余等質性１の定曲率中心アファイン極小曲面

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０１９年１月２６日（土）
南あわじ市 阿那賀地区公民館, 淡路島幾何学研究集会 2019
(古畑仁氏 (北海道大学) との共同研究)

内容

1 序

2 アファイン超曲面

3 中心アファイン超曲面

動機と背景

動機

Euclid 空間内の回転面の類似をアファイン微分幾何の範疇で考えたい

アファイン空間内の超曲面: 横断的ベクトル場の選び方が様々

- Blaschke 法ベクトル場を選ぶ → Blaschke 超曲面
- 動径ベクトル場の制限を選ぶ → 中心アファイン超曲面

Blaschke 曲面の場合: 回転面の歴史は長い
1928 Su, Süss ∼ 2014 Yang-Yu-Liu
アファイン回転面という
すべての Blaschke 法ベクトルが 1 つの直線と交わるか 1 つの平面と平行

中心アファイン曲面の場合: 余等質性 1 のものを考える

余等質性１の中心アファイン曲面

余等質性１の定曲率中心アファイン極小曲面
藤岡敦
内容
序
アファイン超曲面
中心アファイン超曲面

中心アファイン微分幾何: アファイン空間内の部分多様体の中心アファイン変換で不変な性質を調べる

中心アファイン変換: 原点を固定するアファイン変換

$$\rightsquigarrow$$

$$\mathbf{R}^n \text{ の中心アファイン変換群} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$$

余等質性１の中心アファイン曲面は

$$f(x, y) = \gamma(x) e^{yA}$$

と表される
ただし

$$\gamma\colon \mathbf{R}^3 \text{ 内の曲線}, \quad A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbf{R})$$

例

例 (原点を中心とする平坦な固有アファイン球面)

$f = (X, Y, Z) : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 原点を中心とする平坦な固有アファイン球面

$\Longrightarrow$ 中心アファイン合同を除いて

$$XYZ = 1 \quad \text{または} \quad (X^2 + Y^2)Z = 1$$

(cf. 1990 Magid-Ryan)

これらは余等質性 1

例えば前者については

$$\gamma(x) = (e^x, 1, e^{-x}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(cf. 前回の話)

アファイン超曲面の定義と Gauss-Weingarten の公式

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面 (はめ込み)
ξ: f に沿うベクトル場

$$(f, \xi) \text{ または } f\text{: アファイン超曲面}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$^{\forall}x \in M,\ \xi(x) \pitchfork f_* T_x M$$

f をアファイン超曲面とする
$\Longrightarrow$ Gauss-Weingarten の公式:

$$\begin{cases} D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X, Y)\xi & \text{(Gauss)} \\ D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi & \text{(Weingarten)} \end{cases}$$

ただし $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$\left(\begin{array}{c} \xi\text{: 横断的ベクトル場, } \nabla\text{: 誘導接続, } h\text{: アファイン基本形式} \\ S\text{: アファイン型作用素, } \tau\text{: 横断的接続形式} \end{array}\right)$

非退化性, 定値性, 不定値性

定義

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: アファイン超曲面
h: アファイン基本形式

$$f\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$
$$\Updownarrow \text{def.}$$
$$h\text{: 非退化 (resp. 定値, 不定値)}$$

命題

上の定義は横断的ベクトル場 ξ の選び方に依存しない

証明

$\bar{\xi} := \lambda\xi + (\text{接成分})\ (\lambda : M \to \mathbf{R} \setminus \{0\}) \Longrightarrow \lambda\bar{h} = h$

Blaschke 超曲面

ω: 標準平坦接続 D に関して平行な $\mathbf{R}^{n+1}$ の体積要素
$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化アファイン超曲面
θ: はめ込み f の誘導する体積要素

$$\theta(X_1, \dots, X_n) = \omega(f_* X_1, \dots, f_* X_n, \xi) \quad (X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M))$$

ω_h: h に関する体積要素

命題

f: 非退化アファイン超曲面
$\Longrightarrow$ 必要ならば ξ を取り替えると $\tau = 0$, $\theta = \omega_h$
このような ξ は符号を除いて一意

上の ξ を Blaschke 法ベクトル場とよぶ
このとき f を Blaschke 超曲面とよぶ
h を Blaschke 計量とよぶ

中心アフィン超曲面の定義と差テンソル

定義

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 超曲面

$$\xi := -\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)\Bigg|_f$$

$$f\text{: 中心アフィン超曲面} \underset{\text{def.}}{\iff} (f, \xi)\text{: アフィン超曲面}$$

$f: M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アフィン超曲面
∇: 誘導接続
h: アフィン基本形式 (中心アフィン計量)
$\hat{\nabla}$: h に対する Levi-Civita 接続
$C := \nabla - \hat{\nabla}$: 差テンソル

Tchebychev ベクトル場と Tchebychev 作用素

$T := \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}_h C$: Tchebychev ベクトル場

命題

$$T = 0$$

$$\Updownarrow$$

f: Blaschke 超曲面としてアファイン型作用素 S は 0 でないスカラー作用素

すべての Blaschke 法ベクトルが原点で交わる

(原点を中心とする固有アファイン超球面)

$\mathcal{T} := \hat{\nabla} T$: Tchebychev 作用素

1995 Liu-Wang: $T \neq 0$, $\mathcal{T} = 0$ となる非退化中心アファイン曲面を分類

すべて余等質性 1

中心アフィン極小超曲面

$f : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アフィン超曲面
$f_t : M^n \to \mathbf{R}^{n+1}$: 非退化中心アフィン超曲面の 1 径数族 s.t.

$$f_0 = f \text{ かつ } M \text{ の境界で } f_t = f,\ \mathrm{Im}\,(f_t)_* = \mathrm{Im}\, f_*$$

$$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0} = \lambda f + (\text{接成分}) \quad (\lambda : M \to \mathbf{R})$$

ω_{h_t}: f_t の中心アフィン計量 h_t に関する体積要素

第一変分公式 (1994 Wang)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M \omega_{h_t} = \pm\frac{n}{2}\int_M \lambda(\mathrm{tr}\,\mathcal{T})\omega_h$$

定義 (1994 Wang)

$$f\text{: 中心アフィン極小} \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{tr}\,\mathcal{T} = 0$$

主結果

定理 (F.-Furuhata)

$f : M^2 \to \mathbf{R}^3$: 中心アファイン極小曲面
余等質性 1

$\kappa :=$ 中心アファイン計量の曲率: 一定

$\Longrightarrow \kappa = 0, 1$
3 つの場合に分けることができる
すべて具体的に表すことができる

- ○ $\kappa = 0$, $\mathcal{T} = 0$ (cf. 1995 Liu-Wang)
- ○ $\kappa = 1$ かつ線織面 (cf. 2009 F: 余等質性の仮定なし)
  または楕円面の一部
- ○ $\kappa = 1$ で上以外のもの (cf. 2006 F: 特別な場合)

証明

「標準形」の存在を示して計算する

ご清聴ありがとうございました