等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間に付随する多重 Hamilton 構造*

藤岡敦 (関西大学)†

しかるべき空間内の曲線の運動, すなわち曲線の 1 径数族を考えよう. 曲線が運動するに従って曲率などの幾何学的量は時間とともに変化していくとみなすことができるが, 特別な運動に対しては可積分系理論に現れる発展方程式が対応する. 例えば, 平面曲線の特別な運動を考えると, 曲率が変形 KdV 方程式に従うことが知られている. なお, 曲線の運動の歴史については [11] が詳しい他, [1, 2, 3] は可積分系理論に現れる多くの発展方程式が曲線の運動に付随して現れることを示している. また, 曲率が Burgers 方程式に従う複素双曲線上の曲線の運動に関しては今回の話の共同研究者でもある黒瀬俊氏 (関西学院大学) との結果も参照されたい ([4, 5]).

ここでは等積中心アファイン平面曲線の運動を問題にしたい ([6, 7]). 等積中心アファイン平面曲線とは各点において接線が原点を通らないような平面曲線であり, このような曲線に対しては等積中心アファイン曲率という曲率を定義することができる. 等積中心アファイン平面曲線の形は原点を固定する等積アファイン変換, すなわち等積中心アファイン変換の合成を除いて等積中心アファイン曲率により一意的に定まる.

等積中心アファイン平面曲線の特別な運動を考えると, 等積中心アファイン曲率は KdV 方程式に従う. このことを幾何学的に説明する先行結果として, 固定された囲む面積をもつ等積中心アファイン平面閉曲線全体が自然なシンプレクティック形式をもつことを用いて, 全等積中心アファイン曲率の生成する Hamilton 流に沿って等積中心アファイン曲率が KdV 方程式に従うことを Pinkall は示した ([10]). Pinkall の結果は自然に高次の KdV 流, すなわち曲率が高次 KdV 方程式に従うような Hamilton 流へと一般化することができる.

完全積分可能系における多くの第一積分の存在はしばしば双 Hamilton 構造から導かれ, この事実は Magri の定理として知られる ([8, 9]). すなわち, 両立する 2 つの Poisson 構造を用いて Hamilton ベクトル場が 2 通

---

*2012 年 11 月 20 日, 放送大学秋田学習センター, 研究集会「シンプレクティック幾何とその周辺 2012」

†〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35 関西大学システム理工学部数学科
e-mail: afujioka @ kansai-u.ac.jp
http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~afujioka/

りに表されるとき, このことが多くの第一積分の存在を導くのである. なお, 2 つの Poisson 構造が両立するとは Poisson 構造の和が再び Poisson 構造を定めることをいう. 双 Hamilton 系の存在については無限次元完全積分可能系である KdV 方程式も例外ではない.

更に, 上の高次 KdV 流に現れる Hamilton 関数により定まる等位集合を考えると, その上には複数の前シンプレクティック形式が定まることが分かる. すなわち, この等位集合はいわば多重 Hamilton 構造をもつのである.

参考文献

[1] K.-S. Chou and C. Qu, The KdV equation and motion of plane curves, J. Phys. Soc. Japan, **70** (2001), no. 7, 1912–1916.

[2] K.-S. Chou and C. Qu, Integrable equations arising from motions of plane curves, Phys. D, **162** (2002), no. 1–2, 9–33.

[3] K.-S. Chou and C. Qu, Integrable motions of space curves in affine geometry, Chaos Solitons Fractals, **14** (2002), no. 1, 29-44.

[4] A. Fujioka and T. Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, Osaka J. Math., **45** (2008), no. 4, 1057–1065.

[5] A. Fujioka and T. Kurose, Geometry of the space of closed curves in the complex hyperbola, Kyushu J. Math., **63** (2009), no. 1, 161–165.

[6] A. Fujioka and T. Kurose, Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **7** (2010), no. 1, 165–175.

[7] A. Fujioka and T. Kurose, Multi-Hamiltonian structures associated with the space of closed equicentroaffine curves, in preparation.

[8] F. Magri, A simple model of the integrable Hamiltonian equation, J. Math. Phys., **19** (1978), no. 5, 1156–1162.

[9] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Graduate Texts in Mathematics, 107. Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] U. Pinkall, Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves, Results Math., **27** (1995), no. 3–4, 328–332.

[11] C. Rogers and W. K. Schief, Bäcklund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.