

非加法的エントロピーを加法的エントロピーにする方法

—AdS/CFT対応の情報幾何バージョン—

福岡大学理学部応用数学科

田中 勝



応用数学科

Applied Mathematics

Ω : 集合 $\mathcal{F}$: Ω 上の σ -加法族

$(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間

$\mathcal{M}$: 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上で互いに絶対連続であるような非負測度の集合

適当なルベーク測度を定めてラドン・ニコディム導関数の集合について考える

$\mathcal{P}$: ラドン・ニコディム導関数の集合

$\check{\mathcal{P}}$: 確率密度関数の集合

$\mathcal{R}$: 可測関数の集合

平行移動 : $\mathcal{P} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P} : (p, u) \mapsto \exp_{\tau}(u) \otimes_{\tau} p$

$$\exp_{\tau}(f) = \{1 + (1 - \tau) f\}^{\frac{1}{1-\tau}} \quad \ln_{\tau} f = \frac{1}{1-\tau} (f^{1-\tau} - 1)$$

$$f \otimes_{\tau} g = (f^{1-\tau} + g^{1-\tau} - 1)^{\frac{1}{1-\tau}} \quad f \oslash_{\tau} g = (f^{1-\tau} - g^{1-\tau} + 1)^{\frac{1}{1-\tau}}$$

.....

$\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ に対して

$$u = \ln_{\tau}(p_2 \oslash_{\tau} p_1) \text{ とすれば, } p_2 = \exp_{\tau}(u) \otimes_{\tau} p_1$$

$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \exp_{\tau}(u_2) \otimes_{\tau} \{\exp_{\tau}(u_1) \otimes_{\tau} p_1\} &= \{\exp_{\tau}(u_2) \otimes_{\tau} \exp_{\tau}(u_1)\} \otimes_{\tau} p_1 \\ &= \exp_{\tau}(u_2 + u_1) \otimes_{\tau} p_1 \end{aligned}$$

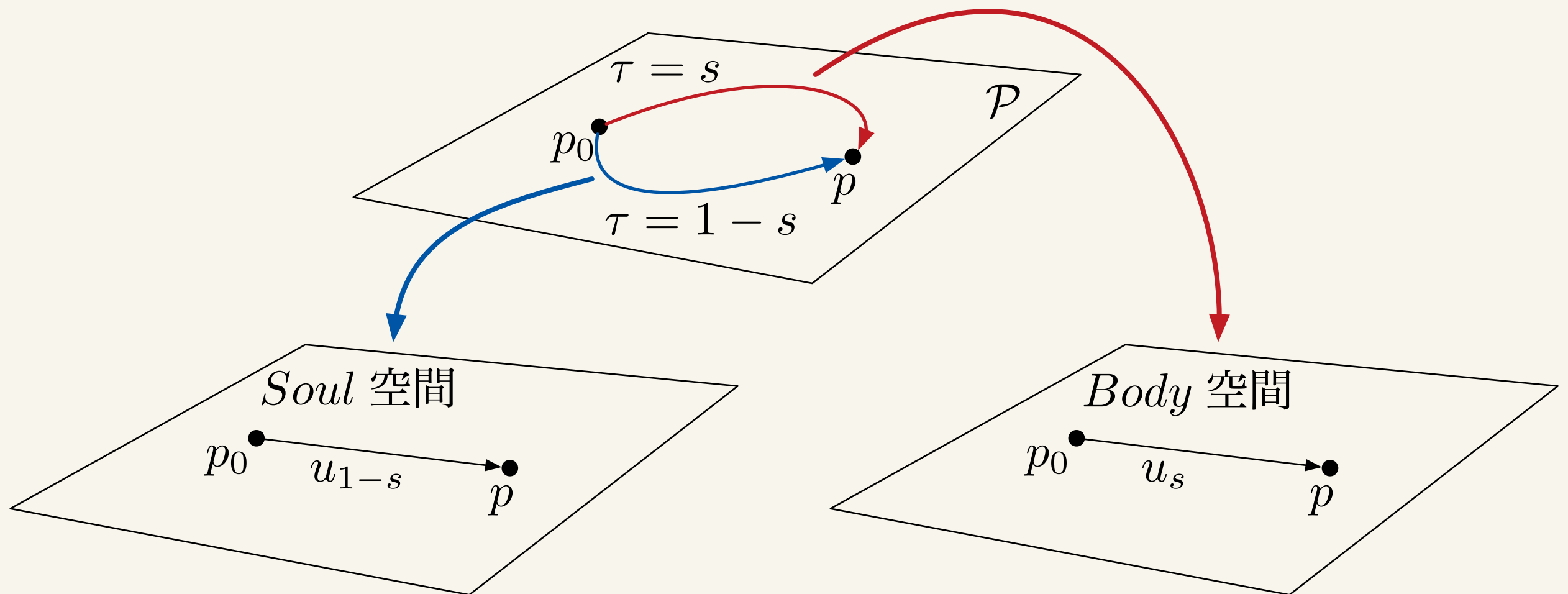
したがって, $\mathcal{P}$ は τ -アファイン空間である

$Body$ 空間 : $\tau = s$ のアファイン空間

$Soul$ 空間 : $\tau = 1 - s$ のアファイン空間

$Body$ 空間と $Soul$ 空間の元は互いにヘルダー共役な関係にある

$\mathcal{P}$ の元は $Body$ 空間と $Soul$ 空間の元として 2 種類の平行移動で表される



τ -アファイン空間上で原点を p_0 とし u_τ だけ平行移動する

$$p = \exp_\tau(u_\tau) \otimes_\tau p_0$$

このとき, τ -対数尤度関数を次のように定義する

$${}^\tau \ell = \ln_\tau p = u_\tau + \ln_\tau p_0$$

$Body$ 空間	${}^B \ell = \ln_s p = u_s + \ln_s p_0$	${}^B \ell = \frac{1}{1-s} (p^{1-s} - 1)$
$Soul$ 空間	${}^S \ell = \ln_{1-s} p = u_{1-s} + \ln_{1-s} p_0$	${}^S \ell = \frac{1}{s} (p^s - 1)$

$Body$ 世界の量と $Soul$ 世界の量の積を確率変数について積分する

$$\langle Soul \text{ 世界の量} | Body \text{ 世界の量} \rangle = \int dx (Soul \text{ 世界の量}) (Body \text{ 世界の量})$$

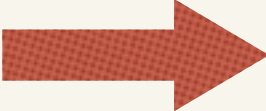
素朴なエントロピー

$$\left\langle \frac{S}{\ell} \middle| - \frac{B}{\ell} \right\rangle = \frac{1}{s(1-s)} \int dx (p^s - p + p^{1-s} - \mathbf{1})$$

$$\int dx \mathbf{1} \rightarrow \text{発散}$$

$$\frac{S}{\ell} = \frac{1}{s} (p^s - 1)$$

$$\frac{B}{\ell} = \frac{1}{1-s} (p^{1-s} - 1)$$

発散の原因を取り除く  くり込み

$$p_* = p \oslash_{1-s} 0 = (p^s + 1)^{\frac{1}{s}}$$

素粒子理論での波動関数のくり込みに対応している

くり込まれた τ -対数尤度関数

$${}_s^S \ell_* = \ln_{1-s} p_* = \frac{1}{s} p^s$$

$$S = \left\langle {}_s^S \ell_* \middle| - {}_s^B \ell \right\rangle = \frac{1}{s(1-s)} \int dx (p^s - p)$$

$$\text{確率密度関数 : } \check{p} \qquad \Xi = \int dx \check{p}^s$$

$$\text{共形エントロピー} \qquad Sc = \frac{s}{\Xi} S(\check{p})$$

離散分布で定義されるエントロピーから連続分布のエントロピーを導出

同様の発散する項が現れる

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad (i = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty)$$

$$\begin{aligned} S &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i) \Delta x \log (p(x_i) \Delta x) \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i) \Delta x \log p(x_i) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i) \Delta x \log \Delta x \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \log p(x) - \boxed{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x} \end{aligned}$$

