第 15 章　ポートフォリオ理論　Part 2

1.　二証券からなるポートフォリオのリスクとリターン

1.1　二証券ポートフォリオのリターン

証券 A と証券 B から成るポートフォリオのリターンは，各証券の期待収益率にそれぞれの投資比率をウェイトした加重平均値として求められる。

$$E[\tilde{R}_p] = w_A E[\tilde{R}_A] + w_B E[\tilde{R}_B]$$

$E[\tilde{R}_p]$：証券 A と証券 B から成るポートフォリオの期待収益率

w_A，w_B：証券 A と証券 B の投資比率で $w_A + w_B = 1$

1.2　二証券ポートフォリオのリスク

証券 A と証券 B から成るポートフォリオのリスクは，期待収益率と異なり，各証券の標準偏差の加重平均を上回ったり下回ったりする。

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{R}_p] &= E[\{\tilde{R}_p - E(\tilde{R}_p)\}^2] = E[\{(w_A\tilde{R}_A + w_B\tilde{R}_B) - E(w_A\tilde{R}_A + w_B\tilde{R}_B)\}^2] \\
&= E[\{w_A(\tilde{R}_A - E(\tilde{R}_A)) + w_B(\tilde{R}_B - E(\tilde{R}_B))\}^2] \\
&= w_A{}^2 E[\{\tilde{R}_A - E(\tilde{R}_A)\}^2] + w_B{}^2 E[\{\tilde{R}_B - E(\tilde{R}_B)\}^2] \\
&\quad + 2w_A w_B E[\{R_A - E(\tilde{R}_A)\}\{R_B - E(\tilde{R}_B)\}] \\
&= w_A{}^2 Var[\tilde{R}_A] + w_B{}^2 Var[\tilde{R}_B] + 2w_A w_B Cov[\tilde{R}_A, \tilde{R}_B] \\
&= w_A{}^2\sigma_A{}^2 + w_B{}^2\sigma_B{}^2 + 2w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \\
&= \sigma_p{}^2
\end{aligned}$$

$$\sigma_p = \sqrt{Var[\tilde{R}_p]}$$

$Var[\tilde{R}_p] = \sigma_p{}^2$：証券 A と証券 B から成るポートフォリオの収益率の分散

σ_p：証券 A と証券 B から成るポートフォリオの収益率の標準偏差

2.　複数の証券からなるポートフォリオのリスクとリターン

2.1　複数証券ポートフォリオのリターン

異なる複数の証券から成るポートフォリオのリターンは，個別の証券の期待収益率にそれぞれの投資比率をウェイトした加重平均値として求められる。

$$\begin{aligned}
E[\tilde{R}_p] &= \sum_{i=1}^{n} w_i E[\tilde{R}_i] \\
&= w_1 E[\tilde{R}_1] + w_2 E[\tilde{R}_2] + \ldots + w_n E[\tilde{R}_n]
\end{aligned}$$

$E[\tilde{R}_p]$：n 個の証券から成るポートフォリオの期待収益率

w_i：証券 i の投資比率で，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

2.2　複数証券ポートフォリオのリスク

異なる複数の証券から成るポートフォリオのリスクは，期待収益率と異なり，各証券の標準偏差の加重平均を上回ったり下回ったりする。

$$
\begin{aligned}
Var[\tilde{R}_p] &= E[\{\tilde{R}_p - E(\tilde{R}_p)\}^2] = E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i\{R_i - E(\tilde{R}_i)\}\right\}^2\right] \\
&= w_1^2 E[\{R_1 - E(\tilde{R}_1)\}^2] + w_2^2 E[\{R_2 - E(\tilde{R}_2)\}^2] + \ldots + w_n^2 E[\{R_n - E(\tilde{R}_n)\}^2] \\
&\quad + 2\,w_1 w_2 E[\{R_1 - E(\tilde{R}_1)\}\{R_2 - E(\tilde{R}_2)\}] + 2\,w_1 w_3 E[\{R_1 - E(\tilde{R}_1)\}\{R_3 - E(\tilde{R}_3)\}] \\
&\quad + \ldots + 2\,w_{n-1} w_n E[\{R_{n-1} - E(\tilde{R}_{n-1})\}\{R_n - E(\tilde{R}_n)\}] \\
&= w_1^2 Var[\tilde{R}_1] + w_2^2 Var[\tilde{R}_2] + \ldots + w_n^2 Var[\tilde{R}_n] + 2\,w_1 w_2 Cov[\tilde{R}_1, \tilde{R}_2] \\
&\quad + 2\,w_1 w_3 Cov[\tilde{R}_1, \tilde{R}_3] + \ldots + 2\,w_{n-1} w_n Cov[\tilde{R}_{n-1}, \tilde{R}_n] \\
&= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + \ldots + w_n^2\sigma_n^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + \ldots + 2w_{n-1}w_n\sigma_{n-1n} \\
&= \sigma_p^2
\end{aligned}
$$

