等積中心アファイン曲線と円周の微分同相群

藤岡敦

関西大学システム理工学部数学科

２０２１年６月２２日（火）
遠隔開催（Zoom ウェビナー），RIMS 共同研究（公開型）
部分多様体と関連する幾何構造研究の深化と融合
(黒瀬俊氏 (関西学院大学)，森吉仁志氏（名古屋大学）との共同研究)

内容

背景と主結果

- 等積中心アファイン平面閉曲線のなす空間
  - 円周の微分同相群が作用する
  - 更に Virasoro-Bott 群が作用する
  - 上の空間は Virasoro 代数の双対の余随伴軌道とみなせる
  - シンプレクティック幾何的な性質を調べることができる
- 一般次元の場合
  - 等積中心アファイン閉曲線のなす空間を考える
  - 円周の微分同相群が作用する
  - 平面曲線, 空間曲線のなす空間への射影が定まる
  - 上の作用に関して同変となる

等積中心アファイン曲線の定義

定義

I: 区間

$n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \text{等積中心アファイン曲線}$$

$$\Updownarrow \text{def.}$$

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv 1$$

$s \in I$ を等積中心アファイン弧長径数という

等積中心アファイン曲線の基本定理

$\gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン曲線
$\Longrightarrow {}^\exists \kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$ s.t.

$$\gamma^{(n)} + \kappa_1 \gamma^{(n-2)} + \kappa_2 \gamma^{(n-3)} + \cdots + \kappa_{n-1}\gamma = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して κ_i を第 i 曲率という

等積中心アファイン曲線の基本定理

$\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbf{R}$
$\Longrightarrow {}^\exists \gamma : I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$: 第 i 曲率が κ_i の等積中心アファイン曲線
原点を固定する等積アファイン変換の合成を除いて一意

原点を固定する等積アファイン変換:
- $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ の元を掛けること
- 等積中心アファイン変換という

例

定曲率等積中心アファイン平面曲線

等積中心アファイン平面曲線を考える
第 1 曲率を等積中心アファイン曲率という

例 1 (定曲率等積中心アファイン平面曲線)

$\gamma : I \to \mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン平面曲線
κ: 等積中心アファイン曲率

∘ $\kappa \equiv 0$ のとき γ は直線の一部

$$\gamma(s) = (a + bs, c + ds) \quad (a,\ b,\ c,\ d \in \mathrm{R},\ ad - bc = 1)$$

∘ κ が正の定数のとき γ は楕円の一部

$$\gamma(s) = \left(a \cos \frac{s}{ab}, b \sin \frac{s}{ab}\right) \quad (a,\ b > 0) \quad \left(\kappa = \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

∘ κ が負の定数のとき γ は双曲線の一部

記号の準備

- 周期 2π の等積中心アファイン曲線を考える:

$$\gamma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$$

ただし

$$\det \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma' \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} \end{pmatrix} \equiv 1, \quad {}^{\forall} s \in \mathrm{R},\ \gamma(s+2\pi) = \gamma(s)$$

等積中心アファイン閉曲線という

- $S^1 := \mathrm{R}/2\pi\mathrm{Z}$ (円周)
  上の γ を S^1 からの写像とみなす
- $\mathcal{M}_n$: $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線全体
- $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathrm{R})$: $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ 内の等積中心アファイン閉曲線の合同類全体

例 2 (n が偶数のときの定曲率等積中心アファイン閉曲線)

$\gamma \in \mathcal{M}_{2m}$ $(m \in \mathrm{N})$ s.t. $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{2m-1}$: 定数

γ は

$$\gamma(s) = (\cos\lambda_1 s, \sin\lambda_1 s, \ldots, \cos\lambda_m s, \mu\sin\lambda_m s) \quad (s \in S^1)$$

と表される

ただし $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ は互いに異なる自然数

$$t^{2m} + \kappa_1 t^{2m-2} + \cdots + \kappa_{2m-1} = (t^2 + \lambda_1^2)\cdots(t^2 + \lambda_m^2)$$

$$(\kappa_2 = \kappa_4 = \cdots = \kappa_{2m-2} = 0)$$

また

$$\frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$$

例

n が奇数のときの定曲率等積中心アファイン閉曲線

例 3 (n が奇数のときの定曲率等積中心アファイン閉曲線)