くり込まれた τ -対数尤度の役割

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \log p(x)$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 1} (\Delta x)^s (\Delta x)^{1-s} \frac{1}{s} p(x_i)^s \frac{1}{1-s} \left(p(x_i)^{1-s} - 1 \right)$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} (p(x_i) \Delta x)^s (\Delta x)^{1-s} \frac{1}{1-s} \left(p(x_i)^{1-s} - 1 \right)$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} (p(x_i) \Delta x)^s \left\{ \frac{1}{1-s} \left((p(x_i) \Delta x)^{1-s} - 1 \right) - \frac{1}{1-s} \left((\Delta x)^{1-s} - 1 \right) \right\}$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x_i) \Delta x \{ \log (p(x_i) \Delta x) - \log \Delta x \}$$

Rényi エントロピー $S_{Rényi} = \frac{1}{1-s} \log \int dx \check{p}^s$

Tsallis エントロピー $S_{Tsallis} = \frac{1}{1-s} \left(\int dx \check{p}^s - 1 \right)$

Rényi エントロピー, エントロピー, 共形エントロピー, Tsallis エントロピーの関係

$$\exp(S_{Rényi}) = \exp_s(s S) = \exp_s(\Xi S c) = \exp_s(S_{Tsallis})$$

2 種類の恒等式

$$\ln_s(fg) = g^{1-s} \ln_s f + f^{1-s} \ln_s g - (1-s) \ln_s f \ln_s g \quad \text{Tsallis 型}$$

$$\ln_s(fg) = \ln_s f + \ln_s g + (1-s) \ln_s f \ln_s g \quad \text{劣モジュラー型}$$

事象 X と Y が独立のとき

Tsallis エントロピー

$$S_{Tsallis}(\check{p}_X \check{p}_Y) = S_{Tsallis}(\check{p}_X) + S_{Tsallis}(\check{p}_Y) \bigoplus (1-s) S_{Tsallis}(\check{p}_X) S_{Tsallis}(\check{p}_Y)$$

エントロピーと共形エントロピー

$$\frac{s}{\Xi_X \Xi_Y} S(\check{p}_X \check{p}_Y) = \frac{s}{\Xi_X} S(\check{p}_X) + \frac{s}{\Xi_Y} S(\check{p}_Y) - (1-s) \frac{s}{\Xi_X} S(\check{p}_X) \frac{s}{\Xi_Y} S(\check{p}_Y)$$

$$Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) = Sc(\check{p}_X) + Sc(\check{p}_Y) \bigominus (1-s) Sc(\check{p}_X) Sc(\check{p}_Y)$$

$$\bar{D}^{\tau}(p_1 \| p_2) = \frac{1}{\tau(1-\tau)} \int dx \{ \tau p_1 + (1-\tau) p_2 - p_1^{\tau} p_2^{1-\tau} \}$$

$$\bar{D}^B(p_1 \| p_2) = \bar{D}^S(p_2 \| p_1)$$

一般化ピタゴラスの定理

$$\bar{D}^{\tau}(p_1 \| p_2) + \bar{D}^{\tau}(p_2 \| p_3) = \bar{D}^{\tau}(p_1 \| p_3) + \int dx \ln_{1-\tau}(p_1 \oslash_{1-\tau} p_2) \ln_{\tau}(p_3 \oslash_{\tau} p_2)$$

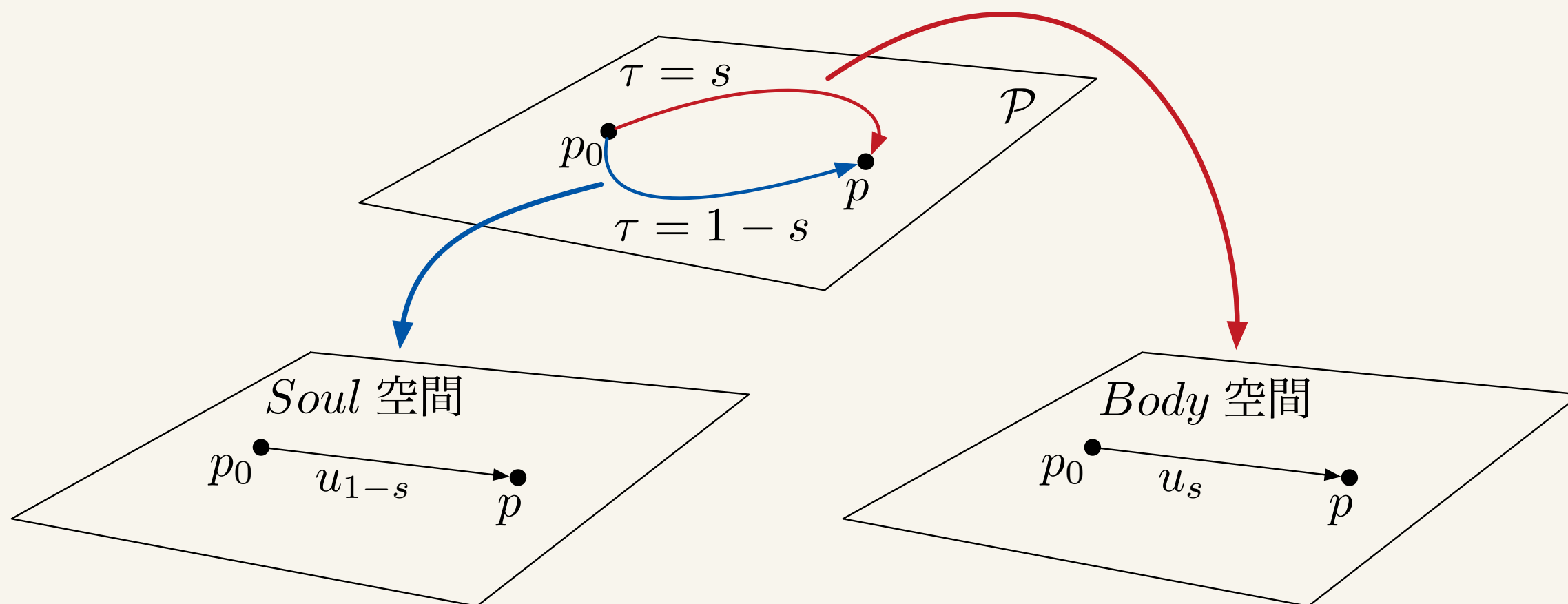
$Body$ 空間上に τ -アファイン座標系を導入する

$Soul$ 空間上にはヘルダー共役を通して $Body$ 空間上の座標系が入る

可測関数の集合 $\mathcal{R}$ の部分空間として V_B^r を定義する

$$\text{原点を } p_0 \text{ とするとき, } V_B^r(p_0) = \left\{ u_s \left| u_s = \sum_{i=1}^r \theta^i t_i(x) \right. \right\}$$