$$\sigma_p = \sqrt{Var[\tilde{R}_p]}$$

$Var[\tilde{R}_p] = \sigma_p^2$：$n$ 個の証券から成るポートフォリオの収益率の分散

σ_p　：n 個の証券から成るポートフォリオの収益率の標準偏差

3.　分散投資効果

ポートフォリオの期待収益率（リターン）は投資比率の加重平均であるが，ポートフォリオの標準偏差（リスク）は共分散の影響を受けるので，証券の組み合わせを上手く行えば標準偏差を大きく減らすことが可能である。

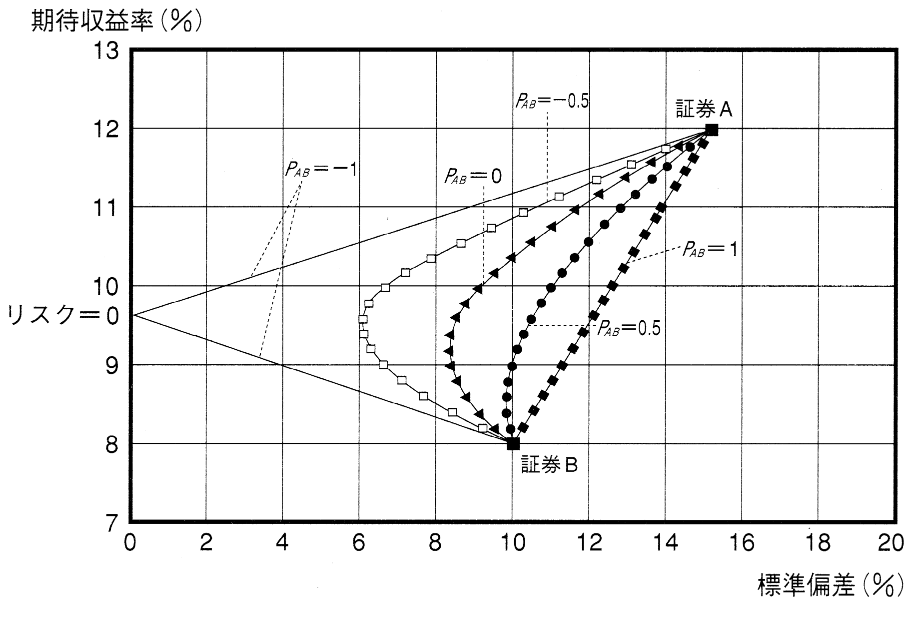
＜分散投資効果の例＞

証券 A と証券 B からなるポートフォリオの期待収益率と標準偏差は以下のようである。

証券名	期待収益率	標準偏差
証券 A	12.0%	15.0%
証券 B	8.0%	10.0%

このとき，証券 A と証券 B の相関係数が $-1 \leqq \rho \leqq 1$ の間で変化し，また証券 A と証券 B への投資比率を変えたときの，このポートフォリオの期待収益率と分散は以下の表および図のようになる。

