中心アファイン極小曲面と射影微分幾何

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１３年６月３日（月）
大阪大学, 幾何セミナー

内容

中心アファイン極小超曲面

中心アファイン極小超曲面:

- アファイン空間内の超曲面
- $\underline{\text{中心アファイン微分幾何}}$における対象

$\uparrow$

$\underline{\text{原点を固定するアファイン変換}}$で不変な性質を調べる
(中心アファイン変換)

- 非退化中心アファイン超曲面に対して定義
- 中心アファイン計量の面積積分の停留超曲面

Wang の仕事

- 1994 年 C. P. Wang: 中心アファイン極小超曲面を定義
- 中心アファイン計量が定値な場合に第一変分を計算
- 原点を中心とする固有アファイン超球面を含む
- 第二変分も計算
- 中心アファイン計量が負定値な原点を中心とする固有アファイン超球面は安定
- 原点を中心とする楕円面は不安定

アファイン超球面

アファイン超球面:

- アファイン空間内の超曲面
- 等積アファイン微分幾何における対象
- アファイン型作用素がスカラー作用素
- 固有: アファイン型作用素が零作用素でない
- 固有アファイン球面は 20 世紀初めにまで遡る

定理 (G. Tzitzéica 1908)

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 曲面

K: Euclid Gauss 曲率

d: 原点と接平面の符号付き Euclid 距離 $\neq 0$
(原点からの Euclid 支持関数)

$\Longrightarrow \dfrac{K}{d^4}$ は原点を固定する等積アファイン変換 (等積中心アファイン変換) で不変

S 曲面と Tzitzéica 方程式

- Tzitzéica は $\dfrac{K}{d^4}$ が一定の曲面を S 曲面とよんだ
- $K \neq 0$ の S 曲面は原点を中心とする固有アファイン球面に他ならない
- 例えば不定値の場合は積分可能条件は一般に

$$(\log \psi)_{xy} = -\psi - \frac{1}{\psi^2} \quad \text{(Tzitzéica 方程式)}$$

- 解に対する変換が存在 (Tzitzéica 変換)
- 2000 年 W. Schief: Tzitzéica 変換を中心アファイン極小曲面に対して一般化
  離散化もあたえた

Euclid 微分幾何の復習

Euclid 微分幾何: Euclid 変換で不変な性質を調べる
以下では $\mathbf{R}^3$ 内の曲面について考える

Gauss の公式

$f: D \to \mathbf{R}^3$: 曲面
(x_1, x_2): 局所座標
$\langle\ ,\ \rangle$: $\mathbf{R}^3$ の標準内積
n: 単位法ベクトル場
$\Longrightarrow$ Gauss の公式:

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + \langle f_{x_i x_j}, n\rangle n \quad (i, j = 1, 2) \tag{1}$$

中心アファイン曲面の定義

$\mathbf{R}^3$ をアファイン空間とみなす

定義

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 曲面

f: 中心アファイン曲面

$\Updownarrow$ def.

f: 接平面と横断的に交わる

Gauss の公式

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン曲面

(x_1, x_2): 局所座標

$$f_{x_i x_j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^1 f_{x_1} + \tilde{\Gamma}_{ij}^2 f_{x_2} - h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) f \quad (i, j = 1, 2) \tag{2}$$

中心アファイン計量

対称 $(0,2)$ テンソル h を中心アファイン計量という

定義

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン曲面

$$f\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)} \underset{\text{def.}}{\Updownarrow} h\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$

命題

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン曲面

$$f\text{: 定値 (resp. 不定値)} \Updownarrow \text{Euclid Gauss 曲率: 正 (resp. 負)}$$

命題の証明

証明

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + \langle f_{x_i x_j}, n \rangle n \tag{1}$$

$$f_{x_i x_j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^1 f_{x_1} + \tilde{\Gamma}_{ij}^2 f_{x_2} - h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) f \tag{2}$$

(1), (2) より

$$\langle f_{x_i x_j}, n \rangle = -h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) \langle f, n \rangle$$

記号

不定値の場合を考える

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面

K: Euclid Gauss 曲率 < 0

(x, y): 漸近線座標

$\psi := h(\partial_x, \partial_y)$

d: 原点からの Euclid 支持関数

$$\rho := -\frac{1}{4} \log \left(-\frac{K}{d^4} \right)$$

$$\alpha := \psi \det \begin{pmatrix} f \\ f_x \\ f_{xx} \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} f \\ f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

$$\beta := \psi \det \begin{pmatrix} f \\ f_y \\ f_{yy} \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} f \\ f_y \\ f_x \end{pmatrix}$$

