射影曲面の持ち上げと簡約定理 *

藤岡敦 (関西大学)†

§1. 序

余次元 2 のアファインはめ込みは 2 つの横断的ベクトル場を必要とする. その内の 1 つでよく用いられるものは位置ベクトル場であるが, 関連する文献としては [4, 5, 8] などが挙げられる. このようなはめ込みは余次元 2 の中心アファインはめ込みと呼ばれ, それ自身興味深い対象となりうるが, ここでは射影超曲面が局所的に余次元 2 のアファイン空間へ持ち上げられることに注目し, 射影超曲面と余次元 2 の中心アファインはめ込みとの関連を問題にしたい. そこで, このような観点から比較的話が上手く進むと思われる野水・佐々木 ([6]) による前正規化された Blaschke はめ込みを考え, 特に, 射影曲面の前正規化された Blaschke はめ込みとしての持ち上げに関するある種の簡約定理 ([3]) を紹介したい.

§2. 射影曲面

射影曲面について詳しいことは [2, 7] などを参照されたい. 以下では, 必要最小限の事項のみを述べることにする.

射影曲面とは 2 次元多様体 M から 3 次元実射影空間 $\mathbf{P}^3$ へのはめ込み

$$z : M \to \mathbf{P}^3$$

のことである. M の局所座標を (x, y) とし, $\mathbf{P}^3$ の同次座標を用いると, z は

$$z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)]$$

と表される. 以下では, z を $\mathbf{R}^4$ への写像ともみなし, z_{xy}, z_x, z_y, z が M 上 1 次独立となるようなもののみを考えることにする. このとき, z_{xx}, z_{yy} を z_{xy}, z_x, z_y, z の 1 次結合で

$$\begin{cases} z_{xx} = l z_{xy} + a z_x + b z_y + p z, \\ z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z \end{cases}$$

*2014 年 11 月 1 日, 福岡大学, 福岡大学微分幾何研究会
本研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) No. 26400075 及び平成 26 年度関西大学大学院理工学研究科高度化推進研究費の援助を受けている.
†〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35 関西大学システム理工学部数学科
e-mail: afujioka @ kansai-u.ac.jp
http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~afujioka/

と表すことができる．そこで, 対称 2 形式 ψ を

$$\psi = ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$$

により定める．z は非同次座標を考えることにより, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応する．例えば, $z^1 \neq 0$ のとき,

$$\hat{z} = \left(\frac{z^2}{z^1}, \frac{z^3}{z^1}, \frac{z^4}{z^1}\right)$$

により定まる $\mathbf{R}^3$ への写像 $\hat{z}$ が対応する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面である．このことに注意すると, ψ は次のような意味をもつ.

命題　ψ は z に対応する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の第二基本形式と共形的.

上の命題より, 不定値な射影曲面, すなわち, 対応する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の第二基本形式が不定値となるような射影曲面を考えることができる．第二基本形式が不定値ということは Gauss 曲率が負であるということであるから, 不定値射影曲面に対しては漸近線座標を選ぶことができる．このとき, 上の命題より,

$$l = m = 0$$

である．以下では, 不定値射影曲面を考えることにする.

漸近線座標 (x, y) を選んでおくと, 不定値射影曲面 z は連立偏微分方程式

$$\begin{cases} z_{xx} = az_x + bz_y + pz, \\ z_{yy} = cz_x + dz_y + qz \end{cases}$$

で表され, その積分可能条件は

$$\begin{cases} L_y = -2bc_x - cb_x, \\ M_x = -2cb_y - bc_y, \\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} \end{cases}$$

となる．但し, a 及び d はある関数 θ を用いて

$$a = \theta_x,\ d = \theta_y$$

と表され,

$$\begin{cases} L = \theta_{xx} - \dfrac{1}{2}\theta_x^2 - b\theta_y - b_y - 2p, \\ M = \theta_{yy} - \dfrac{1}{2}\theta_y^2 - c\theta_x - c_x - 2q \end{cases}$$

である.