投資比率		期待収益率($E[R_P]$)	証券Aと証券Bの相関係数				
			1.0	**0.5**	**0.0**	**-0.5**	**-1.0**
証券A	証券B		標準偏差(σ_P)				
0%	100%	8.0%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
5%	95%	8.2%	10.25%	9.90%	9.53%	9.15%	8.75%
10%	90%	8.4%	10.50%	9.84%	9.12%	8.35%	7.50%
15%	85%	8.6%	10.75%	9.82%	8.79%	7.63%	6.25%
20%	80%	8.8%	11.00%	9.85%	8.54%	7.00%	5.00%
25%	75%	9.0%	11.25%	9.92%	8.39%	6.50%	3.75%
30%	70%	9.2%	11.50%	10.04%	8.32%	6.14%	2.50%
35%	65%	9.4%	11.75%	10.19%	8.36%	5.97%	1.25%
40%	60%	9.6%	12.00%	10.39%	8.49%	6.00%	0.00%
45%	55%	9.8%	12.25%	10.63%	8.71%	6.22%	1.25%
50%	50%	10.0%	12.50%	10.90%	9.01%	6.61%	2.50%
55%	45%	10.2%	12.75%	11.20%	9.40%	7.15%	3.75%
60%	40%	10.4%	13.00%	11.53%	9.85%	7.81%	5.00%
65%	35%	10.6%	13.25%	11.89%	10.36%	8.55%	6.25%
70%	30%	10.8%	13.50%	12.28%	10.92%	9.37%	7.50%
75%	25%	11.0%	13.75%	12.69%	11.52%	10.23%	8.75%
80%	20%	11.2%	14.00%	13.11%	12.17%	11.14%	10.00%
85%	15%	11.4%	14.25%	13.56%	12.84%	12.07%	11.25%
90%	10%	11.6%	14.50%	14.03%	13.54%	13.03%	12.50%
95%	5%	11.8%	14.75%	14.51%	14.26%	14.01%	13.75%
100%	0%	12.0%	15.00%	15.00%	15.00%	15.00%	15.00%



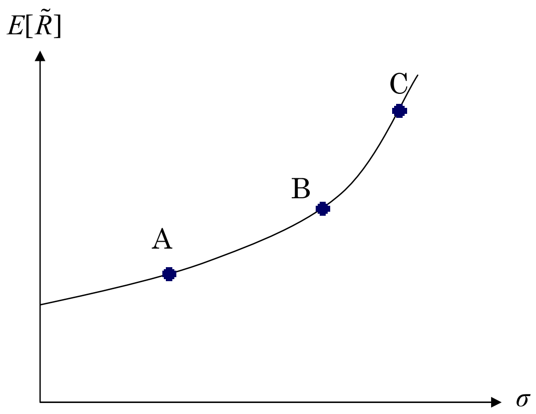
証券Aと証券Bが完全逆相関（$\rho = -1$）のとき，このポートフォリオの標準偏差がゼロになる投資比率が存在することがわかる。このように，複数の証券を上手く組み合わせることによって同じリターンをより小さいリスクで得ることができることを，分散投資効果（ポートフォリオ効果）が働いているという。

4.　投資家の選好

4.1　効用無差別曲線

同じ選好順位の複数の投資案を結んだ曲線を効用無差別曲線という。すなわち，効用無差別曲線とは, 投資家の主観的な満足度が等しい証券のリスクとリターンを結んだ曲線のことである。

