# 70 の法則

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１８年１１月１０日（土）
セミナー「関大の研究を体験する」

# 内容

# 70 の法則とは

## 70 の法則

$X$ 円の元金がある
これを年利 $r$ % で複利運用する
$\Longrightarrow$ およそ $\dfrac{70}{r}$ 年後に 2 倍になる

- $r$ があまり大きいと成り立たない
  $r \leqq 10$ 程度がよい
- 72 の法則ともいう
  約数の個数は 70 よりも 72 の方が多い
  70 の約数: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70
  72 の約数: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

# $r = 10$ の場合

$r = 10$ の場合に確かめてみる

○ 70 の法則を用いない計算

1 年後: 元金 $X$ 円, 利息 $X \times \dfrac{10}{100}$ 円

$$\Longrightarrow \text{合計} \left( X + X \times \frac{10}{100} \right) = 1.1 \times X \text{ 円}$$

よって複利運用すると元金は 1 年で 1.1 倍になる

2 年後: $1.1 \times 1.1 = 1.21$ 倍

3 年後: $1.21 \times 1.1 = 1.331 \fallingdotseq 1.33$ 倍 (小数第 3 位を四捨五入)

4 年後: $1.33 \times 1.1 \fallingdotseq 1.46$ 倍,　5 年後: $1.46 \times 1.1 \fallingdotseq 1.61$ 倍

6 年後: $1.61 \times 1.1 \fallingdotseq 1.77$ 倍,　7 年後: $1.77 \times 1.1 \fallingdotseq 1.95$ 倍

8 年後: $1.95 \times 1.1 \fallingdotseq 2.15$ 倍

○ 70 の法則を用いた計算: $\dfrac{70}{10} = 7$ 年後

## $r = 7$ の場合



$r = 7$ の場合に確かめてみる

◦ 70 の法則を用いない計算

1 年後: 元金 $X$ 円, 利息 $X \times \dfrac{7}{100}$ 円

複利運用すると元金は 1 年で 1.07 倍になる

2 年後: $1.07 \times 1.07 \fallingdotseq 1.14$ 倍, 3 年後: $1.14 \times 1.07 \fallingdotseq 1.22$ 倍

4 年後: $1.22 \times 1.07 \fallingdotseq 1.31$ 倍, 5 年後: $1.31 \times 1.07 \fallingdotseq 1.40$ 倍

6 年後: $1.40 \times 1.07 \fallingdotseq 1.50$ 倍, 7 年後: $1.50 \times 1.07 \fallingdotseq 1.61$ 倍

8 年後: $1.61 \times 1.07 \fallingdotseq 1.72$ 倍, 9 年後: $1.72 \times 1.07 \fallingdotseq 1.84$ 倍

10 年後: $1.84 \times 1.07 \fallingdotseq 1.97$ 倍

11 年後: $1.97 \times 1.07 \fallingdotseq 2.11$ 倍

◦ 70 の法則を用いた計算: $\dfrac{70}{7} = 10$ 年後

# 一般の $r$ の場合

一般の $r$ の場合を考える

1 年後: 元金 $X$ 円, 利息 $X \times \dfrac{r}{100}$ 円

複利運用すると元金は 1 年で $\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)$ 倍になる

2 年後: $\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)\left(1 + \dfrac{r}{100}\right) = \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^2$ 倍

これを続けていくと元金は $n$ 年で $\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$ 倍になる

このとき最初の 2 倍になるとすると

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 2$$

$n$ についての方程式とみなす
指数関数, 対数関数を用いて解く

# 指数関数の定義
## 自然数乗と指数法則



$a$: 1 と異なる正の定数

指数関数: 実数 $x$ に対して実数 $a^x$ を対応させる

$x$ が自然数の場合から一般化していく

○ 自然数乗: $n = 1, 2, 3, \ldots$ とする

$a$ を $n$ 回掛けたものを $a^n$ と表す

$$a^1 = a, \quad a^2 = a \times a, \quad a^3 = a \times a \times a, \quad \ldots$$

**指数法則**

$m, n = 1, 2, 3, \ldots$ とすると

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ

指数法則が成り立つように一般化していく

# 指数関数の定義

## 整数乗から実数乗へ

- 整数乗: さらに

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad (n = -1, -2, -3, \dots)$$