射影曲面の同次座標の各成分に 0 とならない同じスカラー値関数を掛けても, 射影曲面としては同じものを表すことに注意すると, 上の連立偏微分方程式は正準系と呼ばれる簡単な形で表すことができる. まず, 上で現れた θ を用いると, 不定値射影曲面 z に対する連立偏微分方程式は

$$\begin{cases} z_{xx} = \theta_x z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + \theta_y z_y + q z \end{cases}$$

である. ここで, 0 とならないスカラー値関数 λ を用いて, 射影曲面 w を $z = \lambda w$ により定めると,

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_x, \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_x + \lambda w_{xx}$$

である. よって, $\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ とし, 改めて w を z とおくと, z に対する連立偏微分方程式は始めから

$$\begin{cases} z_{xx} = b z_y + p z, \\ z_{yy} = c z_x + q z \end{cases}$$

であるとしてよい. これが正準系である.

上の正準系に対して, 座標変換

$$u = f(x), \ v = g(y)$$

を考える. λ を 0 とならないスカラー値関数とし, 射影曲面 w を $z = \lambda w$ により定めると,

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_u f', \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_u f' + \lambda w_{uu} (f')^2 + \lambda w_u f''$$

である. よって, $C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して $z = \dfrac{C}{\sqrt{f'g'}} w$ とおくと, w に対する正準系

$$\begin{cases} w_{uu} = \bar{b} w_v + \bar{p} w \\ w_{vv} = \bar{c} w_u + \bar{q} w \end{cases}$$

が得られる. 逆に, 正準系を正準系に移す変換はこのようなものに限られる.

命題　上の b,c,p,q と $\bar{b},\bar{c},\bar{p},\bar{q}$ に対して, 変換則

$$\begin{cases} \bar{b} = b\dfrac{g'}{(f')^2},\ \bar{p} = \dfrac{1}{(f')^2}\left(p - \dfrac{1}{2}b\dfrac{g''}{g'} + \{f;x\}\right), \\ \bar{c} = c\dfrac{f'}{(g')^2},\ \bar{q} = \dfrac{1}{(g')^2}\left(q - \dfrac{1}{2}c\dfrac{f''}{f'} + \{g;y\}\right) \end{cases}$$

がなりたつ．但し, $\{f;x\},\{g;y\}$ はそれぞれ f,g の Schwarz 微分を表す. 例えば,

$$\{f;x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

変換則より, $bcdxdy$ 及び $bdx^3 + cdy^3$ の共形類は射影曲面の不変量となる．これらをそれぞれ射影計量, Darboux 3 次形式という.

例 (2 次曲面)　射影曲面 z の Darboux 3 次形式が消えている場合を考える．正準系において $b = c = 0$ と仮定すると, 積分可能条件より,

$$p_y = 0,\ q_x = 0.$$

よって, p は x のみの関数 $p(x)$, q は y のみの関数 $q(y)$ である．ここで, $f_1(x), f_2(x)$ を 2 階の常微分方程式

$$f_{xx} = p(x)f$$

の 1 次独立な解, $g_1(y), g_2(y)$ を 2 階の常微分方程式

$$g_{yy} = q(y)g$$

の 1 次独立な解とする．このとき, z は

$$w = [f_1g_1, f_1g_2, f_2g_1, f_2g_2]$$

で表される 2 次曲面 w と射影同値となる.

例 (線織面)　射影曲面 z の射影計量が消えている場合を考える．このとき, 正準系において $c = 0$ と仮定してよい．まず, 積分可能条件より,

$$(-b_y - 2p)_y = 0,\ (-2q)_x = 0,\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = 0.$$

第 2 式と変換則および Schwarz 微分の性質より, $q=0$ としてよい. 更に計算すると, z は線織面

$$z = A(x) + yB(x)$$

として表される. 但し, $A(x), B(x)$ は $\mathbf{R}^3$ に値をとる関数である.