τ -アファイン座標系 : $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r)$



スコア関数

$$\overset{B}{\ell}_i = \frac{\partial \ln_s p}{\partial \theta^i} = p^{1-s} \frac{\partial \log p}{\partial \theta^i} \qquad \overset{S}{\ell}_j = \frac{\partial \ln_{1-s} p}{\partial \theta^j} = p^s \frac{\partial \log p}{\partial \theta^j}$$

規格化のための因子

$$C = \int dx \exp_s \left(\sum_{i=1}^r \theta^i t_i(x) \right) \otimes_s p_0 = \exp_s(\psi_B)$$

$$\psi_B = \ln_s C$$

確率密度関数

$$\check{p} = \frac{1}{C} p = \frac{1}{C} (\exp_s(u_s) \otimes_s p_0)$$

$$\bar{D}^{\tau}(p_1 \| p_2) = \frac{1}{\tau(1-\tau)} \int dx \{ \tau p_1 + (1-\tau) p_2 - p_1^{\tau} p_2^{1-\tau} \}$$

共形ダイバージェンス

$\forall \check{p}_1, \check{p}_2 \in \check{\mathcal{P}}$ に対して

$${}_s C_2^{1-s} \bar{D}^B(\check{p}_1 \| \check{p}_2) = \frac{d}{dt} \{ (1-t) \psi_B(\theta_1) + t \psi_B(\theta_2) - \psi_B((1-t)\theta_1 + t\theta_2) \} \Big|_{t=0}$$

ルジャンドル変換 $\eta_i = \frac{\partial \psi_B(\theta)}{\partial \theta^i} = \int dx \check{p}^s t_i(x)$

$${}_s \bar{D}^B(\check{p} \| p_0) = {}_s \bar{D}^S(p_0 \| \check{p}) = \sum_{i=1}^r \theta^i \frac{\partial \psi_B(\theta)}{\partial \theta^i} - \psi_B(\theta) = \sum_{i=1}^r \theta^i \eta_i - \psi_B(\theta) = \varphi_S(\eta)$$

確率密度関数 $\check{p} = \frac{1}{C} p$

$$\check{p} = \exp_s \left(C^{-(1-s)} \left(\sum_{i=1}^r \theta^i t_i(x) - \psi_B + \ln_s p_0 \right) \right)$$

$$C^{-1} = \exp_s(\xi^0)$$

$$\xi^0 = -C^{-(1-s)} \psi_B \quad \xi^i = C^{-(1-s)} \theta^i$$

ξ -座標表示 $\check{p} = \exp_s(\xi^0 p_0^{1-s} + \xi^i t_i(x)) \otimes_s p_0$

十分統計量の定義の拡張と見なせば, $t_i(x)$ は ξ^i の十分統計量である

平行移動によるスケールの変化を積極的に利用する

スケール変換 $\bar{p} = \exp_{\tau} \left(\check{p}^{1-\tau} \ln_{\tau} \left(\exp_s \left(\frac{2\tau-1}{2s-1} \theta^0 \right) \right) \right) \otimes_{\tau} \check{p}$

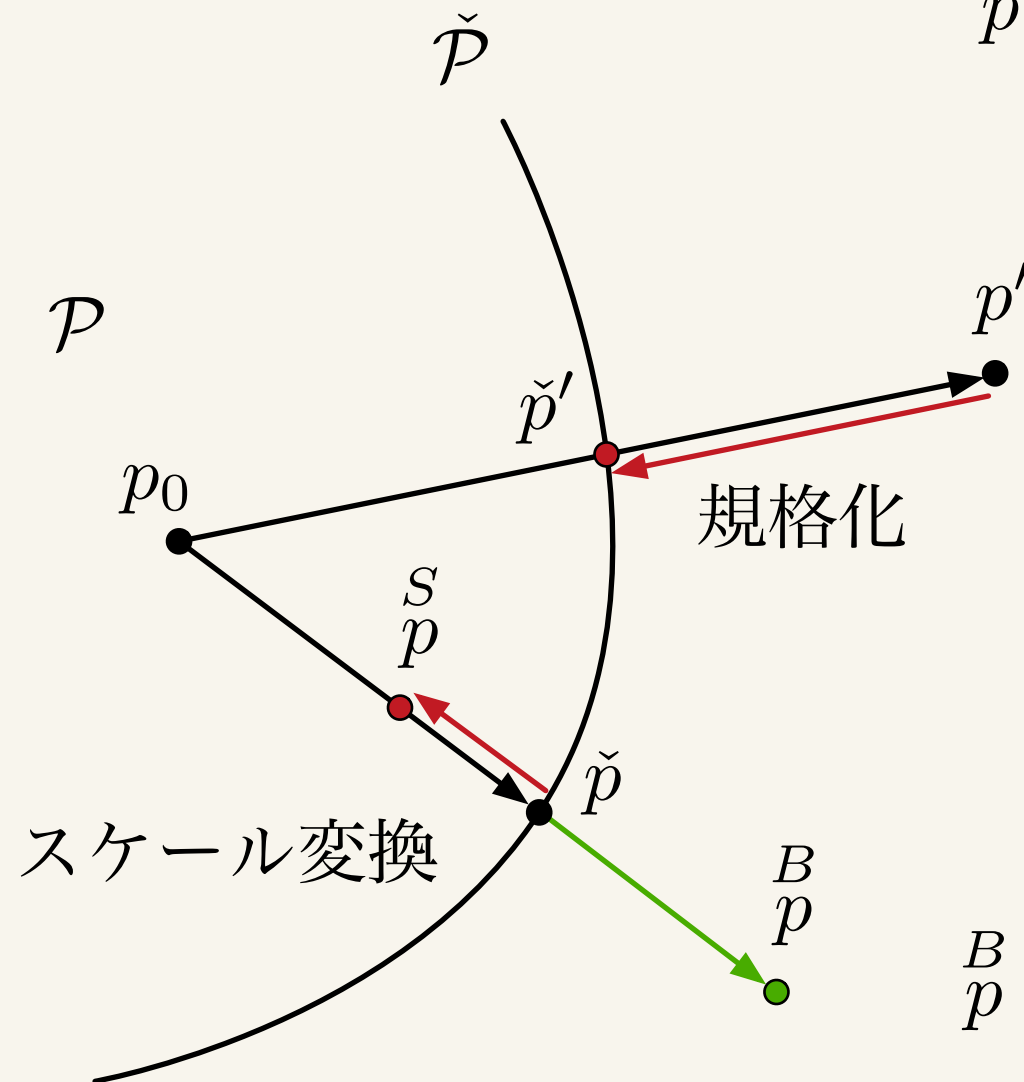
$$fp = \exp_{\tau} (p^{1-\tau} \ln_{\tau} f) \otimes_{\tau} p \text{ より, } \bar{p} = \exp_s \left(\frac{2\tau-1}{2s-1} \theta^0 \right) \check{p}$$

$$\frac{B}{p} = \exp_s (\check{p}^{1-s} \theta^0) \otimes_s \check{p} \quad \frac{S}{p} = \exp_{1-s} (\check{p}^s \ln_{1-s} (\exp_s (-\theta^0))) \otimes_{1-s} \check{p}$$

$$\tau\text{-アファイン座標系} : (\theta^0, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^r)$$

$$p' = \exp_s(\theta^i t_i(x)) \otimes_s p_0$$

$$\check{p}' = \frac{1}{C} p' = \exp_s(\xi^i t_i(x) + \xi^0 p_0^{1-s}) \otimes_s p_0$$