と定める

- 有理数乗: $m = 1, 2, 3, \dots,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ とする
  $m$ 乗すると $a^n$ になる正の数を $a^{\frac{n}{m}}$ と表す
- 実数乗: $x$ を実数とする
  $x$ から $a^x$ への対応が「連続」になるように定める

**指数法則**

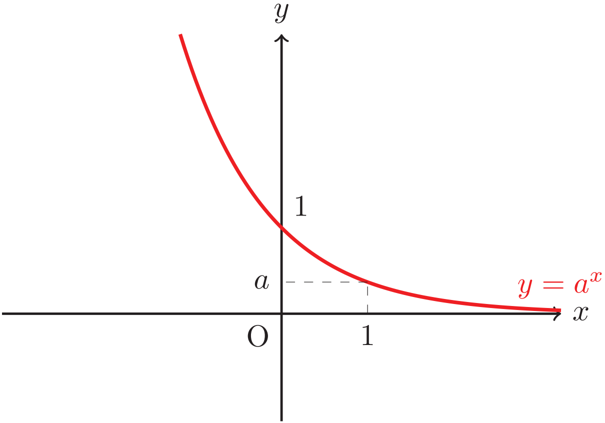
任意の実数 $x, y$ に対して

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

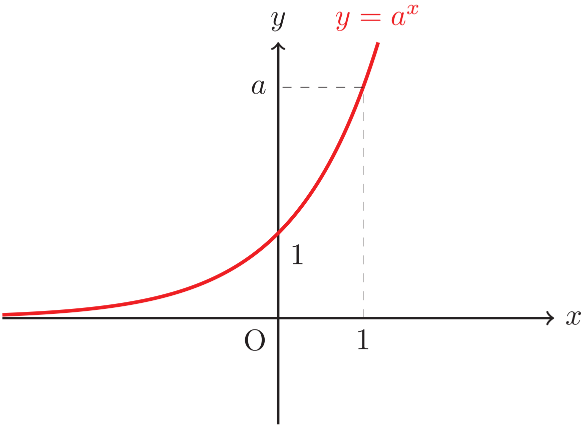
が成り立つ

# 指数関数のグラフ
## $0 < a < 1$ のとき

$0 < a < 1$ のとき $y = a^x$ のグラフは右下がり (単調減少)



$a > 1$ のとき $y = a^x$ のグラフは右上がり (単調増加)



# 対数関数 (logarithmic function) の定義



$a$: 1 と異なる正の定数
$x$: 正の実数
$x$ は実数 $y$ を用いて $x = a^y$ と表すことができる
このとき $y = \log_a x$ と表す
$x$ から $\log_a x$ への対応を $a$ を底(てい)とする対数関数という

**対数法則**

任意の正の実数 $x$, $y$ に対して

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

が成り立つ

# 対数法則の証明
## 第 1 式





$x = a^u$, $y = a^v$ と表しておくと

$$u = \log_a x, \quad v = \log_a y$$

また

$$\begin{aligned} xy &= a^u a^v \\ &= a^{u+v} \quad (\because \text{指数法則}) \end{aligned}$$

すなわち

$$xy = a^{u+v}$$

よって

$$u + v = \log_a(xy)$$

したがって

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

# 対数法則の証明
## 第 2 式



$x = a^u$ と表しておくと

$$u = \log_a x$$

また

$$\begin{aligned} x^y &= (a^u)^y \\ &= a^{uy} \qquad (\because \text{指数法則}) \end{aligned}$$

