アファイン超曲面の中心写像

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１７年４月２８日（金）
北海道大学, 幾何学コロキウム
(古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

1. 序
2. アファイン超曲面
3. Blaschke 超曲面
4. 中心アファイン超曲面
5. 中心アファイン曲面
6. 中心アファイン線織面

背景

Euclid 空間内の超曲面を考える
単位法ベクトル, 型作用素が定義される

命題

次の (1)〜(3) は同値
(1) 型作用素は零作用素
(2) すべての単位法ベクトルは互いに平行
(3) 超曲面は超平面の一部

命題

次の (1)〜(3) は同値
(1) 型作用素は零ではないスカラー作用素
(2) すべての単位法ベクトルは 1 点 (中心) で交わる
(3) 超曲面は超球面の一部

目的

上の 2 つの命題: 単位法ベクトル場の等積性が本質的
$\rightsquigarrow$ アファイン空間内のアファイン超曲面についても考えることができる
$\rightsquigarrow$ Blaschke 法ベクトル, アファイン型作用素が定義される
$\rightsquigarrow$ Euclid 空間内の超球面に対応するもの: アファイン超球面
$\rightsquigarrow$ アファイン超球面の中心: Blaschke 法ベクトルが交わる 1 点

2006 Furuhata-Vrancken: アファイン超球面の中心を一般化
アファイン超曲面の中心写像

目的

中心写像を用いて様々なアファイン超曲面を特徴付ける

Gauss-Weingarten の公式
Euclid 微分幾何の場合

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面

D: $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準平坦接続
$n : M \to \mathbf{R}^{n+1}$: 単位法ベクトル場

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)n & \text{(Gauss)} \\ D_X n = -f_* SX & \text{(Weingarten)} \end{cases}$$

(∇: Levi-Civita 接続, h: 第二基本形式, S: 型作用素)

Gauss-Weingarten の公式
アファイン微分幾何の場合

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面
ξ: f に沿うベクトル場

$$(f, \xi) \text{ または } f\text{: アファイン超曲面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^{\forall}x \in M,\ \xi(x) \pitchfork f_* T_x M$$

f をアファイン超曲面とする
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi & \text{(Gauss)} \\ D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi & \text{(Weingarten)} \end{cases}$$

(ξ: 横断的ベクトル場, ∇: 誘導接続, h: アファイン基本形式
S: アファイン型作用素, τ: 横断的接続形式)

積分可能条件
基本方程式または Gauss-Codazzi-Ricci の方程式

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$
R: ∇ の曲率テンソル
$\Longrightarrow$ Gauss の方程式:

$$R(X, Y)Z = h(Y, Z)SX - h(X, Z)SY$$

h に関する Codazzi の方程式:

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z)$$

S に関する Codazzi の方程式:

$$(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX$$

Ricci の方程式:

$$h(X, SY) - h(SX, Y) = d\tau(X, Y)$$

上の 4 つの方程式: Gauss-Weingarten の公式の積分可能条件

アファイン超曲面の中心写像

藤岡敦

内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面

中心アファイン曲面

中心アファイン線織面

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
D に関して平行な $\mathbf{R}^{n+1}$ の体積要素 ω を固定
$\rightsquigarrow \theta$: (f, ξ) の誘導する体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_n, \xi) \ (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

命題

$$\nabla_X \theta = \tau(X)\theta \quad (X \in \mathfrak{X}(M))$$

定義

$$\xi \text{ または } f\text{: 等積的} \underset{\text{def.}}{\iff} \nabla\theta = 0$$
$$\iff \tau = 0$$

単位法ベクトル場は等積的

等積アファイン超曲面に関する基本的事実
その 1

命題

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 等積アファイン超曲面
$n \geq 2$
$S = \lambda \mathrm{id}.$ $({}^\exists \lambda : M \to \mathbf{R})$
$\Longrightarrow \lambda$: 定数