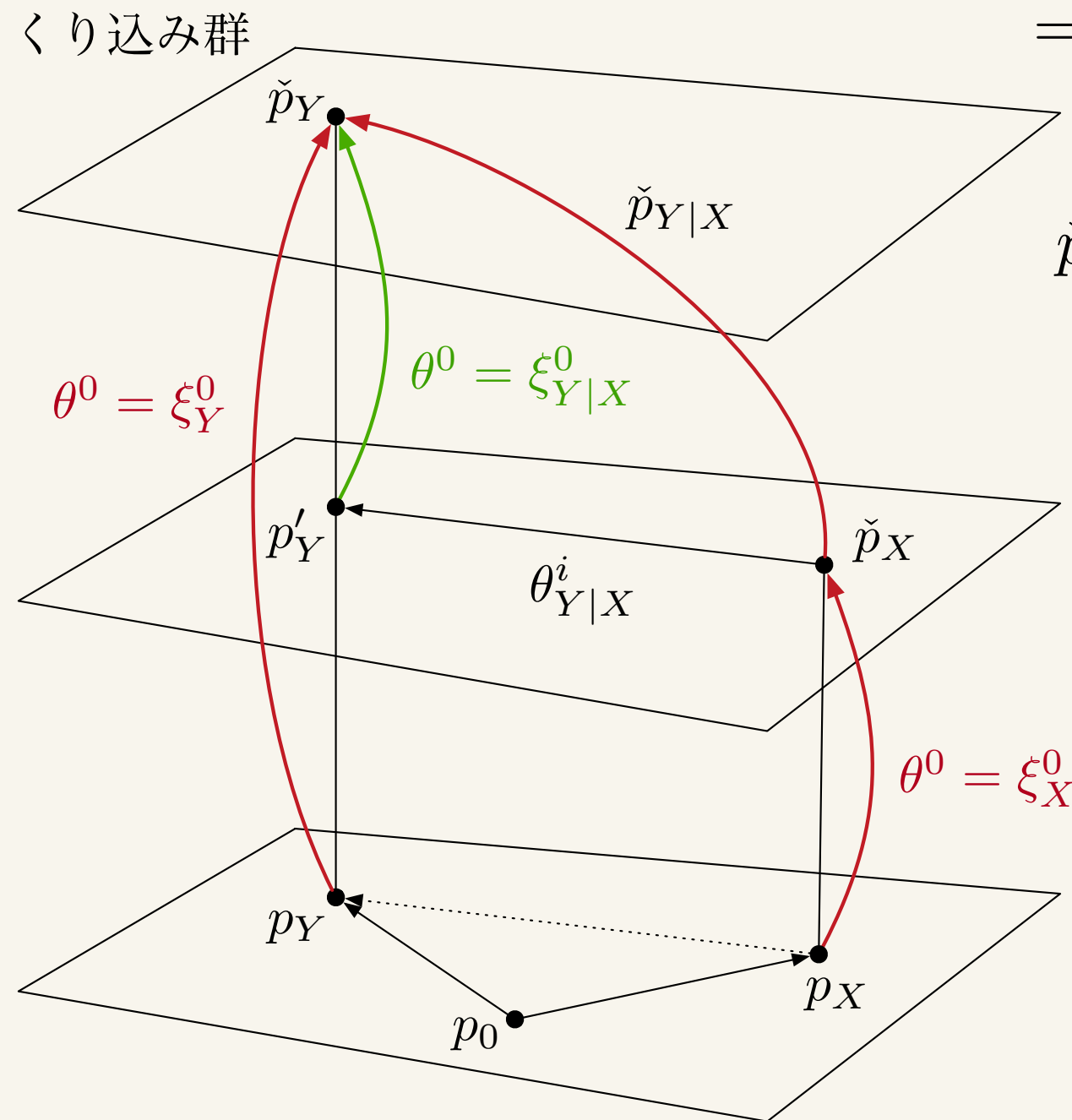


$$\check{p} = \exp_s(\check{p}^{1-s} \theta^0) \otimes_s \check{p}$$

$$\check{p}^s = \exp_{1-s}(\check{p}^s \ln_{1-s}(\exp_s(-\theta^0))) \otimes_{1-s} \check{p}$$

条件付き確率密度関数

$$\begin{aligned}\check{p}_Y &= \exp_s \left(\xi_Y^0 p_0^{1-s} + \xi_Y^i t_i(x) \right) \otimes_s p_0 \\ &= \exp_s \left(\xi_{Y|X}^0 \check{p}_X^{1-s} + \xi_{Y|X}^i t_i(x) \right) \otimes_s \check{p}_X \\ &= \check{p}_X \exp_s \left(\xi_{Y|X}^0 + \xi_{Y|X}^i t_i(x) \check{p}_X^{s-1} \right)\end{aligned}$$



$$\check{p}_{Y|X} = \exp_s \left(\xi_{Y|X}^0 + \xi_{Y|X}^i t_i(x) \check{p}_X^{s-1} \right)$$

$$\xi_Y^0 = \xi_{Y|X}^0 + \xi_X^0 + (1-s) \xi_{Y|X}^0 \xi_X^0$$

$$\xi_Y^i = \xi_{Y|X}^i + \xi_X^i + (1-s) \xi_{Y|X}^0 \xi_X^i$$

τ -アファイン座標の更新則

$$\begin{aligned}\Delta^\alpha &= \xi_Y^\alpha - \xi_X^\alpha \\ &= \xi_{Y|X}^\alpha + (1-s) \xi_{Y|X}^0 \xi_X^\alpha\end{aligned}$$

$$\frac{B}{\ell} = \frac{1}{1-s} \left\{ \check{p}^{1-s} (1 + (1-s)\theta^0) - 1 \right\} \quad \frac{S}{\ell} = \frac{1}{s} \left\{ \check{p}^s (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{s}{1-s}} - 1 \right\}$$

.....

$$\frac{B}{\ell}_0 = \check{p}^{1-s}$$

$$\frac{S}{\ell}_0 = -\check{p}^s (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{2s-1}{1-s}}$$

$$\frac{B}{\ell}_i = (1 + (1-s)\theta^0) \check{p}^{1-s} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i}$$

$$\frac{S}{\ell}_j = \check{p}^s \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j} (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{s}{1-s}}$$

.....