すなわち

$$x^y = a^{yu}$$

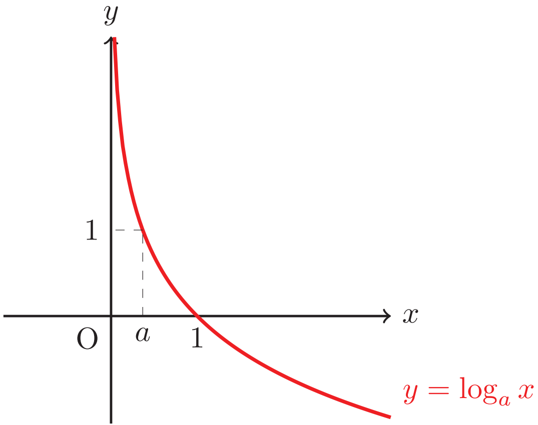
よって

$$yu = \log_a x^y$$

したがって

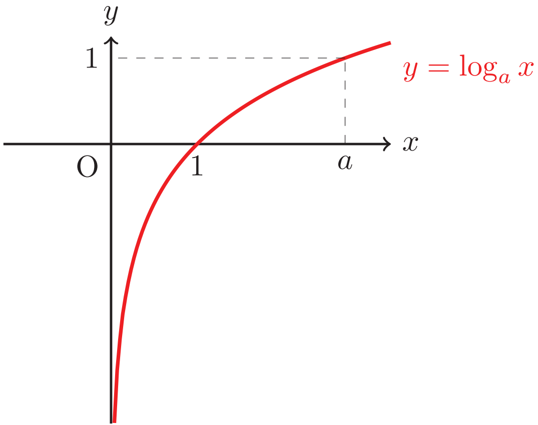
$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$0 < a < 1$ のとき $y = \log_a x$ のグラフは単調減少



# 対数関数のグラフ
## $a > 1$ のとき

$a > 1$ のとき $y = \log_a x$ のグラフは単調増加



始めに戻る

$X$ 円の元金を年利 $r$ % で複利運用する
$n$ 年後に元金が倍になるとする
このとき

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 2$$

これを $n$ について解く

$a$ を 1 と異なる正の定数とする
上の方程式の両辺に対して $a$ を底とする対数をとる:

$$\log_a \left(1+\frac{r}{100}\right)^n = \log_a 2$$

左辺を変形する

ここで

$$\begin{aligned}
\log_a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n &= \log_a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}\frac{rn}{100}} \\
&= \log_a\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}}\right\}^{\frac{rn}{100}} \\
&\quad (\because \text{指数法則：} a^{xy} = (a^x)^y) \\
&= \frac{rn}{100}\log_a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}} \\
&\quad (\because \text{対数法則：} \log_a x^y = y\log_a x)
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{rn}{100}\log_a\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}} = \log_a 2$$

$x = \dfrac{r}{100}$ とおくと

$$\log_a \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}} = \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$x = \dfrac{r}{100}$ が 0 に「十分」近い場合を考える

$x = 1$: $(1+1)^1 = 2$, $x = \frac{1}{5}$: $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.488$

$x = \frac{1}{10}$: $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \fallingdotseq 2.594$, $x = \frac{1}{100}$: $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \fallingdotseq 2.705$

$x = \frac{1}{1000}$: $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \fallingdotseq 2.717$

$x = \frac{1}{10000}$: $\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} \fallingdotseq 2.718$

$x = \frac{1}{100000}$: $\left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} \fallingdotseq 2.718$

$x$ を 0 に十分近づけると $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある値に限りなく近づく

$a$ をその値として選ぶ

# ネピアの数の定義

**定理**

$x$: 0 と異なる実数
$x$ を 0 に十分近づける
$\Longrightarrow$ $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある実数 $e$ に限りなく近づく:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (\text{ネピアの数})$$
$$= 2.718281828459045\ldots$$

- 高校で学ぶ定義
  指数関数 $y = a^x$ のグラフを考える
  必ず点 $(0,1)$ を通る
  点 $(0,1)$ において接線を引く
  接線の傾きが 1 になる $a$ を $e$ と定める

# 70 の法則の証明
## 続き

$e$ を底とする対数を考える (自然対数)

$\log_e$ の $e$ は省略する

始めの方程式は

$$\frac{rn}{100}\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}}=\log 2$$

と同値

$\dfrac{r}{100}$ が 0 に十分近いとき

$$\frac{rn}{100}\log e \fallingdotseq \log 2$$

$\log e = 1$ だから

$$n \fallingdotseq \frac{100\log 2}{r}$$

$\log 2$ の値を求める

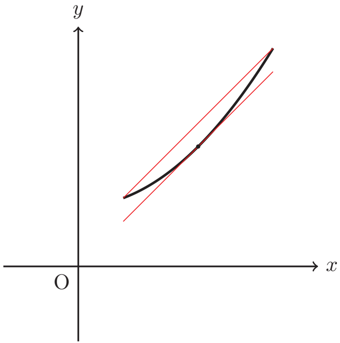
# テイラーの定理とは



$\log 2$ の値の求め方: 「テイラーの定理」を用いる

テイラーの定理: 関数を多項式で近似する
「微分可能な」関数に対して成り立つ
「平均値の定理」の一般化

平均値の定理: 「平均の変化率」を「瞬間の変化率」で表す



# 指数関数 $e^x$ の場合

70 の法則

藤岡敦

内容

序

指数関数

対数関数

始めの方程式へ

ネピアの数

テイラーの定理

$n = 1, 2, 3 \ldots$ とする
$e^x$ に対するテイラーの定理:

$$e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

ただし

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad (n \text{ の階乗})$$

$x = 1$ とおくと $e$ の近似値が得られる

$n = 1$: $e \fallingdotseq 2$, $n = 2$: $e \fallingdotseq 2.5$, $n = 3$: $e \fallingdotseq 2.667$
$n = 4$: $e \fallingdotseq 2.708$, $n = 5$: $e \fallingdotseq 2.717$, $n = 6$: $e \fallingdotseq 2.718$
$n = 7$: $e \fallingdotseq 2.718$

$n$ を大きくすると近似が良くなる

# $\log 2$ の近似値
## その 1



$n = 1, 2, 3 \ldots$ とする
$\log(1+x)$ に対するテイラーの定理:

$$\log(1+x) \fallingdotseq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

ただし

$$-1 < x \leqq 1$$

$x = 1$ とおくと $\log 2$ の近似値が得られる

$n = 1$: $\log 2 \fallingdotseq 1$, $n = 5$: $\log 2 \fallingdotseq 0.5$
$n = 10$: $\log 2 \fallingdotseq 0.646$, $n = 100$: $\log 2 \fallingdotseq 0.688$
$n = 200$: $\log 2 \fallingdotseq 0.691$, $n = 300$: $\log 2 \fallingdotseq 0.691$
$n = 400$: $\log 2 \fallingdotseq 0.692$, $n = 500$: $\log 2 \fallingdotseq 0.692$
$n = 600$: $\log 2 \fallingdotseq 0.692$, $n = 700$: $\log 2 \fallingdotseq 0.692$
$n = 800$: $\log 2 \fallingdotseq 0.693$, $n = 900$: $\log 2 \fallingdotseq 0.693$

収束はかなり悪い

# $\log 2$ の近似値
## その 2





$\log 2$ の近似値を求めるには次を用いる方がよい

$\log \dfrac{1+x}{1-x}$ に対するテイラーの定理:

$$\log \frac{1+x}{1-x} \fallingdotseq 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

ただし

$$-1 < x < 1$$

$x = \frac{1}{3}$ とおくと $\log 2$ の近似値が得られる

$n = 1$: $\log 2 \fallingdotseq 0.691$,　$n = 2$: $\log 2 \fallingdotseq 0.693$

収束はかなり良い

# 70 の法則の証明



- 元金 $X$ 円を年利 $r$ % で複利運用
- 元金が $n$ 年で 2 倍になるとすると

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 2$$

- 指数法則, 対数法則を用いると

$$\frac{rn}{100}\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{100}{r}} = \log 2$$

- $\dfrac{r}{100} \fallingdotseq 0$ とすると

$$\frac{rn}{100} \fallingdotseq \log 2$$

- $\log 2 \fallingdotseq 0.693$ より

$$n \fallingdotseq \frac{70}{r}$$

# 年利が大きいときの注意

方程式

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 2$$

を $n$ について解くと

$$n = \frac{r\log 2}{\log\left(1+\frac{r}{100}\right)}\frac{1}{r}$$

$$C = \frac{r\log 2}{\log\left(1+\frac{r}{100}\right)}$$ とおく

$$\begin{aligned}
&r=0.1:\ C \fallingdotseq 69.3, \quad r=1:\ C \fallingdotseq 69.7, \quad r=2:\ C \fallingdotseq 70.0\\
&r=3:\ C \fallingdotseq 70.3, \quad r=4:\ C \fallingdotseq 70.7, \quad r=5:\ C \fallingdotseq 71.0\\
&r=10:\ C \fallingdotseq 72.7, \quad r=20:\ C \fallingdotseq 76.0, \quad r=30:\ C \fallingdotseq 79.3
\end{aligned}$$

$r$ が大きくなると「70 の法則」はあてはまらなくなる

# 「40の法則」



### 宿題

$X$ 円の元金がある
これを年利 $r$ % で複利運用する
元金が 1.5 倍になるのはおよそ何年後か

### 答え

およそ $\dfrac{40}{r}$ 年後