内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面

# 余等質性１の原点を中心とする 固有アファイン球面

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１８年1月２７日（土）
南あわじ市 阿那賀地区公民館, 淡路島幾何学研究集会 2018
(古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

# 内容


1. 序
2. アファイン超曲面
3. Blaschke 超曲面
4. 中心アファイン超曲面

# 動機と背景

## 動機

Euclid 空間内の回転面の類似をアファイン微分幾何の範疇で考えたい

アファイン空間内の超曲面: 横断的ベクトル場の選び方が様々

- Blaschke 法ベクトル場を選ぶ → Blaschke 超曲面
- 動径ベクトル場の制限を選ぶ → 中心アファイン超曲面

Blaschke 曲面の場合: 回転面の歴史は長い
1928 Su, Süss ∼ 2014 Yang-Yu-Liu
アファイン回転面という
すべての Blaschke 法ベクトルが 1 つの直線と交わるか 1 つの平面と平行

中心アファイン曲面の場合: 余等質性 1 のものを考える

# 余等質性１の中心アファイン曲面



中心アファイン微分幾何: アファイン空間内の部分多様体の中心アファイン変換で不変な性質を調べる

中心アファイン変換: 原点を固定するアファイン変換

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{R}^n \text{ の中心アファイン変換群} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$$

余等質性１の中心アファイン曲面は

$$f(x, y) = \gamma(x) e^{yA}$$

と表される
ただし

$$\gamma\colon \mathbf{R}^3 \text{ 内の曲線}, \quad A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbf{R})$$

内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面


# 例

## 原点を中心とする平坦な固有アファイン球面

### 例 (原点を中心とする平坦な固有アファイン球面)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 原点を中心とする平坦な固有アファイン球面

$\Longrightarrow$ 中心アファイン合同を除いて

$$XYZ = 1 \quad \text{または} \quad (X^2 + Y^2)Z = 1$$

(1990 Magid-Ryan)

これらは余等質性 1

例えば前者については

$$\gamma(x) = (e^x, 1, e^{-x}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# アファイン超曲面の定義と Gauss-Weingarten の公式



$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面 (はめ込み)
$\xi$: $f$ に沿うベクトル場

$$(f, \xi) \text{ または } f\text{: アファイン超曲面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^{\forall} x \in M, \ \xi(x) \pitchfork f_* T_x M$$

$f$ をアファイン超曲面とする
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi & \text{(Gauss)} \\ D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi & \text{(Weingarten)} \end{cases}$$

($\xi$: 横断的ベクトル場, $\nabla$: 誘導接続, $h$: アファイン基本形式
$S$: アファイン型作用素, $\tau$: 横断的接続形式)

# 非退化性, 定値性, 不定値性



**定義**

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面

$h$: アファイン基本形式

$$f\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$h\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$

**命題**

上の定義は横断的ベクトル場 $\xi$ の選び方に依存しない

**証明**

$\bar{\xi} := \lambda\xi + (\text{接成分}) \quad (\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}) \implies \lambda\bar{h} = h$

# Blaschke 超曲面の定義

余等質性 1 の原点を中心とする固有アファイン球面
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
Blaschke 超曲面
中心アファイン超曲面

$\omega$: 標準平坦接続 $D$ に関して平行な $\mathbf{R}^{n+1}$ の体積要素
$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化アファイン超曲面
$\theta$: はめ込み $f$ の誘導する体積要素

$$\theta(X_1, \ldots, X_n) = \omega(f_* X_1, \ldots, f_* X_n, \xi) \ (X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

$\omega_h$: $h$ に関する体積要素

**命題**

$f$: 非退化アファイン超曲面
$\Longrightarrow$ 必要ならば $\xi$ を取り替えると $\tau = 0$, $\theta = \omega_h$
このような $\xi$ は符号を除いて一意

上の $\xi$ を Blaschke 法ベクトル場とよぶ
このとき $f$ を Blaschke 超曲面とよぶ
また $h$ を Blaschke 計量とよぶ

# アファイン超球面



## 定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke 超曲面

$S$: アファイン型作用素

$$f\text{: アファイン超球面} \underset{\text{def.}}{\iff} S\text{: スカラー作用素}$$

$S \neq 0$ のアファイン超球面は固有であるという

$S = 0$ のアファイン超球面は非固有であるという

## 命題

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: Blaschke 超曲面

(1) $f$: 固有アファイン超球面

$\iff$ すべての Blaschke 法ベクトルが 1 点 (中心) で交わる

(2) $f$: 非固有アファイン超球面

$\iff$ すべての Blaschke 法ベクトルが互いに平行

# 中心アファイン超曲面の定義と差テンソル



内容

序

アファイン超曲面

Blaschke 超曲面

中心アファイン超曲面

**定義**

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面

$$\xi := -\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Bigg|_f$$

$f$: 中心アファイン超曲面 $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $(f, \xi)$: アファイン超曲面

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アファイン超曲面
$\nabla$: 誘導接続
$h$: アファイン基本形式 (中心アファイン計量)
$\hat{\nabla}$: $h$ に対する Levi-Civita 接続
$C := \nabla - \hat{\nabla}$: 差テンソル

# Tchebychev ベクトル場と Tchebychev 作用素



$T := \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev ベクトル場

$$\phi(\mathrm{tr}_h C) = \mathrm{tr}\, A_\phi \quad ({}^\forall \phi \in \Omega^1(M))$$

$A_\phi$: $(1,1)$ テンソル s.t.

$$(\phi \circ C)(X, Y) = h(A_\phi(X), Y) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

**命題**

$T = 0 \iff f$: 原点を中心とする固有アファイン超球面

$\mathcal{T} := \hat{\nabla} T$: Tchebychev 作用素

**例 (Tchebychev 作用素が消える中心アファイン曲面)**

1995 Liu-Wang: $T \neq 0$, $\mathcal{T} = 0$ となる非退化中心アファイン曲面を分類

これらはすべて余等質性 1

# 主結果

不定値の場合のみ述べる

## 定理 (F.-Furuhata)

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 原点を中心とする不定値固有アファイン球面

非平坦, 余等質性 1

$\Longrightarrow$ $^{\exists}(x, y)$: 曲率線座標 s.t. $f(x, y) = \gamma(x)e^{yA}$

- $A$ の最小多項式は $t^3 - \dfrac{c}{4}t + \dfrac{a-b}{8}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$
- $\gamma$ は微分方程式

$$(2\varphi' + a + b)\gamma' = \gamma\{4\varphi A^2 + (a - b)A - 2\varphi^2 E\}$$

の解

ただし $\varphi \neq 0, \varphi' \neq 0, -\frac{a+b}{2}$ で

$$(\varphi')^2 = -2\varphi^3 + c\varphi^2 + ab$$

# ご清聴ありがとうございました