$$\frac{B}{\ell}_{00} = 0$$

$$\frac{S}{\ell}_{00} = (2s-1) (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{3s-2}{1-s}} \check{p}^s$$

$$\frac{B}{\ell}_{0i} = (1-s) \check{p}^{1-s} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i}$$

$$\frac{S}{\ell}_{0j} = -s (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{2s-1}{1-s}} \check{p}^s \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j}$$

$$\frac{B}{\ell}_{ij} = (1 + (1-s)\theta^0) \check{p}^{1-s} \left((1-s) \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial^2 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \right)$$

$$\frac{S}{\ell}_{ij} = (1 - (1-s)\theta^0)^{\frac{s}{1-s}} \check{p}^s \left(s \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^i} \frac{\partial \log \check{p}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial^2 \log \check{p}}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \right)$$

$$g_{\alpha\beta} = \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_\alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_\beta \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \left(\begin{array}{c|cccc} - (1 - (1 - s) \theta^0)^{\frac{2s-1}{1-s}} & & & & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & (1 + (1 - s) \theta^0) (1 - (1 - s) \theta^0)^{\frac{s}{1-s}} & (g^{Fisher})_{ij} & & \end{array} \right)$$

双対接続

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^B = \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_\gamma \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\rangle \qquad \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^S = \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_{\alpha\beta} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_\gamma \end{matrix} \right\rangle$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \theta^\gamma} = \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_{\gamma\alpha} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_\beta \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_\alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_{\gamma\beta} \end{matrix} \right\rangle = \Gamma_{\gamma\alpha,\beta}^S + \Gamma_{\gamma\beta,\alpha}^B \qquad \text{計量的}$$

リーマンテンソルの対称性

$$\overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \overset{S}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{B}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta} + \overset{S}{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

リーマンテンソルの反対称性

$$\overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{B}{R}_{\alpha\beta\delta\gamma} \quad \overset{S}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{S}{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

$$\overset{B}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{S}{R}_{\beta\alpha\gamma\delta}$$

リッチテンソルの対称性

$$\overset{B}{R}_{\alpha\beta} = \overset{B}{R}_{\beta\alpha} \quad \overset{S}{R}_{\alpha\beta} = \overset{S}{R}_{\beta\alpha}$$

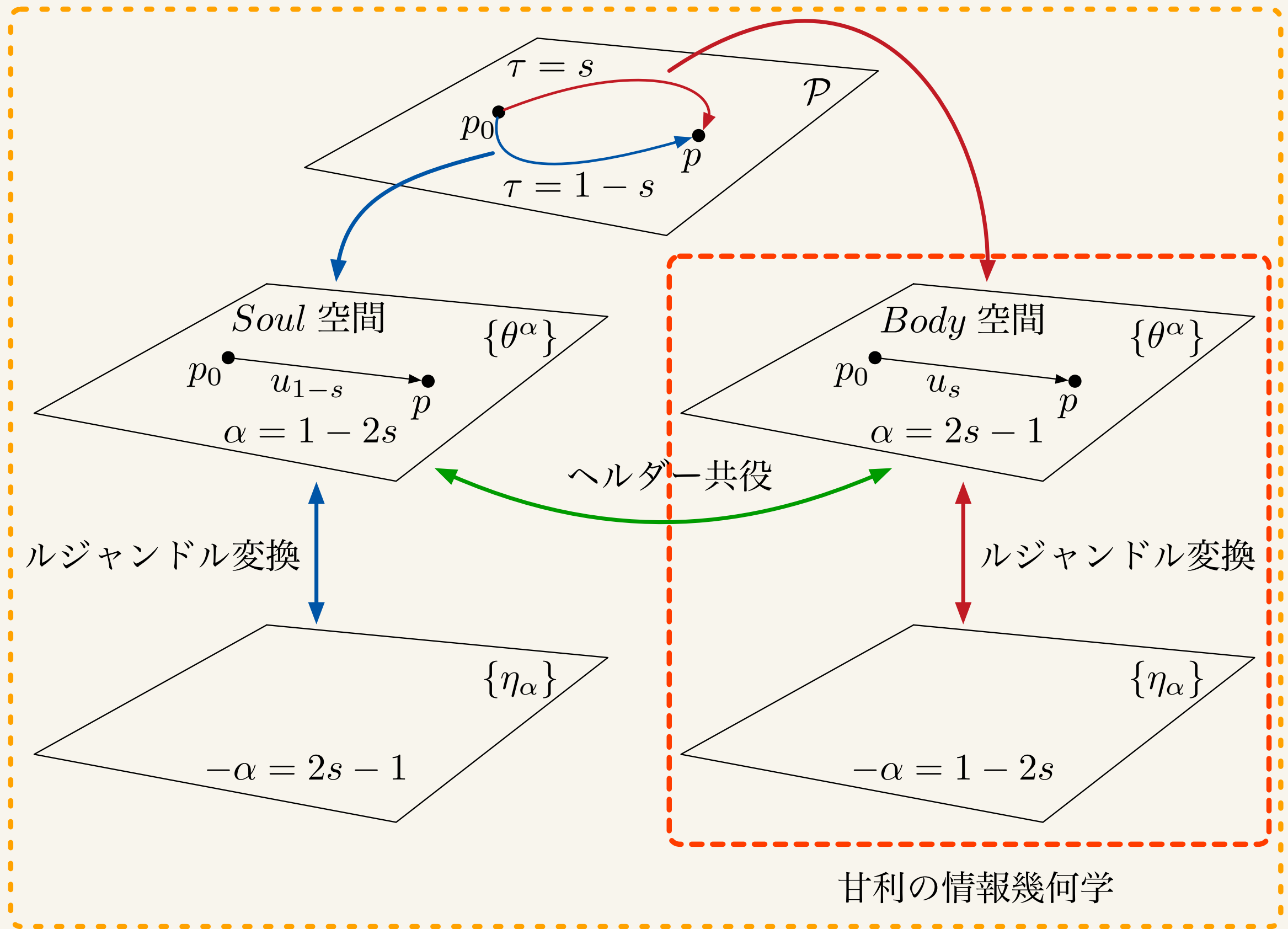
くり込まれた τ -対数尤度 $\ell_*^S = \frac{1}{s} \left(1 - (1-s)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \check{p}^s$

$$\begin{aligned} S_{\theta^0} &= \left\langle \left. \ell_*^S \right| - \ell^B \right\rangle \\ &= \left(1 - (1-s)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \left(S - \frac{1}{s}\theta^0\right) \\ &= \left(1 - (1-s)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Xi}{s} \left(Sc - \frac{1}{\Xi}\theta^0\right) \end{aligned}$$

$$\Xi = \int dx \check{p}^s$$

共形エントロピー $Sc = \frac{s}{\Xi} S(\check{p})$

τ -情報幾何学



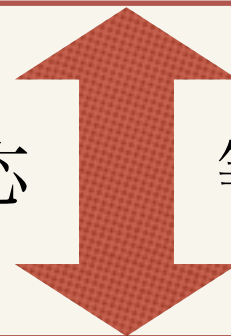
甘利の情報幾何学

非専門家のための AdS/CFT 対応入門, 中村 真 (2011) より

$SU(N_c)$ $N = 4$ Super Yang-Mills 理論

't Hooft 結合 $\lambda = g_{YM}^2 N_c \gg 1$ の量子場の理論
平坦な $3 + 1$ 次元時空上の共形場理論

AdS/CFT 対応



等価 Maldacena, 1997

$AdS_5 \times S^5$ 時空上の type II 超重力理論の古典論
時空の曲率が十分小さい極限で考える

証明はまだ無く, 予想である

現在では, 様々な対応が見出されホログラフィー原理と総称されることもある

ホログラフィー原理: 時空 M の重力理論 = 時空 ∂M 上の非重力理論

非専門家のための AdS/CFT 対応入門, 中村 真 (2011) より

余次元 1 が必要な理由をブラックホールと熱力学の類似性で説明してみる

ブラックホールと熱力学の法則

	熱力学	ブラックホール
第0法則	熱平衡では温度が一定	定常解では表面重力 κ (温度 T に対応) が一定
第1法則	$dE = T dS + \mu dN$	$dM = (\kappa / (8 \pi G_N)) dA + \mu dN$
第2法則	エントロピーは減少しない	ホライズンの面積 A は減少しない
第3法則	物理過程で温度をゼロに出来ない	物理過程で表面重力をゼロに出来ない

