中心アファイン曲面の３次形式

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１７年１月２７日（金）
国民宿舎　慶野松原荘, 淡路島幾何学研究集会 2017
(濱本久二雄氏 (関西大学), 中井康允氏 (西宮北高等学校) との共同研究)

内容

背景

- 3 次形式: アファイン超曲面に対する不変量の 1 つ
- 等積アファイン微分幾何の場合
  - Maschke-Pick-Berwald の定理: 3 次形式が消える Blaschke 超曲面は 2 次超曲面
  - 1989 Nomizu-Pinkall: 3 次形式が消えず誘導接続に関して平行な Blaschke 曲面は Cayley 曲面
- Cayley 曲面: $z = xy - \dfrac{1}{3}x^3$ で表されるグラフ
  - 3 次多項式のグラフ
  - 線織面
  - 等積的に等質
  - 非固有アファイン球面

目標

目標

基本的な中心アファイン曲面を 3 次形式を用いて特徴付ける

- 基本的な中心アファイン曲面
  - 2 次曲面
  - 次のように表される線織面:

$$f(x, y) = A'(x) + yA(x)$$

ただし A は $\det\begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix}$ が 0 でない $\mathbf{R}^3$ 値関数

  - 中心アファイン計量の曲率が 1
  - Pick 関数が消える
  - 中心アファイン極小
  - 射影極小

Gauss-Weingarten の公式

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面
ξ: f に沿うベクトル場

$$(f, \xi)\text{: アファイン超曲面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^\forall x \in M,\ \xi(x) \pitchfork f_* T_x M$$

D: $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準平坦接続
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi \\ D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \xi\text{: 横断的ベクトル場},\ \nabla\text{: 誘導接続},\ h\text{: アファイン基本形式} \\ S\text{: アファイン型作用素},\ \tau\text{: 横断的接続形式} \end{array} \right)$$

3 次形式

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
∇: 誘導接続
h: アファイン基本形式
τ: 横断的接続形式
$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Codazzi の方程式

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z)$$

3 次形式:

$$C(X, Y, Z) := (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z)$$

対称 (0, 3) テンソルとなる

Blaschke 超曲面の定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
ω: 標準平坦接続 D に関して平行な体積要素
θ: はめ込み f の誘導する体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_n, \xi) \ (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

$$\Longrightarrow \ \nabla_X \theta = \tau(X)\theta$$

命題

h は非退化であると仮定する (ξ の選び方に依存しない)
$\circ$ $^\exists \xi$ s.t. $\tau = 0$ (等積条件)
$\circ$ ω_h: h に関する体積要素
$\Longrightarrow$ $^\exists \xi$ s.t. $\tau = 0$ かつ $\theta = \omega_h$ (符号を除いて一意)
(Blaschke 超曲面)

Blaschke 超曲面に対する h を Blaschke 計量という

3次形式による特徴付け

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke 超曲面
C: 3次形式

Maschke-Pick-Berwald の定理

$C = 0 \Longrightarrow f$: 2次超曲面

定理 (Nomizu-Pinkall 1989)

$n = 2,\ \nabla C = 0,\ C \neq 0 \Longrightarrow f$: Cayley 曲面

1988 Vrancken: $n = 3,\ \nabla C = 0,\ C \neq 0$ となるものを分類

$\hat{\nabla}$: Blaschke 計量 h に対する Levi-Civita 接続
1989 Magid-Nomizu: $n = 2,\ \hat{\nabla} C = 0,\ C \neq 0$ となるものを分類
2011 Hu-Li-Vrancken: 一般次元で h が定値の場合に分類
2011 Hu-Li-Li-Vrancken: 一般次元で h が Lorentz の場合に分類

中心アファイン超曲面の定義

定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面

$$f\text{: 中心アファイン超曲面} \quad \Updownarrow \text{ def.} \quad f\text{: 接平面と横断的に交わる}$$

中心アファイン超曲面に対する横断的ベクトル場 ξ としては

$$\xi = -\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を選んでおく

アファイン基本形式 h を中心アファイン計量という

非退化なものを考える

基本的事実

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 中心アファイン超曲面
C: 3 次形式

命題

$C = 0 \Longrightarrow f$: 原点を中心とする 2 次超曲面

∇: 誘導接続
$\hat{\nabla}$: 中心アファイン計量 h に対する Levi-Civita 接続
1991 Li-Wang: $\hat{\nabla} C = 0$ かつ平坦なものについて研究
2013 Hildebrand: $\hat{\nabla} C = 0$ となるものについて研究 (代数的)
$\nabla C = 0$ となるものについても言及
2017 Cheng-Hu-Moruz: $\hat{\nabla} C = 0$ で h が定値なものを分類 (幾何的)

3 次形式のトレースレス部分

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 中心アファイン超曲面
h: 中心アファイン計量
C: 3 次形式
$T := \frac{1}{n}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev 形式
C のトレースレス部分:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(X,Y,Z) := C(X,Y,Z) - \frac{n}{n+2}(&T(X)h(Y,Z) \\ &+ T(Y)h(Z,X) + T(Z)h(X,Y))\end{aligned}$$

注意

$\tilde{C}$ は Blaschke 超曲面としての 3 次形式に一致する

$\hat{\nabla}$: h に対する Levi-Civita 接続
1997 Liu-Wang: $n = 2$, $\hat{\nabla}\tilde{C} = 0$ となるものを分類

主結果

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン曲面
∇: 誘導接続
C: 3 次形式

定理 1 (F.-Hamamoto-Nakai)

$\nabla C = 0 \Longrightarrow f$: 原点を中心とする 2 次曲面
(楕円面または双曲面)

$\tilde{C}$: C のトレースレス部分

定理 2 (F.-Hamamoto-Nakai)

$\tilde{C}$: ∇ に関して再帰的

$$\tilde{C} \neq 0,\ {}^{\exists}\sigma\text{: 1 次微分形式 s.t. } \nabla\tilde{C} = \sigma \otimes \tilde{C}$$

$\Longrightarrow f(x, y) = A'(x) + yA(x)$

ご清聴ありがとうございました