証明

等積性より S に関する Codazzi の方程式は

$$(\nabla_X S)(Y) = (\nabla_Y S)(X)$$

$S = \lambda \mathrm{id}.$ を代入すると

$$(X\lambda)Y = (Y\lambda)X$$

等積アファイン超曲面に関する基本的事実
その２

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

命題

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 等積アファイン超曲面
(1) $S = 0 \iff$ すべての横断的ベクトルは互いに平行
(2) $S = \lambda \mathrm{id}.\ (\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) \iff$ すべての横断的ベクトルは１点で交わる

(2) の $\Rightarrow$ の証明

等積性より Weingarten の公式は

$$D_X \xi = -f_* SX$$

$$g(x) := f(x) + \frac{1}{\lambda}\xi(x) \quad (x \in M)$$

Weingarten の公式より

$$D_X g = 0$$

非退化性, 定値性, 不定値性

定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
h: アファイン基本形式

$$f\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$h\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$

命題

上の定義は横断的ベクトル場 ξ の選び方に依存しない

証明

$\bar{\xi} := \lambda\xi + (\text{接成分}) \quad (\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}) \implies \lambda\bar{h} = h$

Blaschke 超曲面の定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化アファイン超曲面

ξ: 横断的ベクトル場

θ: (f, ξ) の誘導する体積要素

アファイン基本形式 h は非退化

$\rightsquigarrow \omega_h$: h に関する体積要素

命題

$\tau = 0$ かつ $\theta = \omega_h$ となる横断的ベクトル場が符号を除いて一意的に存在

上のような横断的ベクトル場を Blaschke 法ベクトル場とよぶ

特に Blaschke 法ベクトル場は等積的

このとき f を Blaschke 超曲面とよぶ

また h を Blaschke 計量とよぶ

アファイン超球面

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke 超曲面
S: アファイン型作用素

$$f\text{: アファイン超球面} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} S\text{: スカラー作用素}$$

$S = 0$ のアファイン超球面は非固有であるという
$S \neq 0$ のアファイン超球面は固有であるという

命題

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke 超曲面
(1) f: 非固有アファイン超球面
$\Longleftrightarrow$ すべての Blaschke 法ベクトルは互いに平行
(2) f: 固有アファイン超球面
$\Longleftrightarrow$ すべての Blaschke 法ベクトルは 1 点 (中心) で交わる

Tzitzéica の定理

内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面

中心アファイン曲面

中心アファイン線織面

定理 (1908 Tzitzéica)

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 曲面
K: Euclid Gauss 曲率
d: 原点と f の接平面の符号付き Euclid 距離 $\neq 0$
(原点からの Euclid 支持関数)
$\Longrightarrow \dfrac{K}{d^4}$ は原点を固定する等積アファイン変換 (等積中心アファイン変換) で不変

$\dfrac{K}{d^4}$ が 0 でない定数の曲面は原点を中心とする固有アファイン球面に他ならない

アファイン超球面の例

例 (固有 2 次超曲面)

∘ 固有無心 2 次超曲面は非固有アファイン超球面
∘ 固有有心 2 次超曲面は固有アファイン超球面

定理 (1990 Magid-Ryan)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbf{R}^3$: アファイン球面
Blaschke 計量の曲率が 0
$\Longrightarrow$ f は次の何れかとアファイン合同
∘ $Z = X^2 + Y^2$ (定値, 非固有)
∘ $Z = XY + A(X)$, A: X のみの任意の関数 (不定値, 非固有)
∘ $XYZ = 1$ (定値, 固有)
∘ $(X^2 + Y^2)Z = 1$ (不定値, 固有)

1991 Simon: Blaschke 計量の曲率が一定のアファイン球面の分類

中心写像

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化アファイン超曲面
Blaschke 法ベクトル場 ξ を選ぶ
$f = Z + r\xi$ と分解しておく
ただし Z は f の接成分

命題

次の (1)～(3) は同値
(1) f は原点を中心とする固有アファイン超球面
(2) r は 0 でない定数
(3) $Z = 0$

定義 (2006 Furuhata-Vrancken)

