第 23 章　債券分析Part 3

1.　債券投資のリスク

債券投資のリスクとは、投資期間中の期待収益が実現されない可能性であり、主なものとして次の 5 つがある。

①　価格変動リスク（金利リスク）

市場金利の変動により債券利回りが影響を受け、債券価格が変動するリスクを**価格変動リスク**または**金利リスク**という。債券投資のリスクとしてもっとも重要なのが、この価格変動リスクである。

②　再投資リスク

利付債に投資した場合に、クーポンの再投資が当初想定していた利回りで再投資できないリスクである。

③　信用リスク（デフォルト・リスク、債務不履行リスク）

債券が債務不履行（デフォルト）に陥る、あるいは格付機関による格下げによって債券価格が下落するリスクである。

④　途中償還リスク

債券がその発行体によって満期より前に償還されてしまうリスク。

⑤　流動性リスク

市場の厚みに限界があることにより、債券の売買が必要な時に必要な量を速やかに売買できないリスク。

債券投資のリスク

リスク項目	リスクの大きさ	
	大きい	小さい
①価格変動リスク	長期債、低クーポン債	短期債、高クーポン債
②再投資リスク	利付債、高クーポン債	割引債、低クーポン債
③信用リスク	低格付け債	高格付け債
④途中償還リスク	事業債、地方債	金融債、国債
⑤流動性リスク	私募債	公募債

＜例題＞

次のような 2 種類の債券があるとする。

	債券 A	債券 B
額面	100 円	100 円
クーポン・レート	3%	4%
利払い	年 1 回	年 1 回
残存期間	2 年	4 年
利回り	5%	5%

現在利回りが 5%のときの債券価格

$$\text{債券 A の価格} = \frac{3}{1+0.05} + \frac{3+100}{(1+0.05)^2} = \underline{\underline{96.28\text{ 円}}}$$

$$\text{債券 B の価格} = \frac{4}{1+0.05} + \frac{4}{(1+0.05)^2} + \frac{4}{(1+0.05)^3} + \frac{4+100}{(1+0.05)^4} = \underline{\underline{96.45\text{ 円}}}$$

市場金利の変動によって利回りが 5%から 1%上昇したときの債券価格

$$\text{債券 A の価格} = \frac{3}{1+0.06} + \frac{3+100}{(1+0.06)^2} = \underline{\underline{94.50\text{ 円}}}$$

$$\text{債券 B の価格} = \frac{4}{1+0.06} + \frac{4}{(1+0.06)^2} + \frac{4}{(1+0.06)^3} + \frac{4+100}{(1+0.06)^4} = \underline{\underline{93.07\text{ 円}}}$$

市場金利の変動によって利回りが 5%から 1%下落したときの債券価格

$$\text{債券 A の価格} = \frac{3}{1+0.04} + \frac{3+100}{(1+0.04)^2} = \underline{\underline{98.11\text{ 円}}}$$

$$\text{債券 B の価格} = \frac{4}{1+0.04} + \frac{4}{(1+0.04)^2} + \frac{4}{(1+0.04)^3} + \frac{4+100}{(1+0.04)^4} = \underline{\underline{99.99\text{ 円}}}$$

以上のように、現在利回りが 5%のときには、債券 A と債券 B の債券価格は、96.28 円と 96.45 円でほとんど差が無い。しかしながら、利回りが 1%上昇すると、

	債券 A	債券 B
変化額	–1.78 円（94.50 – 96.28 = –1.78）	–3.38 円（93.07 – 96.45 = –3.38）
変化率	–1.85%（94.50 / 96.28 –1= –0.0185）	–3.50%（93.07 / 96.45 –1= –0.0350）