§3. アファイン超曲面はめ込み

ここではアファイン超曲面はめ込みに関する必要最小限の事項について述べる. 詳しくは [1] などを参照されたい.

F を n 次元多様体 M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込み, ξ を F に沿うベクトル場とする. 任意の $x \in M$ に対して $\xi(x)$ が $F_* T_x M$ と横断的に交わるとき, 組 (F, ξ) または単に F をアファイン超曲面はめ込みという. このとき, ξ を横断的ベクトル場という.

D を $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準平坦接続とし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする. ただし, $\mathfrak{X}(M)$ は M 上のベクトル場全体の集合である. このとき, 基本方程式は

$$\begin{cases} D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi, \\ D_X \xi = -F_* SX + \tau(X)\xi \end{cases}$$

と表される. ∇, h, S, τ はそれぞれ捩れをもたないアファイン接続, 対称テンソル, $(1,1)$ テンソル, 1 次微分形式を定め, それぞれ誘導接続, アファイン基本形式, アファイン型作用素, 横断的接続形式という.

ω を D に関して平行な体積要素とすると,

$$\theta(X_1, \dots, X_n) = \omega(F_* X_1, \dots, F_* X_n, \xi) \ (X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

により, M の体積要素 θ を定めることができる. θ をはめ込みの誘導する体積要素という. このとき,

$$\nabla_X \theta = \tau(X)\theta \quad (X \in \mathfrak{X}(M))$$

がなりたつ.

h が非退化であるという性質は ξ の選び方に依存しない. このようなアファイン超曲面はめ込みは非退化であるという.

命題　非退化アファイン超曲面はめ込みに対して, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) ξ を選び直すことにより, $\tau = 0$ とすることができる.

(2) ω_h を h に関する体積要素とすると, ξ を選び直すことにより, $\tau = 0$ かつ $\omega_h = \theta$ とすることができる. このときの ξ は符号を除いて一意的である.

上の命題の (1) について, $\tau = 0$ は θ が ∇ に関して平行であるということと同値である. このことから, $\tau = 0$ をみたすはめ込みを等積はめ込みという. 更に, 上の命題の (2) について, $\tau = 0$ かつ $\omega_h = \theta$ をみたすはめ込みを Blaschke はめ込みという.

Euclid 微分幾何では半径一定の球面は型作用素がスカラー作用素となる曲面として特徴付けることができた. そこで, Blaschke はめ込み F に対して, アファイン型作用素 S がスカラー作用素となるとき, F をアファイン超球面という. Euclid 微分幾何と異なり, $S = 0$ となるようなアファイン超球面も存在する. アファイン超球面は $S \neq 0$, $S = 0$ の場合に応じて, それぞれ固有, 非固有であるという.

アファイン超球面の例としては 2 次超曲面が挙げられる. また, 曲面の場合に積分可能条件を考えると, 固有アファイン球面は Tzitzeica 方程式

$$\varphi_{xy} = e^{2\varphi} + e^{-\varphi}$$

などに対応し, 非固有アファイン球面は Liouville 方程式

$$\varphi_{xy} = e^{2\varphi}$$

などに対応する.

射影曲面は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応するので, $\mathbf{P}^3$ 内のアファイン球面を定義することができる. $\mathbf{P}^3$ 内の射影曲面がアファイン球面であるとは, 対応する $\mathbf{R}^3$ 内の曲面としてアファイン球面が選べるときをいう. 不定値射影曲面に対して正準系を考え,

$$z = [e^{\frac{\varphi}{2}}, e^{\frac{\varphi}{2}} F]$$

と表しておく. ただし, φ は実数値関数, F は $\mathbf{R}^3$ への写像である. このとき, 次がなりたつ.

命題 F がアファイン球面であるための必要十分条件は, ある $k \in \mathbf{R}$ が存在し

$$\varphi_{xy} = bc + ke^{-\varphi}$$

がなりたつこと. 更に, F が固有アファイン球面となるのは $k \neq 0$ のとき.