Z を中心写像とよぶ

r は原点からの等積アファイン支持関数とよぶ

中心アファイン超曲面の定義

定義

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面

$$\xi := -\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\bigg|_f$$

f: 中心アファイン超曲面 $\underset{\text{def.}}{\iff}$ (f,ξ): アファイン超曲面

Weingarten の公式は

$$D_X\xi = -f_*X$$

特に $S = \mathrm{id}.$ で ξ は等積的

アファイン基本形式 h を中心アファイン計量という

非退化中心アファイン超曲面の基本的不変量

差テンソル, Pick 関数, Tchebychev ベクトル場, Tchebychev 作用素

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
∇: 誘導接続
$\hat{\nabla}$: 中心アファイン計量 h に対する Levi-Civita 接続
$C := \nabla - \hat{\nabla}$: 差テンソル
$J := \dfrac{1}{n(n-1)}\|C\|_h^2$: Pick 関数
$T := \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev ベクトル場

$$\phi(\mathrm{tr}_h C) = \mathrm{tr} A_\phi \quad ({}^\forall \phi \in \Omega^1(M))$$

A_ϕ: $(1,1)$ テンソル s.t.

$$(\phi \circ C)(X, Y) = h(A_\phi(X), Y) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

$\mathcal{T} := \hat{\nabla} T$: Tchebychev 作用素

非退化中心アファイン超曲面の基本的不変量
差テンソルのトレースレス部分, 一般化 Pick 関数

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
h: 中心アファイン計量
C: 差テンソル
T: Tchebychev ベクトル場
C のトレースレス部分:

$$\tilde{C}(X, Y) := C(X, Y) - \frac{n}{n+2}(h(T, X)Y + h(T, Y)X + h(X, Y)T)$$

$$(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

注意
$\tilde{C}$ は相対正規化の選び方に依存しない

$\tilde{J} := \dfrac{1}{n(n-1)}\|\tilde{C}\|_h^2$: 一般化 Pick 関数

非退化中心アファイン超曲面に関する基本的事実

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面

C: 差テンソル

T: Tchebychev ベクトル場

$\tilde{J}$: 一般化 Pick 関数

Maschke-Pick-Berwald の定理

$C = 0 \iff f$: 原点を中心とする 2 次超曲面

命題

$T = 0 \iff f$: 原点を中心とする固有アファイン超球面

命題

$n = 2$ とする

f: 不定値, $\tilde{J} = 0 \iff f$: 線織面

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

Tchebychev 作用素が消える中心アファイン曲面

定理 (1995 Liu-Wang)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化中心アファイン曲面

$$T \neq 0,\ \mathcal{T} = 0$$

$\Longrightarrow$ f は次の何れかと中心アファイン合同

(1) $X^a Y^b Z^c = 1$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$ s.t. $abc(a+b+c) \neq 0$)

(2) $\left\{\exp\left(-a\tan^{-1}\dfrac{X}{Y}\right)\right\}(X^2+Y^2)^b Z^c = 1$

$(a, b, c \in \mathbf{R}$ s.t. $c(2b+c)(a^2+b^2) \neq 0)$

(3) $Z = -X(a\log X + b\log Y)$ ($a, b \in \mathbf{R}$ s.t. $b(a+b) \neq 0$)

(4) $Z = \pm X\log X + \dfrac{Y^2}{X}$

(5) $f = (e^u, A_1(u)e^v, A_2(x)e^v)$, A_1, A_2 は u の任意関数 $a = a(u)$ に対する微分方程式 $A'' - A' - aA = 0$ の 1 次独立解

中心アファイン極小超曲面

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
$f_t : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面の 1 径数族 s.t.

$$f_0 = f \text{ かつ } M \text{ の境界で } f_t = f,\ \mathrm{Im}(f_t)_* = \mathrm{Im}\, f_*$$

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \lambda f + (\text{接成分}) \quad (\lambda : M \to \mathbf{R})$$

ω_{h_t}: f_t の中心アファイン計量 h_t に関する体積要素

第一変分公式 (1994 Wang)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \omega_{h_t} = \pm\frac{n}{2} \int_M (\mathrm{tr}\,\mathcal{T})\lambda\omega_h$$