となり、利回りが 1%下落すると、

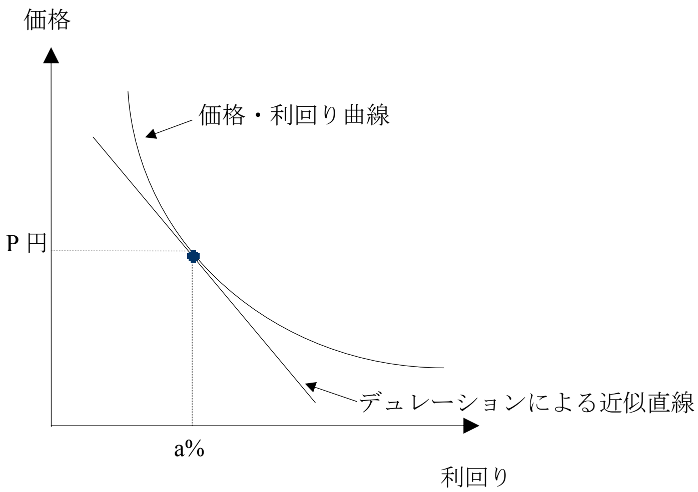
	債券 A	債券 B
変化額	+1.83 円（98.11 – 96.28 = 1.83）	+3.38 円（99.99 – 96.45 = 3.54）
変化率	–1.85%（98.11 / 96.28 –1= 0.0190）	+3.67%（99.99 / 96.45 –1= 0.0367）

となる。

このように、現在の利回り 5%では、債券 A と債券 B の価格は同じでも、利回りに変化があった場合には、債券 B の方が債券 A よりも変動が大きく、価格変動リスク（金利リスク）が大きいといえる。

2.　デュレーション

債券価格は、市場金利の変動による利回りの変化によって価格が変化する。そこで、利回りの変化による債券価格の変動リスクを計る指標として用いられるのが、デュレーションである。



価格・利回り曲線上のある点（利回り a%で債券価格 P 円）の、利回りの微小な変化に対する価格の変化は、デュレーションによる近似直線で表すことが可能である。

債券価格の一般式は、以下のように表される。

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C+100}{(1+r)^n}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{100}{(1+r)^n}$$

P：債券価格

r：利回り

C：年間クーポン収入

n：残存期間年

P を r について微分すると、

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^{n}\left(-\frac{Ct}{(1+r)^{t+1}}\right)-\frac{100n}{(1+r)^{n+1}}$$
$$= \left(-\frac{1}{1+r}\right)\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^{t}}+\frac{100n}{(1+r)^{n}}\right)$$

が得られる。両辺に dr / P を乗じると、

$$\frac{dP}{P} = \left(-\frac{1}{1+r}\right)\left(\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^{t}}+\frac{100n}{(1+r)^{n}}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^{t}}+\frac{100}{(1+r)^{n}}}\right)dr$$

が得られる。ここで、デュレーション（D）を次のように定義する。

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{Ct}{(1+r)^{t}}+\frac{100n}{(1+r)^{n}}}{\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^{t}}+\frac{100}{(1+r)^{n}}}$$

以上の結果から、デュレーションを用いた債券価格の変化率と変化額は、次のように表される。

債券価格の変化率：$\dfrac{\Delta P}{P} = -\dfrac{D}{1+r}\Delta r$

債券価格の変化額：$\Delta P = -\dfrac{D}{1+r}P\Delta r$

3.　コンベクシティ

デュレーションは利回り変化に伴う債券価格の変化を線形近似させたものであるので、利回り水準の大きな変動に対しては誤差が大きくなるという欠点がある。そこで実際の価格・利回り曲線の曲がり具合を考慮したコンベクシティを加えることによって、推定精度を上げることができる。

テイラー展開

無限回微分可能な $f(x)$について、

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1\times 2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{1\times 2\times 3}(x-a)^3+\cdots$$