漸近線座標による Gauss の公式

Gauss の公式

$$\begin{cases} f_{xx} = \left(\dfrac{\psi_x}{\psi} + \rho_x\right) f_x + \dfrac{\alpha}{\psi} f_y \\ f_{xy} = -\psi f + \rho_y f_x + \rho_x f_y \\ f_{yy} = \left(\dfrac{\psi_y}{\psi} + \rho_y\right) f_y + \dfrac{\beta}{\psi} f_x \end{cases} \tag{3}$$

証明

$$\Gamma_{xy}^x = -\frac{1}{4}\frac{K_y}{K}, \quad \Gamma_{xy}^y = -\frac{1}{4}\frac{K_x}{K}$$

などを用いる

積分可能条件

命題

Gauss の公式 (3) の積分可能条件は

$$\begin{cases} (\log\psi)_{xy} = -\psi - \dfrac{\alpha\beta}{\psi^2} + \rho_x\rho_y \\ \alpha_y + \rho_x\psi_x = \rho_{xx}\psi \\ \beta_x + \rho_y\psi_y = \rho_{yy}\psi \end{cases}$$

ρ が定数で $\alpha, \beta \neq 0$ のときは座標変換により Tzitzéica 方程式

$$(\log\psi)_{xy} = -\psi - \frac{1}{\psi^2}$$

が得られる

中心アファイン曲率

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
(x, y): 漸近線座標
κ: 中心アファイン計量 h の曲率 (中心アファイン曲率)

$$\kappa = -\frac{(\log \psi)_{xy}}{\psi}$$

$\kappa = 0$ のときは座標変換により $\psi = 1$ としてよい
位相的場の理論における結合性の方程式の 1 つが得られる:

$$g_{xxx}g_{yyy} - g_{xxy}g_{xyy} + 1 = 0 \tag{4}$$

ただし

$$\rho = g_{xy}, \ \alpha = g_{xxx}, \ \beta = g_{yyy}$$

2004 年 E. V. Ferapontov: 平坦な中心アファイン超曲面に対する積分可能条件が結合性の方程式となることを示した

WDVV 方程式

上の g は WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde) 方程式の解に現れる

$F = F(t) = F(t_1, t_2, \dots, t_n)$: 関数

$c_{\alpha\beta\gamma} := \dfrac{\partial^3 F}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n)$

$\eta_{\alpha\beta} := c_{1\alpha\beta}$

n 次正方行列 $(\eta_{\alpha\beta})$ が非退化定数行列とする

$(\eta^{\alpha\beta}) := (\eta_{\alpha\beta})^{-1}$

$c^\gamma_{\alpha\beta} := \eta^{\gamma\varepsilon} c_{\varepsilon\alpha\beta}$

各 t に対して $e_1, e_2, \dots, e_n$ を基底とし積が

$$e_\alpha e_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

によりあたえられる可換代数が結合的であるとする

$\Longrightarrow$ F に対する 3 階の非線形偏微分方程式 (WDVV 方程式)

単位元

命題

e_1 は単位元

証明

$$
\begin{aligned}
c_{1\alpha}^{\beta} &= \eta^{\beta\varepsilon} c_{\varepsilon 1 \alpha} \\
&= \eta^{\beta\varepsilon} c_{1 \varepsilon \alpha} \\
&= \eta^{\beta\varepsilon} \eta_{\varepsilon\alpha} \\
&= \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (\text{Kronecker の } \delta)
\end{aligned}
$$

平坦な中心アファイン曲面の場合

$$F(t) := -\frac{1}{6}t_1^3 + t_1 t_2 t_3 + g(t_2, t_3)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2}t_1^2 + t_2 t_3,\ (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\eta^{\alpha\beta})$$

命題

$x = t_2$, $y = t_3$ とおくと

$$\begin{cases} e_2^2 = g_{xxy} e_2 + g_{xxx} e_3 \\ e_2 e_3 = -e_1 + g_{xyy} e_2 + g_{xxy} e_3 \\ e_3^2 = g_{yyy} e_2 + g_{xyy} e_3 \end{cases}$$

命題

$(e_2^2)e_3 = e_2(e_2 e_3)$ とすると結合性の方程式 (4) がなりたつ

第一変分公式

$f: D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
(x, y): 漸近線座標
D: 有界
$\Phi(x, y, t)$: 不定値中心アファイン曲面の 1 径数族 s.t.