注意　線織面ではない $\mathbf{P}^3$ 内のアファイン球面については, $k \neq 0$ または $k=0$ であるという性質は $\mathbf{R}^3$ 内のアファイン球面への対応の仕方に依存しない. これに対して, 2 次曲面は固有アファイン球面である一葉双曲面にも非固有アファイン球面である双曲放物面にも対応する.

§4. 展開可能曲面

正準系で表された不定値射影曲面 z を考える. z は b, c を保ったまま変形可能であるとき, 展開可能であるという. §2 の例より, 線織面は展開可能である.

z が線織面ではない展開可能曲面であると仮定し, 正準系に現れた p, q がそれぞれ

$$\bar{p} = p + \lambda,\ \bar{q} = q + \mu$$

と変形できるとする. このとき, 積分可能条件より,

$$\lambda_y = 0,\ \mu_x = 0,\ b\mu_y + 2\mu b_y = c\lambda_x + 2\lambda c_x.$$

更に計算すると, λ, μ は高々3 つの径数を用いて表される.

例　線織面ではない展開可能な非固有アファイン球面を考える. このとき,

$$k = 0,\ b = c = e^{\varphi},\ \varphi_{xy} = e^{2\varphi}$$

としてよい. よって,

$$\varphi = \frac{1}{2} \log \frac{f' g'}{(f(x) + g(y))^2}$$

で, 更に計算すると,

$$\begin{cases} \bar{p} = \dfrac{1}{2}\varphi_{xx} + \dfrac{1}{4}\varphi_x^2 - \dfrac{1}{2}\varphi_y e^{\varphi} + \dfrac{c_1 f^2 + c_2 f + c_3}{f'}, \\ \bar{q} = \dfrac{1}{2}\varphi_{yy} + \dfrac{1}{4}\varphi_y^2 - \dfrac{1}{2}\varphi_x e^{\varphi} + \dfrac{c_1 g^2 - c_2 g + c_3}{g'} \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}).$$

特に, 非固有アファイン球面となるのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときである.

例　線織面ではない展開可能な固有アファイン球面を考える. このとき,

$$k \neq 0,\ b = c = e^{\varphi},\ \varphi_{xy} = e^{2\varphi} + k e^{-\varphi}$$

としてよい. よって, 積分可能条件より,

$$\mu_y + 2\mu\varphi_y = \lambda_x + 2\lambda\varphi_x.$$

簡単のため, λ, μ が独立な場合のみを考えると, φ は定数となる. このとき,

$$b = c = 1,\ \varphi = 0$$

としてよい. したがって,

$$\bar{p} = c_1 x + c_2,\ \bar{q} = c_1 y + c_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R})$$

となり, これは一致曲面と呼ばれる射影曲面を表す. 特に, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のとき, 対応する $\mathbf{R}^3$ 内の固有アファイン球面は

$$F = (X, Y, Z),\ (X^2 + Y^2)Z = 1$$

と表される.

§5. 余次元 2 の中心アファインはめ込み

F を n 次元多様体 M から $\mathbf{R}^{n+2}$ へのはめ込みとする. また, η を $\mathbf{R}^{n+2}$ の位置ベクトル場, すなわち,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+2} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

とし, 更に, ξ を F に沿うベクトル場とする. 任意の $x \in M$ に対して, $\eta_{F(x)}$ が $F_* T_x M$ と横断的に交わり, 更に, $\xi(x)$ が $\eta_{F(x)}$ で生成される 1 次元部分空間と $F_* T_x M$ の直和と横断的に交わるとき, 組 (F, ξ, η) または単に F を余次元 2 の中心アファインはめ込みという.

D を $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準平坦接続とし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする. このとき, 基本方程式は

$$\begin{cases} D_X \eta = F_* X \\ D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi + T(X,Y)\eta \\ D_X \xi = -F_* S X + \tau(X)\xi + \rho(X)\eta \end{cases}$$

と表される. ∇, h, S, τ は §3 で述べたアファン超曲面はめ込みに対する同様のもの達と同じ性質をみたし, 更に, T は対称テンソル, ρ は 1 次微分形式を定める.