定義 (1994 Wang)

$$f\text{: 中心アファイン極小} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{tr}\,\mathcal{T} = 0$$

自己合同性

定義 (2006 Furuhata-Vrancken)

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
Z: 中心写像

$$f\text{: 自己合同} \underset{\text{def.}}{\iff} Z\text{: } f \text{ に中心アファイン合同}$$

定理 (2006 Furuhata-Vrancken)

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 自己合同な非退化中心アファイン超曲面
$\Longrightarrow \mathcal{T} = 0$

定理 (2006 Furuhata-Vrancken)

$f: M^2 \to \mathbf{R}^3$: 定値中心アファイン曲面

$$T \neq 0,\ \mathcal{T} = 0$$

$\Longrightarrow f$: 自己合同

定値性, 不定値性と Euclid Gauss 曲率

命題

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化アファイン曲面
K: Euclid Gauss 曲率

$$f\text{: 定値 (resp. 不定値)} \iff K > 0 \text{ (resp. } K < 0)$$

証明

(x_1, x_2): 局所座標系
Gauss の公式は

$$f_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 f_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 f_{x_2} + h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\xi \quad (i = 1, 2)$$

n: 単位法ベクトル場
上の式と n の内積を取ると

$$\langle f_{x_i x_j}, n \rangle = h(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) \langle \xi, n \rangle$$

記号の準備

不定値な場合を考える

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面

漸近線座標 (u, v) を選ぶことができる

$\varphi := h(\partial_u, \partial_v)$

d: 原点からの Euclid 支持関数

$$\rho := -\frac{1}{4} \log \left(-\frac{K}{d^4} \right)$$

$(= \log(\pm r))$ (r: 原点からの等積アファイン支持関数)

$$a := \varphi \det \begin{pmatrix} f \\ f_u \\ f_{uu} \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} f \\ f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

$$b := \varphi \det \begin{pmatrix} f \\ f_v \\ f_{vv} \end{pmatrix} \Big/ \det \begin{pmatrix} f \\ f_v \\ f_u \end{pmatrix}$$

漸近線座標による Gauss の公式

Gauss の公式

$$
\begin{cases}
f_{uu} = \left(\dfrac{\varphi_u}{\varphi} + \rho_u\right) f_u + \dfrac{a}{\varphi} f_v \\
f_{uv} = -\varphi f + \rho_v f_u + \rho_u f_v \\
f_{vv} = \left(\dfrac{\varphi_v}{\varphi} + \rho_v\right) f_v + \dfrac{b}{\varphi} f_u
\end{cases}
$$

証明

$$
\Gamma_{uv}^{u} = -\frac{1}{4}\frac{K_v}{K}, \quad \Gamma_{uv}^{v} = -\frac{1}{4}\frac{K_u}{K}
$$

などを用いる

積分可能条件

命題

漸近線座標による Gauss の公式の積分可能条件は

$$\begin{cases} (\log\varphi)_{uv} = -\varphi - \dfrac{ab}{\varphi^2} + \rho_u\rho_v \\ a_v + \rho_u\varphi_u = \rho_{uu}\varphi \\ b_u + \rho_v\varphi_v = \rho_{vv}\varphi \end{cases}$$

ρ が定数で $a, b \neq 0$ のときは座標変換により Tzitzéica 方程式

$$(\log\varphi)_{uv} = -\varphi - \frac{1}{\varphi^2}$$

が得られる

漸近線座標による基本的不変量

差テンソル, Pick 関数, Tchebychev ベクトル場, Tchebychev 作用素

$f: M^2 \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面
(u, v): 漸近線座標

C: 差テンソル

$$C(\partial_u, \partial_u) = \rho_u \partial_u + \frac{a}{\varphi}\partial_v,\ C(\partial_v, \partial_v) = \frac{b}{\varphi}\partial_u + \rho_v \partial_v,$$
$$C(\partial_u, \partial_v) = \rho_v \partial_u + \rho_u \partial_v$$