$T = \frac{\kappa}{2\pi}$

$S = \frac{A}{4G_N}$

各法則について対応が成立

非専門家のための AdS/CFT 対応入門, 中村 真 (2011) より

仮定 ブラックホールのエントロピー

➡ 何らかの $3 + 1$ 次元多自由度系のエントロピーに対応

エントロピーは示量性の量 ➡ 系の体積に比例する

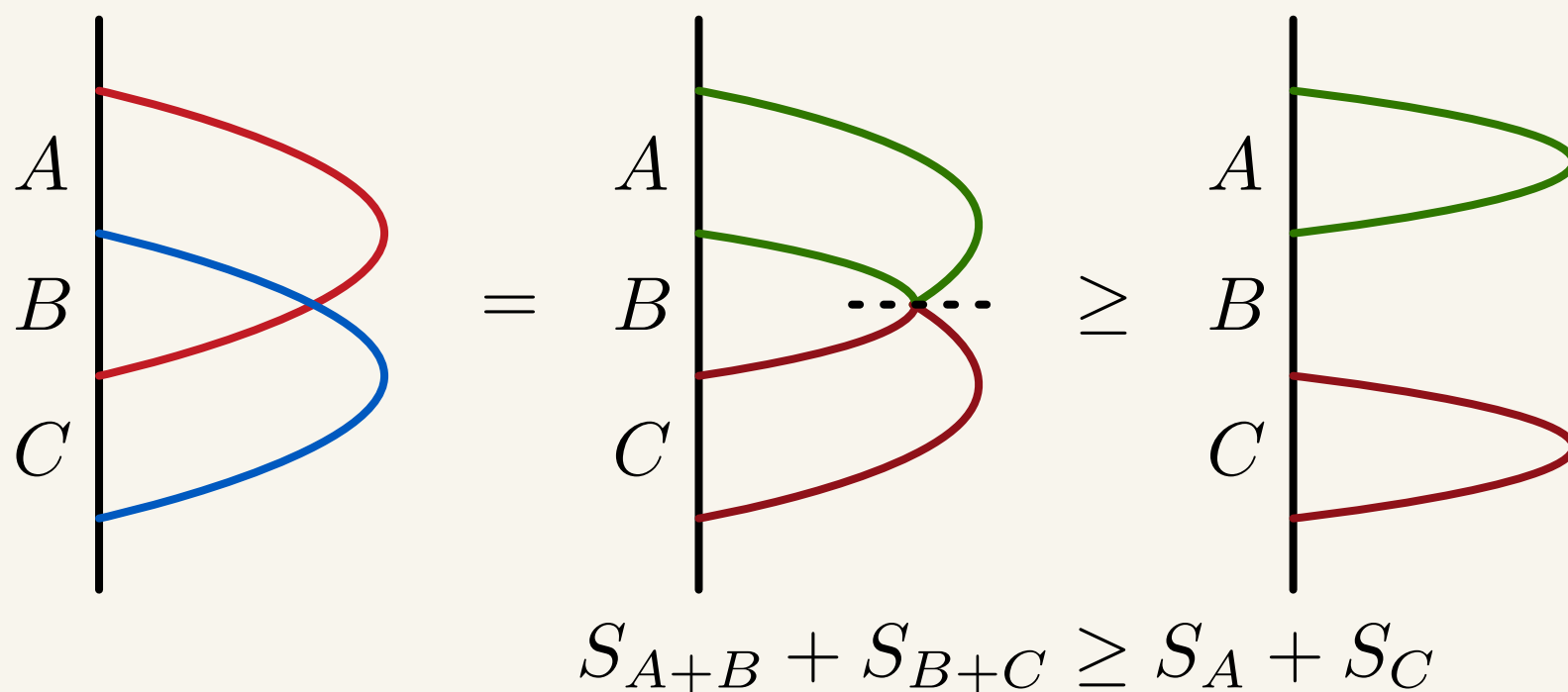
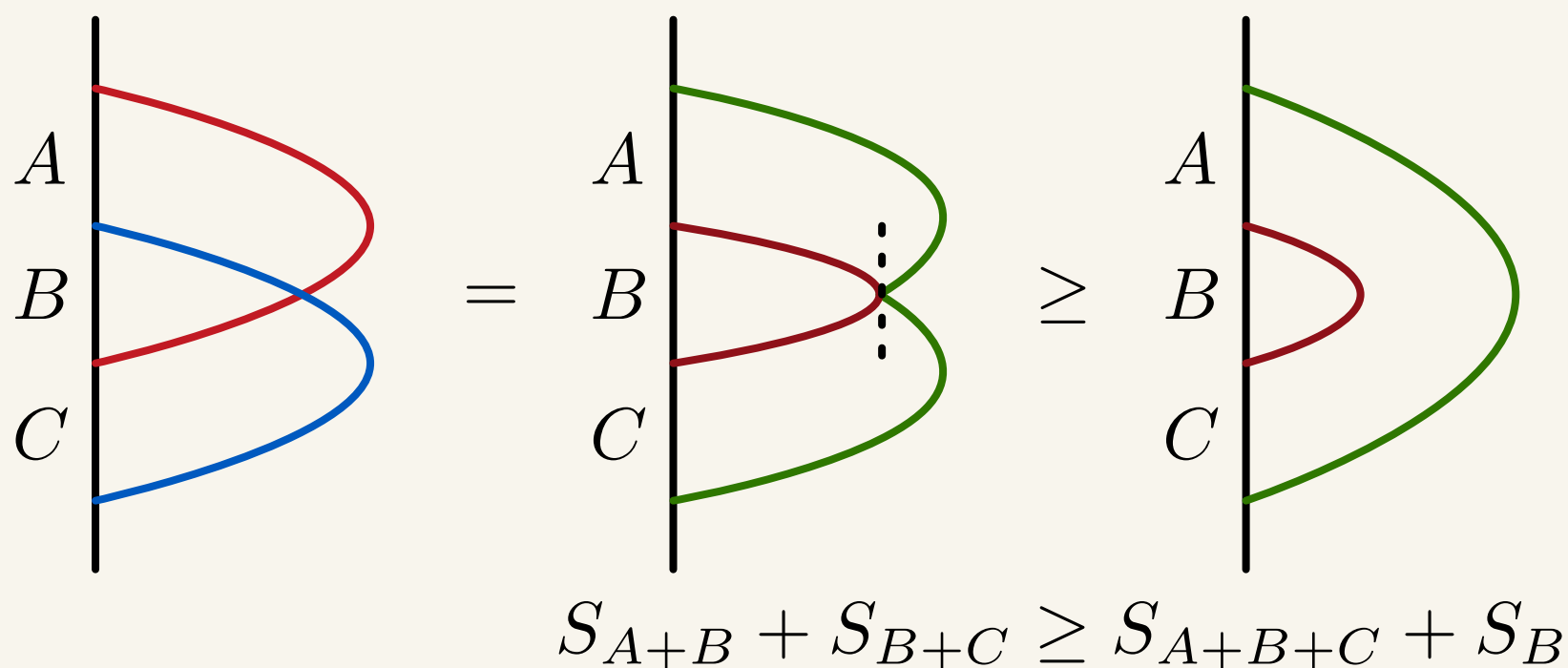
空間 3 次元の熱力学に対応 ➡ A はホライズンの面積というより体積

