多様体
$H \in C^\infty(M)$
X_H: Hamilton ベクトル場
$\{\ ,\ \}$: Poisson 構造

命題

$$X_H = \{\ \cdot\ , H\}$$

証明

$f \in C^\infty(M)$ とすると

$$\begin{aligned} X_H f &= df(X_H) \\ &= \omega(X_f, X_H) \\ &= \{f, H\} \end{aligned}$$

双 Hamilton 構造

双 Hamilton 構造: 2 つの Poisson 構造が存在

$$\{\ ,\ \}_1,\ \{\ ,\ \}_2$$

Hamilton ベクトル場が 2 通りに表される

$$\{\,\cdot\,, H_2\}_1 = \{\,\cdot\,, H_1\}_2$$

両立する Poisson 構造: $\{\ ,\ \}_1 + \{\ ,\ \}_2$ も Poisson 構造

Magri の定理

定理 (F. Magri 1978)

M: 両立する Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_1$, $\{\ ,\ \}_2$ をもつ多様体
$\{\ ,\ \}_1$: 非退化
${}^\exists H_1, H_2 \in C^\infty(M)$ s.t.

$$\{\,\cdot\,, H_2\}_1 = \{\,\cdot\,, H_1\}_2$$

$\Longrightarrow$ ${}^\exists H_i \in C^\infty(M)$ $(i \in \mathbf{N})$ s.t.

$$\{\,\cdot\,, H_{i+1}\}_1 = \{\,\cdot\,, H_i\}_2 \quad ({}^\forall i \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

$$\{H_i, H_j\}_1 = 0,\ \{H_i, H_j\}_2 = 0 \quad ({}^\forall i, j \in \mathbf{N}) \tag{2}$$

H_i は第一積分となる
(2) は (1) から示される

Hamilton 関数の等位集合

$m \in \mathbf{N}$
$C_m := (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbf{R}^m$

$$\mathcal{M}(C_m) := H_1^{-1}(c_1) \cap \cdots \cap H_m^{-1}(c_m)$$

$\mathcal{M}(C_m) \neq \emptyset$ と仮定
$\gamma \in \mathcal{M}(C_m)$

命題

$$T_\gamma \mathcal{M}(C_m) = \left\{ -\frac{1}{2}\alpha_s \gamma + \alpha \gamma_s \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha : S^1 \to \mathbf{R} \\ \int_{S^1} \kappa \Omega^k \alpha_s ds = 0 \\ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \end{array} \right\}$$

等位集合上の前シンプレクティック形式

ω_0, ω_1 を一般化する
$X, Y \in T_\gamma \mathcal{M}$

$$X = -\frac{1}{2}\alpha_s\gamma + \alpha\gamma_s, \ \ Y = -\frac{1}{2}\beta_s\gamma + \beta\gamma_s \quad (\alpha, \beta : S^1 \to \mathbf{R})$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$
$\Omega^k\alpha_s, \Omega^k\beta_s$ が定義できると仮定

$$\omega_k(X, Y) := \int_{S^1} \alpha\Omega^k\beta_s ds$$

定理 (F-T. Kurose)

$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{m+1}$ は $\mathcal{M}(C_m)$ 上の前シンプレクティック形式を定める
各 $k = 0, 1, \ldots, m+1$ に対して X_n は ω_k に関する H_{n+k} に対する Hamilton ベクトル場

鍵となる補題

$p, q, r = 0, 1, 2, \ldots$
$i = 1, 2, 3$
$\Omega^{p+1}\alpha_{is}, \Omega^{q+1}\alpha_{is}, \Omega^{r+1}\alpha_{is}$ が定義できると仮定

$$\begin{aligned} A(p,q,r) := &\int_{S^1} (\Omega^p \alpha_{1s})(D_s^{-1}\Omega^q \alpha_{2s})(\Omega^r \alpha_{3s}) ds \\ &+ \int_{S^1} (\Omega^p \alpha_{2s})(D_s^{-1}\Omega^q \alpha_{3s})(\Omega^r \alpha_{1s}) ds \\ &+ \int_{S^1} (\Omega^p \alpha_{3s})(D_s^{-1}\Omega^q \alpha_{1s})(\Omega^r \alpha_{2s}) ds \end{aligned}$$

補題

$$\begin{aligned} &A(p,q,r+1) + A(q,r,p+1) + A(r,p,q+1) \\ &\quad - A(p+1,q,r) - A(q+1,r,p) - A(r+1,p,q) = 0 \end{aligned}$$

ご清聴ありがとうございました