等積中心アファイン曲線と多重 Hamilton 構造

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

2013 年 3 月 18 日
若狭町観光ホテル水月花, 若狭三方幾何学研究集会 2013
(黒瀬俊氏（関西学院大学）との共同研究)

内容

背景と主結果

- 曲線の 1 径数族を曲線の運動という
- 曲線が運動すると幾何学的な量が変化する
- 可積分系として知られる発展方程式が現れることがある
- KdV 方程式: 曲線の運動に付随して現れる
- Hamilton 系として定式化できる
- 更に双 Hamilton 構造をもつ
- 1995 U. Pinkall: 等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間を考え無限次元シンプレクティック多様体とみなす
- 全等積中心アファイン曲率により生成される Hamilton 流に沿って等積中心アファイン曲率は KdV 方程式に従う
- 2010 F-T. Kurose: Pinkall の結果を高次の KdV 流の場合へと一般化
- 今回の主結果: 高次 KdV 流に現れる Hamilton 関数による等位集合は多重 Hamilton 構造をもつ

等積中心アファイン平面曲線

定義

I: 区間
$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 平面曲線

$$\gamma\text{: 等積中心アファイン平面曲線} \overset{\text{def}}{\Updownarrow} \text{接線が原点を通らない}$$

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン平面曲線
変数変換すると

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{pmatrix} = 1$$

とすることができる (面積速度一定)
このときのパラメータを等積中心アファイン弧長径数という

等積中心アファイン平面曲線の基本定理

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン平面曲線
等積中心アファイン弧長により径数付けておくと

$$\gamma'' = -\det\begin{pmatrix}\gamma' \\ \gamma''\end{pmatrix}\gamma =: -\kappa\gamma$$

κ: 等積中心アファイン曲率
等積中心アファイン変換: 原点を固定する等積アファイン変換

等積中心アファイン平面曲線の基本定理

$\kappa : I \to \mathbf{R}$
$\Longrightarrow {}^\exists\gamma : I \to \mathbf{R}^2$: 等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン曲率 κ の等積中心アファイン平面曲線
等積中心アファイン変換の合成を除いて一意

等積中心アファイン平面曲線の運動

等積中心アファイン平面曲線の運動を考える:

$$\gamma = \gamma(s, t) : I \times J \to \mathbf{R}^2$$

I, J: 区間
$t \in J$ を固定する毎に $\gamma(\cdot, t)$ は等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン平面曲線
積分可能条件は

$$\kappa_t = \Omega \alpha_s, \quad \Omega = \frac{1}{2} D_s^2 + 2\kappa + \kappa_s D_s^{-1}$$

Ω は KdV 方程式:

$$\kappa_t = \frac{1}{2} \kappa_{sss} + 3\kappa\kappa_s$$

の再帰作用素

等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間

$\mathcal{M}$: 囲む面積が π の等積中心アファイン弧長により径数付けられた等積中心アファイン平面閉曲線全体

$$\mathcal{M} = \left\{ \gamma : S^1 \to \mathbf{R}^2 \middle| \det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma_s \end{pmatrix} = 1 \right\} \quad (S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$$

$\gamma \in \mathcal{M}$

このとき

$$T_\gamma \mathcal{M} = \left\{ -\frac{1}{2}\alpha_s \gamma + \alpha \gamma_s \middle| \alpha : S^1 \to \mathbf{R} \right\}$$

$X, Y \in T_\gamma \mathcal{M}$

$$\omega_0(X, Y) := \int_{S^1} \det \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ds$$

$\Longrightarrow \omega_0$: $\mathcal{M}$ 上の前シンプレクティック形式

Hamilton 関数

n 次 KdV 方程式:

$$\kappa_t = \Omega^n \kappa_s \quad (\kappa : S^1 \to \mathbf{R})$$

無限個の保存量 $\{H_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ をもつ

$$H_m = \int_{S^1} h_m(\kappa, \kappa_s, \kappa_{ss}, \dots) ds$$

と表すことができる
例えば

$$h_1 = \kappa, \ h_2 = \frac{1}{2}\kappa^2, \ h_3 = \frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{4}\kappa_s^2$$

Hamilton 系による定式化

定理 (cf. U. Pinkall 1995 ($n=1$), F-T. Kurose 2010)

$n \in \mathbf{N}$: 固定

$$X_n := -\frac{1}{2}(\Omega^{n-1}\kappa_s)\gamma + (D_s^{-1}\Omega^{n-1}\kappa_s)\gamma_s \quad (\gamma \in \mathcal{M})$$

$\Longrightarrow$ X_n は ω_0 に関する H_n に対する Hamilton ベクトル場:

$$dH_n = \omega_0(X_n, \cdot)$$

特に H_n は n 次 KdV 流:

$$\gamma_t = X_n$$

に対する Hamilton 関数

Hamilton 関数の等位集合

$m \in \mathbf{N}$
$C_m := (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbf{R}^m$

$$\mathcal{M}(C_m) := H_1^{-1}(c_1) \cap \cdots \cap H_m^{-1}(c_m)$$

$\mathcal{M}(C_m) \neq \emptyset$ と仮定
$\gamma \in \mathcal{M}(C_m)$

命題

$$T_\gamma \mathcal{M}(C_m) = \left\{ -\frac{1}{2}\alpha_s \gamma + \alpha \gamma_s \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha : S^1 \to \mathbf{R} \\ \int_{S^1} \kappa \Omega^k \alpha_s ds = 0 \\ (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \end{array} \right\}$$

等位集合上の前シンプレクティック形式

ω_0 を一般化する
$X, Y \in T_\gamma \mathcal{M}$

$$X = -\frac{1}{2}\alpha_s\gamma + \alpha\gamma_s, \ \ Y = -\frac{1}{2}\beta_s\gamma + \beta\gamma_s \quad (\alpha, \beta : S^1 \to \mathbf{R})$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$
$\Omega^k\alpha_s, \Omega^k\beta_s$ が定義できると仮定

$$\omega_k(X, Y) := \int_{S^1} \alpha\Omega^k\beta_s ds$$

定理 (F-T. Kurose)

$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{m+1}$ は $\mathcal{M}(C_m)$ 上の前シンプレクティック形式を定める
各 $k = 0, 1, \ldots, m+1$ に対して X_n は ω_k に関する H_{n+k} に対する Hamilton ベクトル場

鍵となる補題

$p, q, r = 0, 1, 2, \ldots$
$i = 1, 2, 3$
$\Omega^{p+1}\alpha_{is}, \Omega^{q+1}\alpha_{is}, \Omega^{r+1}\alpha_{is}$ が定義できると仮定

$$\begin{aligned} A(p,q,r) := &\int_{S^1} (\Omega^p\alpha_{1s})(D_s^{-1}\Omega^q\alpha_{2s})(\Omega^r\alpha_{3s})ds \\ &+ \int_{S^1} (\Omega^p\alpha_{2s})(D_s^{-1}\Omega^q\alpha_{3s})(\Omega^r\alpha_{1s})ds \\ &+ \int_{S^1} (\Omega^p\alpha_{3s})(D_s^{-1}\Omega^q\alpha_{1s})(\Omega^r\alpha_{2s})ds \end{aligned}$$

補題

$$\begin{aligned} &A(p,q,r+1) + A(q,r,p+1) + A(r,p,q+1) \\ &\quad - A(p+1,q,r) - A(q+1,r,p) - A(r+1,p,q) = 0 \end{aligned}$$

ご清聴ありがとうございました