$$\Phi = f + t(\lambda f + \mu f_x + \nu f_y) + o(t) \quad (t \to 0)$$

$$\lambda, \mu, \nu : D \to \mathbf{R}: \partial D \text{ 上で } 0$$

$Adxdy$: Φ の中心アファイン計量の面積要素

第一変分公式

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_D Adxdy = \pm 2 \int_D \rho_{xy} \lambda dxdy$$

右辺の $\pm$ は $\psi = h(\partial_x, \partial_y)$ と異符号
特に

$$f: \text{中心アファイン極小} \iff \rho_{xy} = 0$$

Tchebychev ベクトル場

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
$\tilde{\nabla}$: 中心アファイン曲面 f の誘導する接続
∇^h: 中心アファイン計量 h に対する Levi-Civita 接続
$C := \tilde{\nabla} - \nabla^h$: 差テンソル
$T := \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev ベクトル場

$$h_{ij} := h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}),\ (h^{ij}) := (h_{ij})^{-1},\ C_{ij}^k \partial_{x_k} := C(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$$

$$\mathrm{tr}_h C := h^{ij} C_{ij}^k \partial_{x_k}$$

命題

$$T = \mathrm{grad}_h \rho$$

特に
f: 原点を中心とする固有アファイン球面 $\iff T = 0$

Tchebychev 作用素

$f: D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
∇^h: 中心アファイン計量 h に対する Levi-Civita 接続
T: Tchebychev ベクトル場
$(1,1)$ テンソル $\nabla^h T$ を Tchebychev 作用素という

命題

$$f\text{: 中心アファイン極小} \iff \operatorname{tr} \nabla^h T = 0$$

定値の場合も同様

2次曲面と固有アファイン球面

∘ 2次曲面は中心アファイン極小曲面となる

原点を中心とする楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面

$\Longrightarrow\ T = 0$

原点を頂点とする楕円放物面, 原点を鞍点とする双曲放物面から原点を除いたもの

$\Longrightarrow\ T \neq 0,\ \nabla^h T = 0$

∘ 原点を中心とする固有アファイン球面は $T = 0$ で特徴付けられる中心アファイン極小曲面

平坦な固有アファイン球面

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 原点を中心とする固有アファイン球面
κ: 中心アファイン曲率
以下では必要ならば $f = (X, Y, Z)$ とおく

定理 (cf. M. A. Magid-P. J. Ryan 1990)

原点を中心とする固有アファイン球面で $\kappa = 0$ となるものは中心アファイン合同を除いて次の 2 通り

1: $XYZ = 1$ (負定値)
2: $(X^2 + Y^2)Z = 1$ (不定値)

中心アファイン曲率一定の固有アファイン球面

定理 (cf. U. Simon 1991)

原点を中心とする固有アファイン球面に対して κ が一定

$\Longrightarrow \kappa = 0, 1$

$\kappa = 1$ となるものは中心アファイン合同を除いて次の 3 通り

1: 原点を中心とする楕円面　(正定値)

2: 原点を中心とする二葉双曲面　(負定値)

3: $f = A'(u) + vA(u)$, A は $\det \begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix}$ が 0 でない定数となる $\mathbf{R}^3$ 値関数　(不定値)

Tchebychev 作用素が消える中心アファイン曲面

定理 (H. L. Liu-C. P. Wang 1995)

$\nabla^h T = 0$ となる中心アファイン曲面は中心アファイン合同を除いて上で述べたもの以外に次の 5 通り

1 から 3 では $a, b, c \in \mathbf{R}$ とする

1: $X^a Y^b Z^c = 1,\ abc(a+b+c) \neq 0$

2: $\left\{ \exp\left(-a \tan^{-1} \dfrac{X}{Y} \right) \right\} (X^2 + Y^2)^b Z^c = 1,$
$c(2b+c)(a^2+b^2) \neq 0$

3: $Z = -X(a \log X + b \log Y),\ b(a+b) \neq 0$

4: $Z = \pm X \log X + \dfrac{Y^2}{X}$

5: $f = (e^x, A_1(x)e^y, A_2(x)e^y),\ A_1, A_2$ は任意関数 $a = a(x)$ に対する微分方程式 $A'' - A' - a(x)A = 0$ の 1 次独立な解

結合性の方程式の解

Liu-Wang の定理に挙げた 5 つの例はすべて $\kappa = 0$

命題

$\nabla^h T = 0$ となる平坦な不定値中心アファイン曲面に対する結合性の方程式 (4) の解は次の 1, 2 の何れか

1: $g = \dfrac{\alpha}{6}x^3 + \dfrac{\beta}{6}y^3 + \dfrac{c_1}{2}x^2y + \dfrac{c_2}{2}xy^2$

