射影極小な中心アファイン極小曲面

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１４年１月２６日（日）
国民宿舎　慶野松原荘, 淡路島幾何学研究集会 2014
(佐々木武氏 (神戸大学), 古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

射影極小曲面と中心アファイン極小曲面

射影極小曲面:

- 1920 年代から Thomsen らにより研究
- 3 次元実射影空間内の曲面
- 射影計量の積分の停留曲面
- 超曲面の場合は佐々木氏により研究
- アファイン球面は射影極小曲面

中心アファイン極小曲面:

- 1990 年代に Wang により超曲面に対して定義
- 3 次元アファイン空間内の曲面
- 中心アファイン計量の面積積分の停留曲面
- 固有アファイン球面は中心アファイン極小曲面

問題

$$\{\text{射影極小曲面}\} \cap \{\text{中心アファイン極小曲面}\} = ?$$

射影曲面と対称 2 形式

$\mathbf{P}^3$: 3 次元実射影空間
$z : D \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面
(x, y): 局所座標

$$z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)]$$

$\mathbf{R}^4$ への写像ともみなす
仮定: z_{xy}, z_x, z_y, z は D 上 1 次独立

$$\begin{cases} z_{xx} = l z_{xy} + a z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z \end{cases}$$

と表すことができる
対称 2 形式:

$$\varphi := l dx^2 + 2 dx dy + m dy^2$$

射影曲面と Euclid 空間内の曲面

$z : D \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面

$$z(x,y) = [z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y)]$$

z は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応する

$z^1 \neq 0$ のとき

$$\hat{z} := \left(\frac{z^2}{z^1}, \frac{z^3}{z^1}, \frac{z^4}{z^1} \right)$$

$\varphi = l dx^2 + 2 dx dy + m dy^2$: 対称 2 形式

命題

φ は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $\hat{z}$ の第二基本形式と共形的

不定値なものを考えることができる

漸近線座標を選ぶことができる

$$l = m = 0$$

積分可能条件

命題

不定値射影曲面に対する積分可能条件は

$$\begin{cases} L_y = -2bc_x - cb_x \\ M_x = -2cb_y - bc_y \\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} \end{cases}$$

ただし

$$a = \theta_x,\ d = \theta_y$$

$$\begin{cases} L = \theta_{xx} - \dfrac{1}{2}\theta_x^2 - b\theta_y - b_y - 2p \\ M = \theta_{yy} - \dfrac{1}{2}\theta_y^2 - c\theta_x - c_x - 2q \end{cases}$$

正準系

$z : D \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
(x, y): 漸近線座標

$$\begin{cases} z_{xx} = \theta_x z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + \theta_y z_y + q z \end{cases}$$

$\lambda : D \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$z = \lambda w$ とおくと

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_x, \; z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_x + \lambda w_{xx}$$

$\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ とすると

$$\begin{cases} z_{xx} = b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + q z \end{cases} \qquad (*)$$

としてよい (正準系)

射影計量

正準系 $(*)$ に対して座標変換

$$u = f(x), \ v = g(y)$$

を考える

$C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$z = \dfrac{C}{\sqrt{f'g'}} w$ とおくと正準系

$$\begin{cases} w_{uu} = \bar{b} w_v + \bar{p} w \\ w_{vv} = \bar{c} w_u + \bar{q} w \end{cases}$$

を得る

このとき

$$\bar{b}\bar{c}dudv = bcdxdy$$

射影計量という

射影極小曲面の定義

射影極小曲面: 射影計量の積分の停留曲面
$z : D \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
正準系:

$$\begin{cases} z_{xx} = bz_y + pz \\ z_{yy} = cz_x + qz \end{cases}$$

命題 (G. Thomsen 1928)

$$z\text{: 射影極小}$$

$$\Updownarrow$$

$$bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} = 0$$

ただし

$$L = -b_y - 2p, \ \ M = -c_x - 2q$$

中心アファイン曲面の定義

$\mathbf{R}^3$ をアファイン空間とみなす

定義

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 曲面

$$f\text{: 中心アファイン曲面} \quad \Updownarrow \text{ def.} \quad f\text{: 接平面と横断的に交わる}$$

Gauss の公式

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン曲面

(x_1, x_2): 局所座標

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} - h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) f \quad (i, j = 1, 2)$$

対称 $(0, 2)$ テンソル h を中心アファイン計量という

中心アファイン極小曲面の随伴曲面

不定値中心アファイン極小曲面に対する積分可能条件は

$$\begin{cases} (\log \psi)_{xy} = -\psi - \dfrac{\alpha\beta}{\psi^2} + c_1 c_2 \\ \alpha_y + c_1 \psi_x = 0 \\ \beta_x + c_2 \psi_y = 0 \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表すことができる
変換

$$\alpha \to \lambda\alpha,\ \beta \to \frac{1}{\lambda}\beta,\ c_1 \to \lambda c_1,\ c_2 \to \frac{1}{\lambda}c_2 \quad (\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

で不変
$\Longrightarrow$ 中心アファイン極小曲面の１径数族
随伴曲面

随伴曲面がすべて射影極小となるもの

$f : D \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン極小曲面
射影曲面とみなす

$$z = [1, f] : D \to \mathbf{P}^3$$

定理 (F-H. Furuhata-T. Sasaki)

随伴曲面がすべて射影極小となる f は次の 1〜3 の何れか

1: Tchebychev 作用素が 0 の曲面

2: 中心アファイン曲率が 1, Pick 不変量が 0 の線織面

$$f = A'(u) + vA(u)$$

3: 中心アファイン曲率が 1 の曲面

$$f_0 = \left(\frac{e^{x+y}}{x+y} \cos(x-y), \frac{e^{x+y}}{x+y} \sin(x-y), 1 + \frac{1}{x+y} \right)$$

の随伴曲面

ご清聴ありがとうございました