射影曲面と余次元2の前正規化された Blaschke はめ込み

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１５年６月２３日（火）
数理解析研究所, RIMS 研究集会　部分多様体論と種々の幾何構造
(佐々木武氏 (神戸大学), 古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

射影超曲面と余次元 2 の中心アファインはめ込み

射影超曲面: $(n+1)$ 次元実射影空間内の n 次元部分多様体
$\rightsquigarrow$ 局所的に $(n+2)$ 次元アファイン空間へ持ち上げる
$\rightsquigarrow$ $\underline{\text{余次元 2 の中心アファインはめ込み}}$を考える

$\Updownarrow$

- ◦ 原点を固定しておく
- ◦ 横断的ベクトル場の 1 つは位置ベクトル場
- ◦ もう 1 つは?
  - 「前正規化された」横断的ベクトル場を用いる (K. Nomizu-T. Sasaki 1993)

問題

射影超曲面

$\Updownarrow$?

余次元 2 の中心アファインはめ込み

射影曲面と対称 2 形式

$\mathbf{P}^3$: 3 次元実射影空間
$z : M \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面
(x, y): 局所座標

$$z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)]$$

$\mathbf{R}^4$ への写像ともみなす
仮定: z_{xy}, z_x, z_y, z は M 上 1 次独立

$$\begin{cases} z_{xx} = lz_{xy} + az_x + bz_y + pz \\ z_{yy} = mz_{xy} + cz_x + dz_y + qz \end{cases}$$

と表すことができる
対称 2 形式:

$$\psi := l dx^2 + 2dxdy + m dy^2$$

射影曲面と Euclid 空間内の曲面

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 射影曲面

$$z(x, y) = [z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y)]$$

$\psi = ldx^2 + 2dxdy + mdy^2$: 対称 2 形式
z は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と対応する
$z^1 \neq 0$ のとき

$$\hat{z} := \left(\frac{z^2}{z^1}, \frac{z^3}{z^1}, \frac{z^4}{z^1}\right)$$

命題

ψ は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 $\hat{z}$ の第二基本形式と共形的

命題の証明

証明

次の場合を考える:

$$z = [\lambda, \lambda F],\ \lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\},\ F : M \to \mathbf{R}^3$$

z_{xx} に対する式より

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{xx}, \lambda_{xx} F + 2\lambda_x F_x + \lambda F_{xx}) \\
&\quad = l(\lambda_{xy}, \lambda_{xy} F + \lambda_x F_y + \lambda_y F_x + \lambda F_{xy}) + a(\lambda_x, \lambda_x F + \lambda F_x) \\
&\qquad + b(\lambda_y, \lambda_y F + \lambda F_y) + p(\lambda, \lambda F)
\end{aligned}$$

よって

$$2\lambda_x F_x + \lambda F_{xx} = l(\lambda_x F_y + \lambda_y F_x + \lambda F_{xy}) + a\lambda F_x + b\lambda F_y$$

命題の証明 (続き)

証明 (続き)

$\lambda \neq 0$ だから

$$\det \begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} = l \det \begin{pmatrix} F_{xy} \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

z_{yy} に対する式についても同様に計算する

一方 $\hat{z}$ の第二基本形式の $\|F_x \times F_y\|$ 倍は

$$\det \begin{pmatrix} F_{xx} \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} dx^2 + 2 \det \begin{pmatrix} F_{xy} \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} dxdy + \det \begin{pmatrix} F_{yy} \\ F_x \\ F_y \end{pmatrix} dy^2$$

$\rightsquigarrow$ 不定値なものを考えることができる

$\rightsquigarrow$ 漸近線座標を選ぶことができる: $l = m = 0$

積分可能条件

命題

不定値射影曲面に対する積分可能条件は

$$\begin{cases} L_y = -2bc_x - cb_x \\ M_x = -2cb_y - bc_y \\ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = cL_x + 2Lc_x + c_{xxx} \end{cases}$$

ただし

$$^{\exists}\theta \text{ s.t. } a = \theta_x, \ d = \theta_y$$

$$\begin{cases} L = \theta_{xx} - \dfrac{1}{2}\theta_x^2 - b\theta_y - b_y - 2p \\ M = \theta_{yy} - \dfrac{1}{2}\theta_y^2 - c\theta_x - c_x - 2q \end{cases}$$