ブラックホールの定義に 3 次元ホライズンの直交方向が必要

第 5 番目の座標が, 重力理論側に必要

余次元を追加する利点

劣モジュラー性の AdS/CFT 対応による証明



Headrick-高柳, 2007

平田-高柳, 2006

θ^0 方向は, θ^i 方向と直交している

$$\left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_i \end{matrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{matrix} S \\ \ell_j \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B \\ \ell_0 \end{matrix} \right\rangle = 0$$

スケール変換の座標 θ^0 を追加すべき座標であると仮定する

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\left(1 - (1-s)\theta^0\right)^{\frac{2s-1}{1-s}} & 0 \dots 0 \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left(1 + (1-s)\theta^0\right) \left(1 - (1-s)\theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \left(g^{Fisher}\right)_{ij} \end{array} \right)$$

θ^0 方向 (余次元) は場の理論の繰り込み群における長さのスケールを表している

非加法的エントロピー（余次元 θ^0 を追加） **AdS/CFT対応のアナロジー（6）**

AdS/CFT 対応に習い，1次元 (θ^0 方向) 追加してエントロピーを加法的にする

$$S_{\theta^0} = \left(1 - (1 - s) \theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Xi}{s} \left(Sc - \frac{1}{\Xi} \theta^0\right)$$

$$Sc = \frac{1}{1-s} \left(1 - \frac{1}{\Xi}\right)$$

$$Sc_{\theta^0} = \frac{s}{\Xi} S_{\theta^0} = \left(1 - (1 - s) \theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \left(Sc - \frac{1}{\Xi} \theta^0\right)$$

$$Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) = Sc(\check{p}_X) + Sc(\check{p}_Y) - (1 - s) Sc(\check{p}_X) Sc(\check{p}_Y)$$

$$\overset{B}{p}_{XY} = \overset{B}{p}_X \overset{B}{p}_Y$$

$$S_{\theta^0} \left(\overset{B}{p}_X \overset{B}{p}_Y \right) = \left(1 - (1 - s) \theta^0\right)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Xi_X \Xi_Y}{s} \left(Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \theta^0 \right)$$

非加法的エントロピー（余次元 θ^0 を追加） **AdS/CFT対応のアナロジー（7）**

$$\begin{aligned} & Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \theta^0 \\ &= Sc(\check{p}_X) + Sc(\check{p}_Y) - (1-s) Sc(\check{p}_X) Sc(\check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \theta^0 \\ &= \left(Sc(\check{p}_X) - \frac{1}{\Xi_X} \theta^0 \right) + \left(Sc(\check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_Y} \theta^0 \right) \\ &+ \frac{1}{1-s} \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \left\{ (1-s) (\Xi_X + \Xi_Y - 1) \theta^0 - (\Xi_X - 1) (\Xi_Y - 1) \right\} \end{aligned}$$

$$\theta_{XY}^0 = \frac{1}{1-s} \frac{(\Xi_X - 1) (\Xi_Y - 1)}{(\Xi_X + \Xi_Y - 1)} \quad \check{p}_X \text{ と } \check{p}_Y \text{ のみで決まる量}$$

$$\theta^0 = \theta_{XY}^0 \text{ とおく}$$

$$Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \theta_{XY}^0 = \left(Sc(\check{p}_X) - \frac{1}{\Xi_X} \theta_{XY}^0 \right) + \left(Sc(\check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_Y} \theta_{XY}^0 \right)$$

非加法的エントロピー（余次元 θ^0 を追加） **AdS/CFT対応のアナロジー（8）**

非加法的エントロピーを加法的エントロピーへ

スケール変換

$$\theta_{XY}^0 = \frac{1}{1-s} \frac{(\Xi_X - 1)(\Xi_Y - 1)}{(\Xi_X + \Xi_Y - 1)}$$

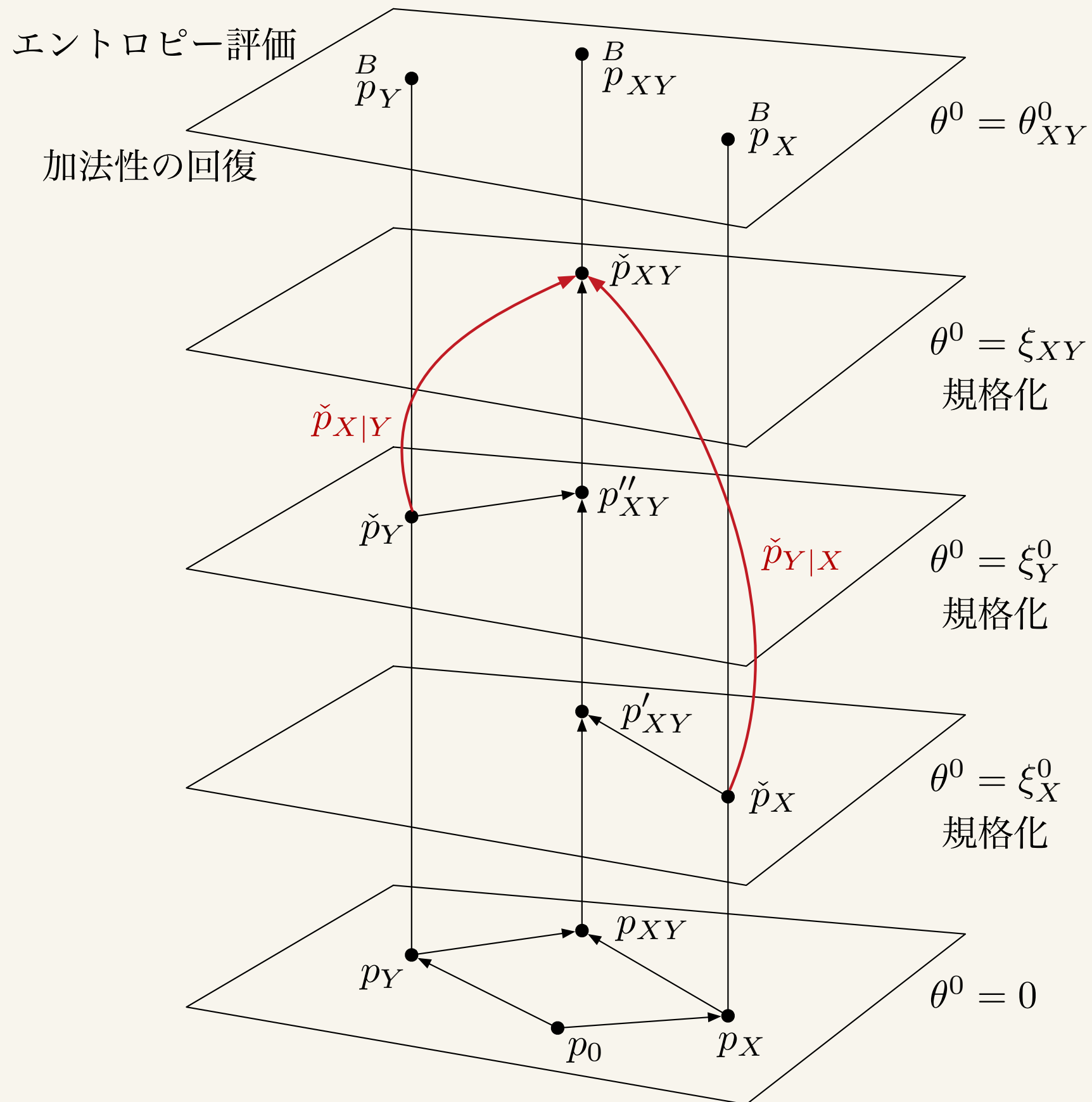
$$S_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_X \check{p}_Y)$$