効用無差別曲線



この投資家にとっては証券 A，証券 B，証券 C の選好度合いは等しい。

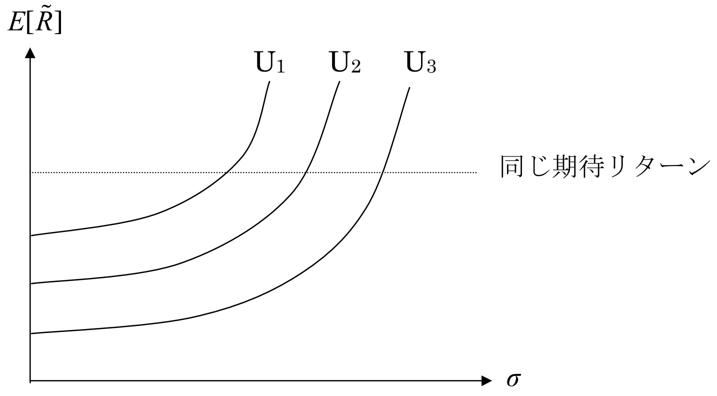
4.2　投資家のタイプ

投資家にとってリスクが同じであれば，リターンが高いほど好ましい投資対象である。これに対して，リスクの評価は投資家によって異なり，以下の三つのタイプに分類できる。

- リスク回避者（risk averse）
- リスク中立者（risk neutral）
- リスク愛好者（risk loving）

(1) リスク回避者

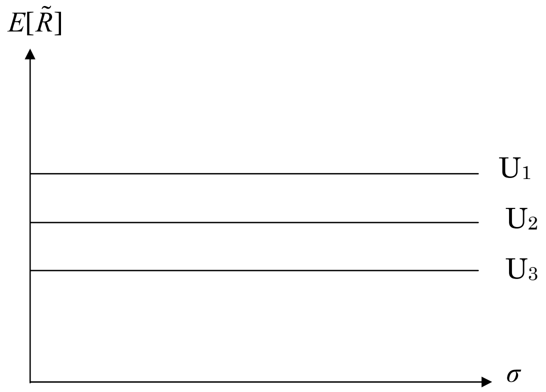
同一のリターンならば，リスクのより小さいものを選好する投資家であり，効用無差別曲線は右上がりの曲線となる。



リスク回避者は同じリターンならよりリスクの小さい U_1 の効用が最も高い。

(2) リスク中立者

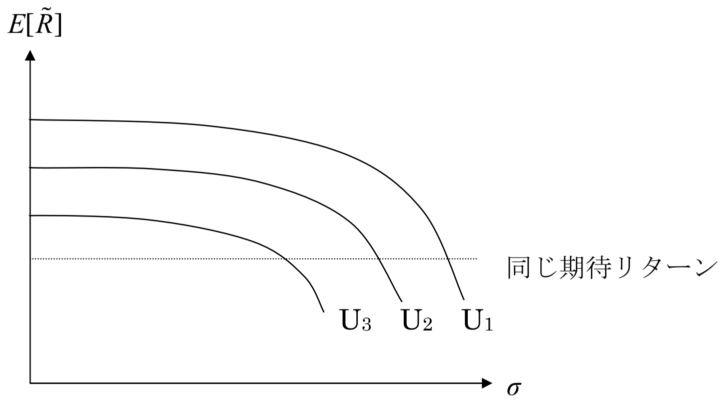
リスクと無関係に，より高いリターンを選好する投資家であり，効用無差別曲線は水平な直線となる。



リスク中立者はリスクに関係なくリターンの高い U_1 の効用が最も高い。

(3) リスク愛好者

同一のリターンならば，リスクのより大きいものを選好する投資家であり，効用無差別曲線は右下がりの曲線となる。



リスク愛好者は，同じリターンならよりリスクの大きい U_1 の効用が最も高い。

[問題 12-1]

以下のような期待収益率（リターン）と標準偏差（リスク）をもつ証券 A と証券 B からなるポートフォリオがある。このとき以下の問いに答えなさい。

証券名	期待収益率	標準偏差
証券 A	20%	13%
証券 B	15%	7%

（1）証券 A を 40%，証券 B を 60%組み入れたポートフォリオの期待収益率と標準偏差を求めなさい。なお証券 A と証券 B の相関係数は–0.5 である。

期待収益率　　標準偏差

________%　________%

（2）証券 A と証券 B が完全逆相関（相関係数＝–1）のとき，このポートフォリオの標準偏差をゼロにする証券 A，証券 B の投資比率を求めなさい。またこのときのポートフォリオの期待収益率を求めなさい。

証券 A　　証券 B

________%　________%

期待収益率

%[問題 12-2]

A，B，C，D の四つの証券について，リスクとリターンが以下のように明らかになっている。このとき以下の問いに答えなさい。

証券名	リスク	リターン
証券 A	20%	30%
証券 B	10%	20%
証券 C	20%	20%
証券 D	30%	20%

(1)証券 A と証券 B の満足度が等しい投資家は何と呼ばれますか？またその効用無差別曲線を図に描きなさい。

(2) 証券 B，証券 C，証券 D の満足度が等しい投資家は何と呼ばれますか？またその効用無差別曲線を図に描きなさい。

(3) 証券 A と証券 D の満足度が等しい投資家は何と呼ばれますか？またその効用無差別曲線を図に描きなさい。