$\gamma \in \mathcal{M}_{2m+1}$ $(m \in \mathrm{N})$ s.t. $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{2m}$: 定数
γ は

$$\gamma(s) = (\cos \lambda_1 s, \sin \lambda_1 s, \ldots, \cos \lambda_m s, \sin \lambda_m s, \mu) \quad (s \in S^1)$$

と表される
ただし $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ は互いに異なる自然数

$$t^{2m+1} + \kappa_1 t^{2m-1} + \cdots + \kappa_{2m} = t(t^2 + \lambda_1^2) \cdots (t^2 + \lambda_m^2)$$

$$(\kappa_2 = \kappa_4 = \cdots = \kappa_{2m} = 0)$$

また

$$\frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^3 \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$$

円周の微分同相群の作用

$\mathrm{Diff}\,(S^1)$: 向きを保つ S^1 の微分同相写像全体からなる群

$\gamma \in \mathcal{M}_n$, $g \in \mathrm{Diff}\,(S^1)$

$$\tilde{\gamma}(s) := (\gamma \cdot g)(s) := (g'(s))^{\frac{1-n}{2}}(\gamma \circ g)(s) \quad (s \in S^1)$$

命題

上の式は $\mathrm{Diff}\,(S^1)$ の $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_n/\mathrm{SL}(n, \mathrm{R})$ への作用を定める

証明

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ とすると

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = (g')^{\frac{1-n}{2}+k}(\gamma^{(k)} \circ g) + \cdots$$

また

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-n}{2} + k\right) = 0$$

軌道分解

平面曲線の場合を考える

$l \in \mathbb{N}$

$\mathcal{M}_{2,l}$: 回転数 l の等積中心アファイン平面閉曲線全体

$$\mathcal{M}_{2,l} = \left\{ \gamma \in \mathcal{M}_2 \;\middle|\; \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \arg \gamma(s)\, ds = l \right\}$$

$\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$: 回転数 l の等積中心アファイン平面閉曲線の合同類全体

このとき

$$\mathcal{M}_2 = \bigsqcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{2,l}, \quad \mathcal{M}_2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \bigsqcup_{l \in \mathbb{N}} (\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$$

第 2 式は $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_2/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ への作用による軌道分解

特に $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_{2,l}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ への作用は推移的

等積中心アファイン曲率の変換則

$\gamma \in \mathcal{M}_2$, $g \in \mathrm{Diff}\,(S^1)$
このとき

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cdot g = (g')^{-\frac{1}{2}}(\gamma \circ g)$$

命題

κ: γ の等積中心アファイン曲率
$\Longrightarrow$ $\tilde{\gamma}$ の等積中心アファイン曲率は

$$(g')^2(\kappa \circ g) + \frac{1}{2}S(g)$$

ただし $S(g)$ は g の Schwarz 微分:

$$S(g) = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

記号の準備

- $\mathrm{Diff}(S^1)$ の $\mathcal{M}_n$ への作用を考える
$$\mathcal{M}_n \ni \gamma \mapsto \tilde{\gamma} = \gamma \cdot g \in \mathcal{M}_n \quad (g \in \mathrm{Diff}(S^1))$$
- 曲率の変換則を求めたい
- $\alpha := \dfrac{1-n}{2}$
- 単に
$$\tilde{\gamma} = (g')^\alpha \gamma$$
などと書く
- $h := \dfrac{g''}{g'}$
- $h, h', h'', \ldots$ を独立変数とみなす
- $h^{(k)}$ の次数を $(k+1)$ とする
- $h, h', h'', \ldots$ の多項式 P の重み付き次数が定められる
- $\deg_w P$ と表す

曲線の微分の変換則

補題

∘ $k = 1, 2, \ldots, n$ とすると

$$\tilde{\gamma}^{(k)} = \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l}\tilde{\gamma}^{(l)} + (g')^{\alpha+k}\gamma^{(k)}$$

ただし $P_{k,l}$ は

$$\deg_w P_{k,l} = k - l$$

の $h, h', h'', \ldots$ の同次多項式

∘ 次の 3 つの漸化式がなりたつ

漸化式 1: $k = 1, 2, \ldots, n-1$ のとき

$$P_{k+1,0} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\partial P_{k,0}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)} - (\alpha + k)P_{k,0}h$$

曲線の微分の変換則
補題の続きと証明

補題 (続き)