$$\begin{aligned} &= (1 - (1-s)\theta_{XY}^0)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Xi_X \Xi_Y}{s} \left(Sc(\check{p}_X \check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_X \Xi_Y} \theta_{XY}^0 \right) \\ &= (1 - (1-s)\theta_{XY}^0)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Xi_X \Xi_Y}{s} \left\{ \left(Sc(\check{p}_X) - \frac{1}{\Xi_X} \theta_{XY}^0 \right) + \left(Sc(\check{p}_Y) - \frac{1}{\Xi_Y} \theta_{XY}^0 \right) \right\} \\ &= \Xi_Y S_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_X) + \Xi_X S_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_Y) \end{aligned}$$

加法的エントロピー

$$Sc_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_X \check{p}_Y) = Sc_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_X) + Sc_{\theta_{XY}^0}(\check{p}_Y)$$

非加法的エントロピー（余次元 θ^0 を追加） **AdS/CFT対応のアナロジー（9）**



Trotter 公式により短距離相互作用する d 次元量子系は $(d + 1)$ 古典系に変換される

Trotter 公式
$$e^{X+Y} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{X}{M}} e^{\frac{Y}{M}} \right)^M \quad M \text{ が余次元を表す}$$

X と Y は非可換な演算子

余次元を一つ追加すれば古典系で量子系を捉えることができる（場合がある）

ホログラフィー原理

エンタングルメント・エントロピー

劣モジュラー性

量子情報理論を古典的に捉えることができる？

妄想中

量子情報幾何学は τ -情報幾何学で捉えることができる？

余次元とは隠れた変数なのか？

$$\tau = q, \quad r = 2 \text{ とする}$$

$$p_q(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{Z_q} \left(1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} = \exp_q \left(C^{-(1-q)} \left(\sum_{i=1}^2 \theta^i x^i - \ln_q C \right) \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

$$Z_q = \begin{cases} \sqrt{\frac{3-q}{q-1}} \text{Beta} \left(\frac{3-q}{2(q-1)}, \frac{1}{2} \right) \sigma & \left(1 \leq q < \frac{5}{3} \right) \\ \sqrt{\frac{3-q}{1-q}} \text{Beta} \left(\frac{2-q}{1-q}, \frac{1}{2} \right) \sigma & (q < 1) \end{cases}$$

$$\text{制約条件} \quad 1 - \frac{1-q}{3-q} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \geq 0$$

τ -アファイン座標系

$$\theta^1 = \frac{2}{3-q} \left\{ 1 - (1-q) \frac{2}{3-q} \left(\frac{\mu}{2\sigma^2} \right) \right\}^{-1} \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \right)$$

$$\theta^2 = \frac{2}{3-q} \left\{ 1 - (1-q) \frac{2}{3-q} \left(\frac{\mu}{2\sigma^2} \right) \right\}^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$Z_q = A_q \sigma = A_q \left(\frac{2}{3-q} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + (1-q) \left(-\frac{1}{4} \frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C = Z_q \exp_q \left(-\frac{1}{4} \frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} \right)$$

$$= A_q \left(\frac{2}{3-q} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + (1-q) \left(-\frac{1}{4} \frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} \right) \right\}^{\frac{3-q}{2(1-q)}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

 A_q は q のみに依存する係数

$$\Xi_q = \int dx p_q(x; \mu, \sigma^2)^q = \frac{3-q}{2} Z_q^{1-q}$$

$$\theta^1 = C^{1-q} \Xi_q^{-1} \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \right)$$

$$\theta^2 = C^{1-q} \Xi_q^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \theta^1} = C^q \frac{3-q}{2} Z_q^{1-q} \left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^1}{\theta^2} \right) = C^q \Xi_q \mu$$

$$\frac{\partial C}{\partial \theta^2} = C \left\{ C^{q-1} \frac{3-q}{2} Z_q^{1-q} \frac{1}{4} \left(\frac{\theta^1}{\theta^2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \right) \right\} = C^q \Xi_q (\mu^2 + \sigma^2)$$

$$\psi_q(\theta) = \ln_q C = \frac{1}{1-q} (C^{1-q} - 1) = \ln_q Z_q - \frac{1}{4} \frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} Z_q^{1-q}$$

$$\frac{\partial \psi_q(\theta)}{\partial \theta^1} = \Xi_q \mu$$

$$\frac{\partial \psi_q(\theta)}{\partial \theta^2} = \Xi_q (\mu^2 + \sigma^2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \theta^i \partial \theta^j} = q C^{1-q} (g^{Fisher})_{ij}$$

コンフォーマル計量になっている

$$\frac{\partial p_q}{\partial \theta^i} = p_q^q \left\{ C^{-(1-q)} \left(x^i - \frac{\partial \psi_q}{\partial \theta^i} \right) - (1-q) C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \theta^i} \ln_q p_q \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \theta^1 \partial \theta^1} = \Xi_q \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\theta^2} \right) + \frac{2}{3-q} C^{q-1} \Xi_q^2 \frac{(1-q)^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^1}{\theta^2} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} = \Xi_q \frac{3-q}{2} \frac{1}{2} \frac{\theta^1}{(\theta^2)^2} + \frac{2}{3-q} C^{q-1} \Xi_q^2 \frac{(1-q)^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^1}{\theta^2} \right)^3$$

$$\frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \theta^2 \partial \theta^2} = \Xi_q \left\{ -\frac{7-3q}{4} \frac{1}{2} \frac{(\theta^1)^2}{(\theta^2)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\theta^2)^2} \right\} + \frac{2}{3-q} C^{q-1} \Xi_q^2 \frac{(1-q)^2}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^1}{\theta^2} \right)^4$$

$\lim_{q \rightarrow 1} \Xi_q = 1$ より, $q \rightarrow 1$ のとき正規分布のフィッシャー計量を再現する