正準系

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
(x, y): 漸近線座標

$$\begin{cases} z_{xx} = \theta_x z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + \theta_y z_y + q z \end{cases}$$

$\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$z = \lambda w$ とおくと

$$z_x = \lambda_x w + \lambda w_x, \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_x + \lambda w_{xx}$$

$\lambda = e^{\frac{\theta}{2}}$ とすると

$$\begin{cases} z_{xx} = b z_y + p z \\ z_{yy} = c z_x + q z \end{cases}$$

としてよい (正準系)

座標変換

正準系に対して座標変換

$$u = f(x), \ v = g(y)$$

を考える

$\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$z = \lambda w$ とおくと

$z_x = \lambda_x w + \lambda w_u f', \ z_{xx} = \lambda_{xx} w + 2\lambda_x w_u f' + \lambda w_{uu} (f')^2 + \lambda w_u f''$

$C \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$z = \dfrac{C}{\sqrt{f' g'}} w$ とおくと正準系

$$\begin{cases} w_{uu} = \bar{b} w_v + \bar{p} w \\ w_{vv} = \bar{c} w_u + \bar{q} w \end{cases}$$

を得る

変換則, 射影計量, Darboux 3 次形式

命題

$$\bar{b} = b\frac{g'}{(f')^2}, \ \bar{p} = \frac{1}{(f')^2}\left(p - \frac{1}{2}b\frac{g''}{g'} + \{f;x\}\right)$$

$$\bar{c} = c\frac{f'}{(g')^2}, \ \bar{q} = \frac{1}{(g')^2}\left(q - \frac{1}{2}c\frac{f''}{f'} + \{g;y\}\right)$$

ただし $\{f;x\}, \{g;y\}$ はそれぞれ f, g の Schwarz 微分:

$$\{f;x\} := \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

系

- $bcdxdy$ は不変量 (射影計量)
- $bdx^3 + cdy^3$ の共形類は不変量 (Darboux 3 次形式)

Darboux 3 次形式, 射影計量が消える場合

◦ $b = c = 0$ と仮定する
積分可能条件より

$$p_y = 0, \ \ q_x = 0$$

$f_1(x), f_2(x)$: $f_{xx} = p(x)f$ の 1 次独立な解
$g_1(y), g_2(y)$: $g_{yy} = q(y)g$ の 1 次独立な解
このとき

$$z = [f_1 g_1, f_1 g_2, f_2 g_1, f_2 g_2] \quad (2\text{ 次曲面})$$

◦ $c = 0$ と仮定する
積分可能条件より

$$(-b_y - 2p)_y = 0, \ \ (-2q)_x = 0, \ \ bM_y + 2Mb_y + b_{yyy} = 0$$

変換則より $q = 0$ としてよい
更に計算すると

$$z = A(x) + yB(x) \quad (\text{線織面})$$

Gauss-Weingarten の公式

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面はめ込み
ξ: F に沿うベクトル場

$$(F, \xi)\text{: アファイン超曲面はめ込み}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^{\forall} x \in M,\ \xi(x) \pitchfork F_* T_x M$$

D: $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準平坦接続
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi \\ D_X \xi = -F_* SX + \tau(X)\xi \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \xi\text{: 横断的ベクトル場, } \nabla\text{: 誘導接続, } h\text{: アファイン基本形式} \\ S\text{: アファイン型作用素, } \tau\text{: 横断的接続形式} \end{array}\right)$$

基本的性質, 等積はめ込み, Blaschke はめ込み

命題

- ∇ は捩れをもたないアファイン接続
- h は対称テンソル
- ω: D に関して平行な体積要素

  θ: はめ込みの誘導する体積要素

  $\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(F_* X_1, \ldots, F_* X_n, \xi)$ $(X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$

  $\Longrightarrow$ $\nabla_X \theta = \tau(X)\theta$

命題

h は非退化であると仮定する (ξ の選び方に依存しない)

- ${}^\exists \xi$ s.t. $\tau = 0$ (等積はめ込み)
- ω_h: h に関する体積要素

  $\Longrightarrow$ ${}^\exists \xi$ s.t. $\tau = 0$ かつ $\theta = \omega_h$ (Blaschke はめ込み)

  (符号を除いて一意)

アファイン超球面

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke はめ込み
S: アファイン型作用素

$$F\text{: アファイン超球面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$S\text{: スカラー作用素}$$