また, ω を D に関して平行な体積要素とすると,

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(F_* X_1, \ldots, F_* X_n, \xi, \eta)\ (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

により, M の体積要素 θ を定めることができる. このとき,

$$\nabla_X \theta = \tau(X)\theta \quad (X \in \mathfrak{X}(M))$$

がなりたつ.

定理 ([6])　余次元 2 の中心アファインはめ込みについて, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) h の階数が 2 以上のとき, T と h が比例することと $F(M)$ があるアファイン超平面に含まれることとは同値.
(2) $h = 0$ かつ $n \geq 2$ ならば, $F(M)$ は 0 を通るアファイン超平面に含まれる.

上のように, はめ込みの余次元が本質的に簡約される類の定理を簡約定理ということにする.

更に, h が非退化であるという性質は ξ の選び方に依存しない. このような余次元 2 の中心アファインはめ込みは非退化であるという.

命題 ([6])　余次元 2 の非退化中心アファイン超曲面はめ込みに対して, 次の (1)∼(3) がなりたつ.
(1) ξ を選び直すことにより, $\tau = 0$ とすることができる.
(2) ω_h を h に関する体積要素とすると, ξ を選び直すことにより, $\tau = 0$ かつ $\omega_h = \theta$ とすることができる. このときの ξ は η 方向と符号を除いて一意的である.
(3) ξ を選び直すことにより, $\tau = 0$ かつ $\omega_h = \theta$ かつ

$$\mathrm{tr}_h((X, Y) \mapsto T(X, Y) + h(SX, Y)) = 0$$

とすることができる. このときの ξ は符号を除いて一意的である.

上の命題において, (1)∼(3) のように ξ を選んだはめ込みをそれぞれ等積はめ込み, Blaschke はめ込み, 前正規化された Blaschke はめ込みという.

§6. 簡約定理

最後に, 我々の得た簡約定理について述べる.

z を不定値射影曲面とする. このとき, z を前正規化された Blaschke はめ込み F として局所的に持ち上げることができる. §5 のように定まるアファイン接続 ∇ に関する Ricci テンソル Ric 及び対称テンソル h を用いて, Einstein 条件

$$\mathrm{Ric} = kh \quad (k \in \mathbf{R})$$

を考えると, 次がなりたつ.

定理 ([3])　F が Einstein 条件をみたすことと z がアファイン球面またはアファイン球面に展開可能な曲面であることとは同値. このとき, アファイン球面の前正規化された Blaschke はめ込みによる像は 0 を通らないアファイン平面に含まれ, $k \neq 0$, $k = 0$ の場合に応じて, それぞれ $\mathbf{R}^3$ 内の固有アファイン球面, 非固有アファイン球面とみなすことができる.

参考文献

[1] 野水克己・佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

[2] E. V. Ferapontov, Integrable systems in projective differential geometry. Kyushu J. Math. **54** (2000), no. 1, 183–215.

[3] A. Fujioka, H. Furuhata and T. Sasaki, Projective surfaces and pre-normalized Blaschke immersions of codimension two, in preparation.

[4] H.-L. Liu, Indefinite equi-centroaffinely homogeneous surfaces with vanishing Pick-invariant in $\mathbf{R}^4$. Hokkaido Math. J. **26** (1997), no. 1, 225–251.

[5] A. M. Lopšic, On the theory of a surface of n dimensions in an equi-centroaffine space of $n+2$ dimensions. (Russian) Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analizu. **8** (1950), 286–295.

[6] K. Nomizu and T. Sasaki, Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory. Nagoya Math. J. **132** (1993), 63–90.

[7] T. Sasaki, Line congruence and transformation of projective surfaces. Kyushu J. Math. **60** (2006), no. 1, 101–243.

[8] R. Walter, Centroaffine differential geometry: submanifolds of codimension 2. Results Math. **13** (1988), 386-402.