漸化式 2: $k = 2, 3, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, k-1$ のとき

$$P_{k+1,l} = \sum_{m=0}^{k-l-1} \frac{\partial P_{k,l}}{\partial h^{(m)}} h^{(m+1)} + P_{k,l-1} - (\alpha + k) P_{k,l} h$$

漸化式 3: $k = 1, 2, \ldots, n-1$ のとき

$$P_{k+1,k} = P_{k,k-1} + (\alpha + k) h$$

証明

まず

$$\tilde{\gamma} = (g')^{\alpha} \gamma$$

の両辺を微分すると

$$\tilde{\gamma}' = \alpha h \tilde{\gamma} + (g')^{\alpha+1} \gamma'$$

曲率の微分の変換則

証明の続き

証明 (続き)

よって

$$P_{1,0} = \alpha h$$

したがって $\tilde{\gamma}'$ は補題の式のように表される
また $P_{1,0}$ は $\deg_w P_{1,0} = 1$ の同次多項式

次に $k = 1, 2, \ldots, n-1$ のとき

- $\tilde{\gamma}^{(k)}$ は補題の式のように表される
- $P_{k,l}$ は $\deg_w P_{k,l} = k - l$ の同次多項式である

と仮定する

∘ $P_{k,l}$ が $h, h', \ldots, h^{(k-l-1)}$ の多項式であることに注意し $\tilde{\gamma}^{(k+1)}$ を計算する
∘ 3 つの漸化式が得られる
∘ 更に $\deg_w P_{k,l}$ を計算することができる

曲率の変換則

定理 1

$\gamma \in \mathcal{M}_n$

κ_i: γ の第 i 曲率 ($i = 1, 2, \ldots, n-1$)

$g \in \mathrm{Diff}\,(S^1)$

$\tilde{\gamma} = \gamma \cdot g$

$\tilde{\kappa}_i$: $\tilde{\gamma}$ の第 i 曲率

$\Longrightarrow l = 0, 1, 2, \ldots, n-3$ のとき

$$\tilde{\kappa}_{n-l-1} = (g')^{n-l}\kappa_{n-l-1} - P_{n,l} - \sum_{k=l+1}^{n-2} (g')^{n-k}\kappa_{n-k-1}P_{k,l}$$

また

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2\kappa_1 + \frac{n(n^2-1)}{12}S(g)$$

証明

曲線の微分の変換則を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^{(n)} &= \sum_{l=0}^{n-2} P_{n,l}\tilde{\gamma}^{(l)} - (g')^n \kappa_{n-1}\tilde{\gamma} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-2}(g')^{n-k}\kappa_{n-k-1}\left(\tilde{\gamma}^{(k)} - \sum_{l=0}^{k-1} P_{k,l}\tilde{\gamma}^{(l)}\right)\end{aligned}$$

よって定理の第 1 式および

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2\kappa_1 - P_{n,n-2}$$

が得られる
さらに漸化式を用いて $P_{n,n-2}$ を計算する

$\mathcal{M}_2$ の軌道への同変射影

$n = 3, 4, 5, \ldots$
$\gamma \in \mathcal{M}_n$
κ_1: γ の第 1 曲率
$\bar{\gamma} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン平面曲線 s.t.

$$\text{等積中心アファイン曲率} = \frac{6}{n(n^2-1)}\kappa_1$$

更に $\mathrm{Diff}\,(S^1)$ の作用を考える

定理 2

$\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_2$ ならば γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道への同変写像を定める:

$$\overline{\gamma \cdot g} = \bar{\gamma} \cdot g \quad (g \in \mathrm{Diff}\,(S^1))$$

証明

定理 1 より第 1 曲率の変換則は

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2 \kappa_1 + \frac{n(n^2-1)}{12} S(g)$$

$\bar{\kappa}_1$, $\bar{\tilde{\kappa}}_1$ を $\bar{\gamma}$, $\overline{\gamma \cdot g}$ の等積中心アファイン曲率とする
このとき

$$\frac{n(n^2-1)}{6} \bar{\tilde{\kappa}}_1 = (g')^2 \cdot \frac{n(n^2-1)}{6} \bar{\kappa}_1 + \frac{n(n^2-1)}{12} S(g)$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{\tilde{\kappa}}_1 = (g')^2 \bar{\kappa}_1 + \frac{1}{2} S(g)$$

