射影曲面と余次元２の中心アファインはめ込み

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１５年１月２５日（日）
国民宿舎　慶野松原荘, 淡路島幾何学研究集会 2015
(佐々木武氏 (神戸大学), 古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

射影超曲面と余次元 2 の中心アファインはめ込み

射影超曲面: $(n+1)$ 次元実射影空間内の n 次元部分多様体
$\rightsquigarrow$ 局所的に $(n+2)$ 次元アファイン空間へ持ち上げる
$\rightsquigarrow$ $\underline{\text{余次元 2 の中心アファインはめ込み}}$を考える

$$\rotatebox{90}{$\leftrightsquigarrow$}$$

- ∘ 原点を固定しておく
- ∘ 横断的ベクトル場の 1 つは位置ベクトル場
- ∘ もう 1 つは?
  - 「前正規化された」横断的ベクトル場を用いる (K. Nomizu-T. Sasaki 1993)

問題

射影超曲面

$$\rotatebox{90}{$\leftrightsquigarrow$}\ ?$$

余次元 2 の中心アファインはめ込み

射影曲面と対称 2 形式

$\mathbf{P}^3$: 3 次元実射影空間
$z : M \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面
(x, y): 局所座標

$$z(x,y) = [z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y)]$$

$\mathbf{R}^4$ への写像ともみなす
仮定: z_{xy}, z_x, z_y, z は M 上 1 次独立

$$\begin{cases} z_{xx} = lz_{xy} + az_x + bz_y + pz \\ z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz \end{cases}$$

と表すことができる
対称 2 形式:

$$\psi := ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$$

射影曲面と Euclid 空間内の曲面

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面

$$z(x,y) = [z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y)]$$

$\psi = ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$: 対称 2 形式
z は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応する
$z^1 \neq 0$ のとき

$$\hat{z} := \left(\frac{z^2}{z^1}, \frac{z^3}{z^1}, \frac{z^4}{z^1} \right)$$

命題

ψ は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $\hat{z}$ の第二基本形式と共形的

$\rightsquigarrow$ 不定値なものを考えることができる
$\rightsquigarrow$ 漸近線座標を選ぶことができる:

$$l = m = 0$$

正準系

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
(x, y): 漸近線座標
積分可能条件を考えると

$$\begin{cases} z_{xx} = \theta_x z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + \theta_y z_y + q z \end{cases} \quad ({}^{\exists}\theta : M \to \mathbf{R})$$

$\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$z = \lambda w$ とおくと

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_x, \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_x + \lambda w_{xx}$$

$\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ とすると

$$\begin{cases} z_{xx} = b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + q z \end{cases}$$

としてよい (正準系)

射影計量, Darboux 3 次形式

命題

○ $bcdxdy$ は不変量 (射影計量)

○ bdx^3+cdy^3 の共形類は不変量 (Darboux 3 次形式)

○ $b=c=0$ と仮定する
積分可能条件より

$$p_y=0,\ \ q_x=0$$

$f_1(x), f_2(x)$: $f_{xx}=p(x)f$ の 1 次独立な解
$g_1(y), g_2(y)$: $g_{yy}=q(y)g$ の 1 次独立な解

$$\Longrightarrow \quad z=[f_1g_1, f_1g_2, f_2g_1, f_2g_2] \quad (2\text{ 次曲面})$$

○ $c=0$ と仮定する
積分可能条件および変換則より $q=0$ としてよい

$$\Longrightarrow \quad z=A(x)+yB(x) \quad (\text{線織面})$$

展開可能曲面, アファイン球面

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面

○ 展開可能曲面

正準系で表しておく

$$z\text{: 展開可能}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$z\text{: } b, c \text{ を保ったまま変形可能}$$

線織面: 展開可能

線織面ではないもの: 高々3 つの径数を用いて表される

○ 射影空間内のアファイン球面

$$z\text{: アファイン球面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^{\exists}\text{ アファイン球面に対応する } \mathbf{R}^3 \text{ 内の曲面}$$

基本方程式

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+2}$: 余次元 2 の中心アファインはめ込み

$\eta := \sum_{i=1}^{n+2} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (位置ベクトル場)

$$^\forall x \in M,\ \eta_{F(x)} \pitchfork F_* T_x M$$

ξ: F に沿うベクトル場 s.t.

$$^\forall x \in M,\ \xi(x) \pitchfork \left(\langle \eta_{F(x)} \rangle_{\mathbf{R}} \oplus F_* T_x M\right)$$

D: $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準平坦接続

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$\Longrightarrow$ 基本方程式:

$$\begin{cases} D_X \eta = F_* X \\ D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi + T(X, Y)\eta \\ D_X \xi = -F_* SX + \tau(X)\xi + \rho(X)\eta \end{cases}$$

基本的な性質

命題

- ○ ∇ は捩れをもたないアファイン接続
- ○ h, T は対称テンソル
- ○ ω: D に関して平行な体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) := \omega(F_* X_1, \ldots, F_* X_n, \xi, \eta)$$
$$(X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

$\Longrightarrow \ \nabla_X \theta = \tau(X)\theta$

定理 (K. Nomizu-T. Sasaki 1993)

- ○ $\operatorname{rank} h \geq 2$

$$T = {}^{\exists}\lambda h \iff F(M) \subset {}^{\exists} \text{アファイン超平面}$$

- ○ $h \equiv 0$, $n \geq 2$

$\Longrightarrow F(M) \subset {}^{\exists}\, 0$ を通るアファイン超平面

等積はめ込み, Blaschke はめ込み, 前正規化

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+2}$: 余次元 2 の中心アファインはめ込み

$$\begin{cases} D_X\eta = F_*X \\ D_X F_* Y = F_*\nabla_X Y + h(X,Y)\xi + T(X,Y)\eta \\ D_X\xi = -F_*SX + \tau(X)\xi + \rho(X)\eta \end{cases}$$

命題

h は非退化であると仮定する (ξ の選び方に依存しない)

○ $^\exists\xi$ s.t. (i): $\tau = 0$ (等積はめ込み)

○ ω_h: h に関する体積要素

$\Longrightarrow$ $^\exists\xi$ s.t. (i) かつ (ii): $\omega_h = \theta$ (Blaschke はめ込み)

(η 方向と符号を除いて一意)

○ $^\exists\xi$ s.t. (i), (ii) かつ $\mathrm{tr}_h((X,Y) \mapsto T(X,Y) + h(SX,Y)) = 0$

(前正規化された Blaschke はめ込み)

(符号を除いて一意)

主結果

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
$F : M \to \mathbf{R}^4$: 前正規化された Blaschke はめ込みとしての z の持ち上げ
Ric: ∇ に関する Ricci テンソル
次の Einstein 条件を考える:

$$\mathrm{Ric} = kh \quad (k \in \mathbf{R})$$

定理 (F.-H. Furuhata-T. Sasaki)

F: Einstein 条件をみたす

$$\Updownarrow$$

z: アファイン球面またはアファイン球面に展開可能

アファイン球面の前正規化された Blaschke はめ込みによる像は 0 を通らないアファイン平面に含まれる

ご清聴ありがとうございました