# 等積中心アファイン閉曲線のなす空間の間の同変射影

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０２０年１月２４日（金）

南あわじ市阿那賀地区公民館, 淡路島幾何学研究集会 2020

(黒瀬俊氏 (関西学院大学), 森吉仁志氏（名古屋大学）との共同研究)

# 内容

# 背景と主結果



- 等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間
  - 円周の微分同相群が作用する
  - 更に Virasoro-Bott 群が作用する
  - 上の空間は Virasoro 代数の双対の余随伴軌道とみなせる
  - シンプレクティック幾何的な性質を調べることができる
- 一般次元の場合
  - 等積中心アファイン閉曲線のなす空間を考える
  - 円周の微分同相群が作用する
  - 平面曲線, 空間曲線のなす空間への射影が定まる
  - 上の作用に関して同変となる

# 等積中心アファイン曲線の定義



## 定義

$I$: 区間

$n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}\text{: 等積中心アファイン曲線}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv 1$$

$s \in I$ を等積中心アファイン弧長径数という

# 等積中心アファイン曲線の基本定理



$\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン曲線
$\Longrightarrow {}^\exists \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$ s.t.

$$\gamma^{(n)} + \kappa_1 \gamma^{(n-2)} + \kappa_2 \gamma^{(n-3)} + \cdots + \kappa_{n-1}\gamma = 0$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $\kappa_i$ を第 $i$ 曲率という

**等積中心アファイン曲線の基本定理**

$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$
$\Longrightarrow {}^\exists \gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$: 第 $i$ 曲率が $\kappa_i$ の等積中心アファイン曲線
原点を固定する等積アファイン変換の合成を除いて一意

原点を固定する等積アファイン変換:

- $SL(n, \mathbf{R})$ の元を掛けること
- 等積中心アファイン変換という

# 例
## 定曲率等積中心アファイン平面曲線

等積中心アファイン平面曲線を考える
第 1 曲率を等積中心アファイン曲率という

**例 (定曲率等積中心アファイン平面曲線)**

$\gamma : I \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン平面曲線
$\kappa$: 等積中心アファイン曲率

○ $\kappa \equiv 0$ のとき $\gamma$ は直線の一部

$$\gamma(s) = (a + bs, c + ds) \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc = 1)$$

○ $\kappa$ が正の定数のとき $\gamma$ は楕円の一部

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{ab}, b \sin \frac{s}{ab}\right) \quad (a, b > 0) \quad \left(\kappa = \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

○ $\kappa$ が負の定数のとき $\gamma$ は双曲線の一部

# 記号の準備

- 周期 $2\pi$ の等積中心アファイン曲線を考える
  等積中心アファイン閉曲線という
- $S^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (円周)
- $\mathcal{M}_n$: $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線全体

$$\mathcal{M}_n = \left\{ \gamma : S^1 \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv 1 \right\}$$

- $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$: $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線の合同類全体
- $\mathrm{Diff}\,(S^1)$: 向きを保つ $S^1$ の微分同相写像全体からなる群

$$\mathrm{Diff}\,(S^1) = \left\{ g : S^1 \to S^1 \,\middle|\, \begin{array}{l} g \text{ は微分同相写像,} \\ {}^\forall s \in S^1,\ g'(s) > 0 \end{array} \right\}$$

# 作用の定義



$\gamma \in \mathcal{M}_n$
$g \in \mathrm{Diff}\,(S^1)$

$$\tilde{\gamma}(s) := (g'(s))^{\frac{1-n}{2}}(\gamma \circ g)(s) \quad (s \in S^1)$$

**命題**

上の式は $\mathrm{Diff}\,(S^1)$ の $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ への作用を定める

**証明**

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ とすると

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = (g')^{\frac{1-n}{2}+k}(\gamma^{(k)} \circ g) + \cdots$$

また

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-n}{2} + k\right) = 0$$

# 記号の準備



- $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_n$ への作用を考える

$$\mathcal{M}_n \ni \gamma \mapsto \tilde{\gamma} = \gamma \cdot g \in \mathcal{M}_n \quad (g \in \mathrm{Diff}(S^1))$$

- 曲率の変換則を求めたい
- $\alpha := \dfrac{1-n}{2}$
- $h := \dfrac{g''}{g'}$
- 単に

$$\tilde{\gamma} = (g')^{\alpha}\gamma$$

などと書く
- $h, h', h'', \ldots$ を独立変数とみなす
- $h^{(k)}$ の次数を $(k+1)$ とする
- $h, h', h'', \ldots$ の多項式 $P$ の重み付き次数が定められる
- $\deg_w P$ と表す

# 曲線の微分の変換則



## 補題

$k = 1, 2, \ldots, n$ とすると

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l} \tilde{\gamma}^{(l)} + (g')^{\alpha+k} \gamma^{(k)}$$

ただし $P_{k,l}$ は $\deg_w P_{k,l} = k - l$ の $h$, $h'$, $h''$, $\ldots$ の同次多項式
更に $P_{k,l}$ に対する漸化式を求めることができる

## 例 ($P_{1,0}$)

$\tilde{\gamma} = (g')^\alpha \gamma$ より

$$\tilde{\gamma}' = \alpha h \tilde{\gamma} + (g')^{\alpha+1} \gamma'$$

よって

$$P_{1,0} = \alpha h$$

# 曲率の変換則

## 定理

$i = 1, 2, \ldots, n-1$

$\kappa_i$: $\gamma$ の第 $i$ 曲率, $\tilde{\kappa}_i$: $\tilde{\gamma}$ の第 $i$ 曲率

$l = 0, 1, 2, \ldots, n-3$ のとき

$$\tilde{\kappa}_{n-l-1} = (g')^{n-l}\kappa_{n-l-1} - P_{n,l} + \sum_{k=l+1}^{n-2} (g')^{n-k}\kappa_{n-k-1}P_{k,l}$$

また

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2\kappa_1 + \frac{n(n^2-1)}{12}S(g)$$

ただし $S(g)$ は $g$ の Schwarz 微分:

$$S(g) = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 = h' - \frac{1}{2}h^2$$

# 同変射影

- $n = 3, 4, 5 \dots$
  - 第 1 曲率の変換則に注目する
  - 第 2 曲率〜第 $(n-1)$ 曲率を忘れる
  - 第 1 曲率をスケール変換する
  - $\mathcal{M}_n$ の軌道から $\mathcal{M}_2$ の軌道への射影を考えることができる
- $n = 4, 5, 6 \dots$
  - 第 1 曲率, 第 2 曲率の変換則に注目する
  - 第 3 曲率〜第 $(n-1)$ 曲率を忘れる
  - 第 1 曲率, 第 2 曲率をスケール変換する
  - $\mathcal{M}_n$ の軌道から $\mathcal{M}_3$ の軌道への射影を考えることができる

**定理**

上の 2 種類の射影は $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用に関して同変

# ご清聴ありがとうございました