J: Pick 関数

$$J = \frac{3\rho_u \rho_v}{\varphi} + \frac{ab}{\varphi^3}$$

T: Tchebychev ベクトル場

$$T = \frac{\rho_v}{\varphi}\partial_u + \frac{\rho_u}{\varphi}\partial_v$$

$\mathcal{T}$: Tchebychev 作用素

$$\mathcal{T}(\partial_u) = \frac{\rho_{uv}}{\varphi}\partial_u + \frac{a_v}{\varphi^2}\partial_v,\ \mathcal{T}(\partial_v) = \frac{b_u}{\varphi^2}\partial_u + \frac{\rho_{uv}}{\varphi}\partial_v$$

アファイン超曲面の中心写像

藤岡敦

内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面

中心アファイン曲面

中心アファイン線織面

$\tilde{C}$: 差テンソルのトレースレス部分

$$\tilde{C}(\partial_u, \partial_u) = \frac{a}{\varphi}\partial_v,\ \ \tilde{C}(\partial_v, \partial_v) = \frac{b}{\varphi}\partial_u,\ \ \tilde{C}(\partial_u, \partial_v) = 0$$

$\tilde{J}$: 一般化 Pick 関数

$$\tilde{J} = \frac{ab}{\varphi^3}$$

Z: 中心写像

$$Z = \frac{\rho_v}{\varphi} f_u + \frac{\rho_u}{\varphi} f_v$$

κ: 中心アファイン計量の曲率

$$\kappa = -\frac{(\log\varphi)_{uv}}{\varphi}$$

Tchebychev 作用素が消える場合の Gauss の公式
線織面でない場合

命題

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面

$$T \neq 0,\ \mathcal{T} = 0$$
$$\tilde{J} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ 座標変換を行うと Gauss の公式は

$$\begin{cases} f_{uu} = c_1 f_u + \dfrac{1}{\varphi} f_v \\ f_{uv} = -\varphi f + c_2 f_u + c_1 f_v \\ f_{vv} = c_2 f_v + \dfrac{1}{\varphi} f_u \end{cases}$$

ただし

$$(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \varphi^3 - c_1 c_2 \varphi^2 + 1 = 0$$

Liu-Wang による定理の (1)〜(4) の不定値なものを得る

Tchebychev 作用素が消える場合の Gauss の公式

線織面の場合

命題

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面

$T \neq 0$, $\mathcal{T} = 0$

$\tilde{J} = 0$

(特に f は線織面)

$\Longrightarrow$ 座標変換を行うと Gauss の公式は

$$\begin{cases} f_{uu} = f_u + a(u) f_v \\ f_{uv} = -f + f_u + f_v \\ f_{vv} = f_v \end{cases}$$

Liu-Wang による定理の (5) を得る

不定値な場合の自己合同性

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

定理 (2009 F.)

$f: M^2 \to \mathbf{R}^3$: 不定値中心アファイン曲面

$$T \neq 0,\ \mathcal{T} = 0$$

上の 2 つの命題と同じ記号を用いる

$$f\text{: 自己合同}$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{J} \neq 0,\ (c_1^3 + c_2^3)^3 \neq 2c_1^3 c_2^3 (c_1^3 - c_2^3)^2 \text{ または } \tilde{J} = 0,\ a \neq 2$$

$\tilde{J} = 0$, $a = 2$ のとき

$$f = (e^u, e^{2u+v}, e^{-u+v})$$

Z は原点を含む平面の一部:

$$Z = (e^u, 3e^{2u+v}, 0)$$

Tchebychev 作用素が消えない例
その 1

例 (2006 F.)

$$f := \left(\frac{e^{-(u+v)}}{u+v} \cos(u-v), \frac{e^{-(u+v)}}{u+v} \sin(u-v), 1 - \frac{1}{u+v} \right)$$

$\Longrightarrow f \colon (u, v)$ を漸近線座標とする不定値中心アファイン曲面

$$\text{s.t. } \varphi = a = b = -\frac{2}{(u+v)^2}, \ \rho = -(u+v)$$

特に f は中心アファイン極小で

$$\kappa = 1, \ \mathcal{T} \neq 0$$

Z は原点を含まない平面の一部:

$$Z = (*, *, 1)$$

同様に定値な例も考えることができる

Tchebychev 作用素が消えない例
その 2

例 (2009 F.)