◦ $S \neq 0$ のとき固有, $S = 0$ のとき非固有
◦ 2 次超曲面はアファイン超球面
◦ 固有アファイン球面: Tzitzéica 方程式などに対応

$$\varphi_{xy} = e^{2\varphi} + e^{-\varphi}$$

◦ 非固有アファイン球面: Liouville 方程式などに対応

$$\varphi_{xy} = e^{2\varphi}$$

射影空間内のアファイン球面

$z: M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面

$$z\text{: アファイン球面} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\text{アファイン球面に対応する } \mathbf{R}^3 \text{ 内の曲面}$$

正準系を考える

$$\begin{cases} z_{xx} = bz_y + pz \\ z_{yy} = cz_x + qz \end{cases}$$

$$z = [e^{\frac{\varphi}{2}}, e^{\frac{\varphi}{2}} F] \quad (\varphi : M \to \mathbf{R},\ F : M \to \mathbf{R}^3)$$

命題

z: アファイン球面 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}k \in \mathbf{R}$ s.t. $b_y = b\varphi_y$, $c_x = c\varphi_x$, $\varphi_{xy} = bc + ke^{-\varphi}$

特に

$$F\text{: 固有アファイン球面} \Longleftrightarrow k \neq 0$$

展開可能性

$z, w : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面

$$w\text{: } z \text{ に展開可能}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$w\text{: } z \text{ と同じ } b, c \text{ をもつ正準系で表される}$$

線織面は非自明に展開可能 (展開可能曲面)
z が線織面ではない展開可能曲面であると仮定する
p, q がそれぞれ

$$\bar{p} = p + \lambda, \ \ \bar{q} = q + \mu$$

と変形できるとする
積分可能条件より

$$\lambda_y = 0, \ \ \mu_x = 0, \ \ b\mu_y + 2\mu b_y = c\lambda_x + 2\lambda c_x$$

λ, μ は高々3 つの径数を用いて表されることが分かる

非固有アファイン球面の場合

線織面ではない場合は $k=0$ または $k \neq 0$ は不変
線織面ではない展開可能な非固有アファイン球面を考える

$$k=0,\ b=c=e^{\varphi},\ \varphi_{xy}=e^{2\varphi}$$

としてよい
このとき

$$\varphi=\frac{1}{2}\log\frac{f'g'}{(f(x)+g(y))^2}$$

更に計算すると

$$\begin{cases} \bar{p}=\dfrac{1}{2}\varphi_{xx}+\dfrac{1}{4}\varphi_x^2-\dfrac{1}{2}\varphi_y e^{\varphi}+\dfrac{c_1 f^2+c_2 f+c_3}{f'} \\ \bar{q}=\dfrac{1}{2}\varphi_{yy}+\dfrac{1}{4}\varphi_y^2-\dfrac{1}{2}\varphi_x e^{\varphi}+\dfrac{c_1 g^2-c_2 g+c_3}{g'} \end{cases}$$

$$(c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R})$$

非固有アファイン球面となるのは $c_1=c_2=c_3=0$ のとき

固有アファイン球面の場合

線織面ではない展開可能な固有アファイン球面を考える

$$k \neq 0,\ b = c = e^{\varphi},\ \varphi_{xy} = e^{2\varphi} + ke^{-\varphi}$$

としてよい

このとき

$$\mu_y + 2\mu\varphi_y = \lambda_x + 2\lambda\varphi_x$$

簡単のため λ, μ が独立な場合を考える

φ は定数となることが分かる

$$b = c = 1,\ \varphi = 0$$

としてよい

このとき

$$\bar{p} = c_1 x + c_2,\ \bar{q} = c_1 y + c_3 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}) \quad (\text{一致曲面})$$

特に $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のとき

$$F = (X, Y, Z),\ (X^2 + Y^2)Z = 1$$

はめ込みに対する公式

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+2}$: 余次元 2 の中心アファインはめ込み

$$\eta := \sum_{i=1}^{n+2} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ (位置ベクトル場)}$$

$$^\forall x \in M, \ \eta_{F(x)} \pitchfork F_* T_x M$$

ξ: F に沿うベクトル場 s.t.

$$^\forall x \in M, \ \xi(x) \pitchfork \left(\langle \eta_{F(x)} \rangle_{\mathbf{R}} \oplus F_* T_x M \right)$$