$+(x$ と y の任意の 2 次式$)$

ただし $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $\alpha\beta - c_1c_2 + 1 = 0$

2: 必要ならば x と y を入れ替えると

$g = \dfrac{c_1}{2}x^2y + \dfrac{c_2}{2}xy^2 + c_3xy$

$+(x$ の任意の関数$) + (y$ の任意の 2 次式$)$

ただし $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$, $c_1c_2 = 1$

Vrancken の仕事

- 中心アファイン極小 $\iff \operatorname{tr}\nabla^h T = 0$
- 基本的な例はすべて $\nabla^h T = 0$
- 2004 年 L. Vrancken: $\nabla^h T \neq 0$ で T が $\nabla^h T$ の固有ベクトルとなる定値中心アファイン極小曲面を調べた
- 1 階の常微分方程式の解を用いて記述される

$$(\alpha')^2 = \alpha^2(\alpha^2 - c_2\alpha^2 - 2c_3\alpha^4 + c_1^2\alpha^6 + c_3^2\alpha^6 - \varepsilon)$$

中心アファイン曲率一定の新しい例

- 2006 年 F: ある 3 次微分にある種の対称性を仮定し κ が一定の中心アファイン極小曲面を分類
- 不定値な場合: 漸近線座標 (x, y) に関して

$$\rho\text{: } x, y \text{ の 1 次式},\ \det\begin{pmatrix} f \\ f_x \\ f_{xx} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} f \\ f_y \\ f_{yy} \end{pmatrix}$$

- 新しい例:

$$f = \left(\frac{e^{x+y}}{x+y}\cos(x-y), \frac{e^{x+y}}{x+y}\sin(x-y), 1 + \frac{1}{x+y}\right)$$

- $\kappa = 1$
- Vrancken が調べた性質をみたす

線織面

- 2009 年 F: $\nabla^h T$ が対角化可能でない中心アファイン極小曲面で κ が一定のものを分類
- 2010 年 F: κ と Pick 不変量が一定の中心アファイン極小曲面を分類
- Pick 不変量:

$$J = \frac{1}{2}\|C\|^2 = \frac{1}{2} h_{kr} h^{ip} h^{jq} C_{ij}^k C_{pq}^r \quad (C\text{: 差テンソル})$$

- 両者ともに $\kappa = 0, 1$ で 2 つの新しい例を得た
- 1 つは線織面:

$$f = A'(u) + vA(u), \ \ A \text{ は } \det \begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix} \text{ が } 0 \text{ でない } \mathbf{R}^3 \text{ 値関数}$$

- $\kappa = 1, \ J = 0$

平坦な例

- もう 1 つは $\kappa = 0$
- $f = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,1}(y) x^n, \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,2}(y) x^n, \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n,3}(y) x^n \right)$

  (x, y): $y_0 \neq 0$ となる $(0, y_0)$ の周りにおける漸近線座標

  $\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \varphi_{0,3}$: 微分方程式

  $$y\varphi''' + \varphi'' - \varphi = 0 \tag{5}$$

  の 1 次独立な解

  $$\varphi_{n+1,i} = -\frac{y}{n+1}\varphi''_{n,i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$
- $J = -1$
- 結合性の方程式 (4) の解は

$$g = \frac{1}{6}x^3 y - \frac{1}{2}y^2 \log y + (x \text{ と } y \text{ の 2 次式})$$

微分方程式の解

微分方程式 (5) の解は Meijer の G 関数を用いて表される

$$\varphi = c_1 G^{2,0}_{0,3}\left(\frac{y^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}\overline{}\\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},0\end{matrix}\right) + ic_2 G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{y^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}\overline{}\\ \frac{1}{2},\frac{1}{2},0\end{matrix}\right) + c_3 G^{1,0}_{0,3}\left(-\frac{y^2}{8}\,\middle|\,\begin{matrix}\overline{}\\ 0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\end{matrix}\right) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R})$$

第 2 項と第 3 項は一般化超幾何関数 ${}_0F_2$ を用いて表される

Meijer の G 関数

- Meijer の G 関数:

$$G^{m,n}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)} z^{-s}ds$$

- $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$, $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$
- $\max\{p, q\}$ 階の線形微分方程式をみたす

$$\left\{(-1)^{p-m-n} z \prod_{j=1}^{p}\left(z\frac{d}{dz} - a_j + 1\right) - \prod_{j=1}^{q}\left(z\frac{d}{dz} - b_j\right)\right\} G = 0$$