$A = A(x)$: $\mathbf{R}^3$ に値をとる x の関数 s.t. $\alpha := \det \begin{pmatrix} A \\ A' \\ A'' \end{pmatrix} \neq 0$

$$f := A'(x) + yA(x)$$

特に f は線織面: $\tilde{J} = 0$
また f は中心アファイン極小で

$$\kappa = 1, \ J = 0, \ \mathcal{T} \neq 0$$

逆に $\kappa = 1$, $J = 0$ の中心アファイン極小曲面は上のような f となる
Z は 1 点または曲線:

$$Z = -\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}A$$

Tchebychev 作用素が消えない例
その 3

内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

例 (2010 F.)

$\psi_{0,1}, \psi_{0,2}, \psi_{0,3}$: 微分方程式 $v\psi''' + \psi'' - \psi = 0$ の 1 次独立解 (Meijer の G 関数を用いて表される)

$$\psi_{n+1,i} := -\frac{v}{n+1}\psi''_{n,i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$f := \left(\sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n,1}(v)u^n, \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n,2}(v)u^n, \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{n,3}(v)u^n\right)$$

$\Longrightarrow$ f: (u, v) を漸近線座標とする不定値中心アファイン曲面

$$\text{s.t. } \varphi = 1,\ a = v,\ b = -\frac{1}{v},\ \rho = \frac{1}{2}u^2 + c\ (c \in \mathbf{R})$$

特に f は中心アファイン極小で

$$\kappa = 0,\ J = \tilde{J} = -1,\ \mathcal{T} \neq 0$$

先行研究

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化中心アファイン曲面
$\tilde{J}$: 一般化 Pick 関数
κ: 中心アファイン計量の曲率

2007 Liu-Jung: $\tilde{J} = 0$ で不定値なものを「分類」
$\kappa = 0$ のものを分類
κ: 定数 $\Longrightarrow \kappa = 0, 1$

2010 Yu-Yang-Liu: 線織面で $\kappa = 0, 1$ となるものを分類
中心アファイン極小となるものを分類
線形 Weingarten となるものを分類

Pick 関数による場合分け

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化中心アファイン線織面
J: Pick 関数

命題

$J = 0$
$\Longrightarrow f = A'(x) + yA(x)$
($\kappa = 1$, $J = 0$ の中心アファイン極小曲面)

補題

$J \neq 0$
$\Longrightarrow f = C_1(u)e^{\rho} + C_2(u)$
ただし C_1, C_2 はある微分方程式をみたす $\mathbf{R}^3$ に値をとる u の関数で各 u に対して $C_1(u), C_1'(u), C_2(u)$ は 1 次独立

主結果
その 1

定理 (F.-Furuhata)

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化中心アファイン線織面
Z: 1 点または曲線
$\Longrightarrow f = A'(x) + yA(x)$
$(\kappa = 1,\ J = 0$ の中心アファイン極小曲面)

証明の概略

$J = 0$ の場合に限ることを示せばよい
$J \neq 0$ と仮定し矛盾を導く
上の補題を用いて Z, Z_u, Z_v を計算する
Z は曲面となることが分かる

2013 Hu: A が非退化中心アファイン空間曲線の場合

主結果
その 2

アファイン超曲面の中心写像
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面
中心アファイン曲面
中心アファイン線織面

定理 (F.-Furuhata)

$f: M^2 \to \mathbf{R}^3$: 非退化中心アファイン線織面
$T \neq 0$
Z: 原点を含む平面の一部
$\Longrightarrow f = (e^u, e^{2u+v}, e^{-u+v})$
$(T \neq 0,\ \mathcal{T} = 0$ だが自己合同でない線織面$)$

証明の概略

$J = 0$ とはならないことに注意する
上の補題を用いる
Z の微分も同じ平面上にあることに注意し形を絞っていく

ご清聴ありがとうございました