これは $n = 2$ のときの等積中心アファイン曲率の変換則

例

$\mathcal{M}_{2m}$ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への同変射影

例 4 ($\mathcal{M}_{2m}$ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への同変射影)

$m = 2, 3, 4, \ldots$

$\gamma \in \mathcal{M}_{2m}$: 例 2 の定曲率等積中心アファイン閉曲線

$$\gamma(s) = (\cos \lambda_1 s, \sin \lambda_1 s, \ldots, \cos \lambda_m s, \mu \sin \lambda_m s) \quad (s \in S^1)$$

$\circ$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$: 互いに異なる自然数

$\circ$ $\displaystyle \frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$

$\circ$ $t^{2m} + \kappa_1 t^{2m-2} + \cdots + \kappa_{2m-1} = (t^2 + \lambda_1^2) \cdots (t^2 + \lambda_m^2)$

特に

$$\kappa_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_m^2$$

例 4 (続き)

ここで

$$\lambda_1 := l, \quad \lambda_2 := 3l, \quad \dots, \quad \lambda_m := (2m-1)l \quad (l \in \mathbf{N})$$

このとき

$$\frac{6}{2m\{(2m)^2-1\}}\kappa_1 = l^2$$

よって

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos ls, \frac{1}{l}\sin ls\right) \quad (s \in S^1)$$

特に $\bar{\gamma}$ は回転数 l の等積中心アファイン平面閉曲線
すなわち $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_{2,l}$
γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への同変写像を定める

例 5 ($\mathcal{M}_{2m+1}$ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への同変射影)

$m \in \mathrm{N}$

$\gamma \in \mathcal{M}_{2m+1}$: 例 3 の定曲率等積中心アファイン閉曲線

$$\gamma(s) = (\cos\lambda_1 s, \sin\lambda_1 s, \ldots, \cos\lambda_m s, \sin\lambda_m s, \mu) \quad (s \in S^1)$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$: 互いに異なる自然数
- $\displaystyle \frac{1}{\mu} = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^3 \prod_{i<j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$
- $t^{2m+1} + \kappa_1 t^{2m-1} + \cdots + \kappa_{2m} = t(t^2 + \lambda_1^2) \cdots (t^2 + \lambda_m^2)$

特に

$$\kappa_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_m^2$$

例 5 (続き)

ここで

$$\lambda_1 := 2l, \quad \lambda_2 := 4l, \quad \ldots, \quad \lambda_m := 2ml \quad (l \in \mathbf{N})$$

このとき

$$\frac{6}{(2m+1)\{(2m+1)^2-1\}}\kappa_1 = l^2$$

よって

$$\bar{\gamma}(s) = \left(\cos ls, \frac{1}{l}\sin ls\right) \quad (s \in S^1)$$

特に $\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_{2,l}$
γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\mathcal{M}_{2,l}$ への同変写像を定める

$\mathcal{M}_3$ の軌道への同変射影

$n = 4, 5, 6, \ldots$
$\gamma \in \mathcal{M}_n$
κ_1, κ_2: γ の第 1 曲率, 第 2 曲率
$\bar{\gamma} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$: 等積中心アファイン空間曲線 s.t.

$$\text{第 1 曲率} = \frac{24}{n(n^2-1)}\kappa_1$$

$$\text{第 2 曲率} = \frac{24}{n(n^2-1)(n-2)}\kappa_2$$

更に $\mathrm{Diff}(S^1)$ の作用を考える

定理 3

$\bar{\gamma} \in \mathcal{M}_3$ ならば γ から $\bar{\gamma}$ への対応は γ の軌道から $\bar{\gamma}$ の軌道への同変写像を定める

$\mathcal{M}_3$ の軌道への同変射影

証明

証明

定理 1 より第 1 曲率の変換則は

$$\tilde{\kappa}_1 = (g')^2\kappa_1 + \frac{n(n^2-1)}{12}S(g)$$

第 2 曲率の変換則は

$$\tilde{\kappa}_2 = (g')^3\kappa_2 - P_{n,n-3} - (g')^2\kappa_1 P_{n-2,n-3}$$

更に計算すると

$$P_{n-2,n-3} = -(n-2)h, \quad P_{n,n-3} = -\frac{n(n^2-1)(n-2)}{24}(S(g))'$$

以下は定理 2 の証明と同様

例 4, 例 5 と同様の例を考えることができる

ご清聴ありがとうございました