射影曲面と Euclid 空間内の曲面

以下は佐々木武 (神戸大学), 古畑仁 (北海道大学) 両氏との共同研究に基づきます

$\mathbf{P}^3$: 3 次元実射影空間
$z : D \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面
(x, y): 局所座標

$$z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)]$$

z は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応する
$z^1 \neq 0$ のとき

$$\hat{z} := \left(\frac{z^2}{z^1}, \frac{z^3}{z^1}, \frac{z^4}{z^1} \right)$$

対称 2 形式

$z : D \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面
(x, y): 局所座標
以下 z_{xy}, z_x, z_y, z は D 上 1 次独立であると仮定する

$$\begin{cases} z_{xx} = lz_{xy} + az_x + bz_y + pz \\ z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz \end{cases}$$

と表しておく

$$\varphi := ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$$

命題

φ は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $\hat{z}$ の第二基本形式と共形的

不定値なものを考えることができる
漸近線座標を選ぶことができる

$$l = m = 0$$

積分可能条件

命題

不定値射影曲面に対する積分可能条件は

$$\begin{cases} L_y = -2bc_x - cb_x \\ M_x = -2cb_y - bc_y \\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} \end{cases}$$

ただし

$$a = \theta_x, \ d = \theta_y$$

$$\begin{cases} L = \theta_{xx} - \dfrac{1}{2}\theta_x^2 - b\theta_y - b_y - 2p \\ M = \theta_{yy} - \dfrac{1}{2}\theta_y^2 - c\theta_x - c_x - 2q \end{cases}$$

正準系

$z : D \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
(x, y): 漸近線座標

$$\begin{cases} z_{xx} = \theta_x z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + \theta_y z_y + q z \end{cases}$$

$\lambda : D \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$z = \lambda w$ とおくと

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_x, \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_x + \lambda w_{xx}.$$

$\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ とすると

$$\begin{cases} z_{xx} = b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + q z \end{cases} \tag{6}$$

としてよい (正準系)

射影計量

正準系 (6) に対して座標変換

$$u = f(x), \ v = g(y)$$

を考える

$C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$z = \dfrac{C}{\sqrt{f'g'}} w$ とおくと正準系

$$\begin{cases} w_{uu} = \bar{b} w_v + \bar{p} w \\ w_{vv} = \bar{c} w_u + \bar{q} w \end{cases}$$

を得る

このとき

$$\bar{b}\bar{c}\,dudv = bc\,dxdy$$

射影計量という

射影極小曲面の定義

射影極小曲面: 射影計量の積分の停留曲面
$z : D \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
正準系:

$$\begin{cases} z_{xx} = bz_y + pz \\ z_{yy} = cz_x + qz \end{cases}$$

命題

$$z\text{: 射影極小}$$

$$\Updownarrow$$

$$bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} = 0$$

ただし

$$L = -b_y - 2p, \ \ M = -c_x - 2q$$

中心アファイン極小曲面の随伴曲面

不定値中心アファイン極小曲面に対する積分可能条件は必要ならば座標変換を行うと

$$\begin{cases} (\log\psi)_{xy} = -\psi - \dfrac{\alpha\beta}{\psi^2} + c_1c_2 \\ \alpha_y + c_1\psi_x = 0 \\ \beta_x + c_2\psi_y = 0 \end{cases}$$

ただし $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

変換

$$\alpha \to \lambda\alpha,\ \beta \to \frac{1}{\lambda}\beta,\ c_1 \to \lambda c_1,\ c_2 \to \frac{1}{\lambda}c_2 \quad (\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

で不変

$\Longrightarrow$ 中心アファイン極小曲面の 1 径数族

随伴曲面

随伴曲面がすべて射影極小となるもの

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン極小曲面
射影曲面とみなす

$$z = [1, f] : D \to \mathbf{P}^3$$

定理 (F-H. Furuhata-T. Sasaki)

随伴曲面がすべて射影極小となる f は次の 1〜3 の何れか

1: Tchebychev 作用素が 0 の曲面

2: 中心アファイン曲率が 1, Pick 不変量が 0 の線織面

$$f = A'(u) + vA(u)$$

3: 中心アファイン曲率が 1 の曲面

$$f_0 = \left(\frac{e^{x+y}}{x+y} \cos(x-y), \frac{e^{x+y}}{x+y} \sin(x-y), 1 + \frac{1}{x+y} \right)$$

の随伴曲面

ご清聴ありがとうございました