D: $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準平坦接続

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} D_X \eta = F_* X \\ D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi + T(X, Y)\eta \\ D_X \xi = -F_* SX + \tau(X)\xi + \rho(X)\eta \end{cases} \qquad (*)$$

基本的性質

命題

- ∇ は捩れをもたないアファイン接続
- h, T は対称テンソル
- ω: D に関して平行な体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) := \omega(F_* X_1, \ldots, F_* X_n, \xi, \eta) \quad (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla_X \theta = \tau(X)\theta$$

定理 (K. Nomizu-T. Sasaki 1993)

- $\operatorname{rank} h \geq 2$

$$T = {}^{\exists}\lambda h \iff F(M) \subset {}^{\exists} \text{アファイン超平面}$$

- $h \equiv 0$, $n \geq 2$

$\Longrightarrow F(M) \subset {}^{\exists}\, 0$ を通るアファイン超平面

等積はめ込み, Blaschke はめ込み, 前正規化

$F : M^n \to \mathbf{R}^{n+2}$: 余次元 2 の中心アファインはめ込み

$$\begin{cases} D_X \eta = F_* X \\ D_X F_* Y = F_* \nabla_X Y + h(X,Y)\xi + T(X,Y)\eta \\ D_X \xi = -F_* SX + \tau(X)\xi + \rho(X)\eta \end{cases} \qquad (*)$$

命題

h は非退化であると仮定する (ξ の選び方に依存しない)

○ $^\exists \xi$ s.t. (i): $\tau = 0$ (等積はめ込み)

○ ω_h: h に関する体積要素
$\Longrightarrow$ $^\exists \xi$ s.t. (i) かつ (ii): $\theta = \omega_h$ (Blaschke はめ込み)
(η 方向と符号を除いて一意)

○ $^\exists \xi$ s.t. (i), (ii) かつ $\mathrm{tr}_h((X,Y) \mapsto T(X,Y) + h(SX,Y)) = 0$
(前正規化された Blaschke はめ込み)
(符号を除いて一意)

$\mathbf{P}^2$ 内の正則曲線:

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), z_3(t)], \ \left|z, z', z''\right| := \begin{vmatrix} z_1 & z_1' & z_1'' \\ z_2 & z_2' & z_2'' \\ z_3 & z_3' & z_3'' \end{vmatrix} \neq 0$$

z は線形常微分方程式

$$z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0$$

をみたす

$\xi = z''$ とする

$(*)$ の第 2 式より

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = 0, \ h\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) = 1, \ T\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) = 0$$

また

$$\xi' = -p_2 z' - p_1 \xi - p_3 z$$

$(*)$ の第 3 式より

$$S\left(\frac{d}{dt}\right) = p_2, \ \tau\left(\frac{d}{dt}\right) = -p_1, \ \rho\left(\frac{d}{dt}\right) = -p_3$$

ここで

$$\omega_h\left(\frac{d}{dt}\right) = 1$$

一方

$$\theta\left(\frac{d}{dt}\right) = \left|z', \xi, z\right| = \left|z, z', z''\right|$$

平面曲線の持ち上げの場合

Laguerre-Forsyth の標準形

さらに

$$T\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) + h\left(S\left(\frac{d}{dt}\right), \frac{d}{dt}\right) = p_2$$

よって

$$\mathrm{tr}_h\left\{(X, Y) \mapsto T(X, Y) + h(SX, Y)\right\} = p_2$$

したがって

$$\tau = 0,\ \omega_h = \theta,\ \mathrm{tr}_h\left\{(X, Y) \mapsto T(X, Y) + h(SX, Y)\right\} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$z''' + p_3 z = 0,\ \left|z, z', z''\right| = 1$$

第 1 式は Laguerre-Forsyth の標準形

主定理

$z : M \to \mathbf{P}^3$: 不定値射影曲面
$F : M \to \mathbf{R}^4$: 前正規化された Blaschke はめ込みとしての z の持ち上げ
Ric: ∇ に関する Ricci テンソル
次の Einstein 条件を考える:

$$\mathrm{Ric} = kh \quad (k \in \mathbf{R})$$

定理 (F.-H. Furuhata-T. Sasaki)

F: Einstein 条件をみたす

$$\Updownarrow$$

z: アファイン球面に展開可能

ご清聴ありがとうございました