と展開して $f(x)$に近似させることを、$f(x)$の $x = a$ におけるテイラー展開という。

債券価格を利回りに関する関数 $P(r)$とすると、テイラー展開を用いて、$x \to r+\Delta r$、$a \to r$ とおくと、

$$P(r+\Delta r)=P(r)+\frac{P'(r)}{1}\Delta r+\frac{P''(r)}{1\times 2}\Delta r^2+\frac{P'''(r)}{1\times 2\times 3}\Delta r^3+\cdots$$

$$P(r+\Delta r)-P(r)=\frac{P'(r)}{1}\Delta r+\frac{P''(r)}{1\times 2}\Delta r^2+\frac{P'''(r)}{1\times 2\times 3}\Delta r^3+\cdots$$

2 次の項まで取って、

$$\Delta P=P'(r)\Delta r+\frac{P''(r)}{2}\Delta r^2$$

P を r について 2 回微分すると、

$$P''(r)=\frac{d^2P}{dr^2}=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{Ct(t+1)}{(1+r)^{t+2}}\right)+\frac{100n(n+1)}{(1+r)^{n+2}}$$

$$=\frac{1}{(1+r)^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{Ct(t+1)}{(1+r)^{t}}\right)+\frac{100n(n+1)}{(1+r)^{n}}\right)$$

となる。両辺を P で除したものをコンベクシティ（CV）と定義する。

$$CV=\frac{P''(r)}{P}=\frac{\frac{1}{(1+r)^2}\left(\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{Ct(t+1)}{(1+r)^{t}}\right)+\frac{100n(n+1)}{(1+r)^{n}}\right)}{P}$$

以上の結果から、デュレーションとコンベクシティを用いた債券価格の変化率と変化額は、次のように表される。

債券価格の変化率：$\dfrac{\Delta P}{P}=-\dfrac{1}{1+r}D\cdot\Delta r+\dfrac{1}{2}CV\cdot(\Delta r)^2$

債券価格の変化額：$\Delta P=-\dfrac{1}{1+r}D\cdot P\cdot\Delta r+\dfrac{1}{2}CV\cdot P\cdot(\Delta r)^2$

＜例題＞

次のような 2 種類の債券があるとする。

	債券 A	**債券 B**
額面	100 円	100 円
クーポン・レート	3%	4%
利払い	年 1 回	年 1 回
残存期間	2 年	4 年
利回り	5%	5%

債券 A と債券 B のデュレーション

債券 A のデュレーション ＝ $\dfrac{\frac{3\cdot 1}{1+0.05}+\frac{3\cdot 2}{(1+0.05)^2}+\frac{100\cdot 2}{(1+0.05)^2}}{\frac{3}{1+0.05}+\frac{3}{(1+0.05)^2}+\frac{100}{(1+0.05)^2}}=\dfrac{189.71}{96.28}=\underline{\underline{1.97\text{ 年}}}$

$$\text{債券 B のデュレーション} = \frac{\frac{4\cdot 1}{1+0.05}+\frac{4\cdot 2}{(1+0.05)^2}+\frac{4\cdot 3}{(1+0.05)^3}+\frac{4\cdot 4}{(1+0.05)^4}+\frac{100\cdot 4}{(1+0.05)^4}}{\frac{4}{1+0.05}+\frac{4}{(1+0.05)^2}+\frac{4}{(1+0.05)^3}+\frac{4}{(1+0.05)^4}+\frac{100}{(1+0.05)^4}}$$

$$= \frac{363.68}{96.45} = \underline{\underline{3.77\text{ 年}}}$$

市場金利の変動によって利回りが 5%から 1%上昇したときの債券 A と債券 B の価格変化率

$$\text{債券 A の価格変化率} = -\frac{1.97}{1+0.05}\times 1\% = \underline{\underline{-1.88\%}}$$

$$\text{債券 B の価格変化率} = -\frac{3.77}{1+0.05}\times 1\% = \underline{\underline{-3.59\%}}$$

市場金利の変動によって利回りが 5%から 1%上昇したときの債券 A と債券 B の価格変化額

$$\text{債券 A の価格変化額} = -\frac{1.97}{1+0.05}\times 1\% \times 96.28\text{円} = \underline{\underline{-1.81\text{ 円}}}$$

$$\text{債券 B の価格変化額} = -\frac{3.77}{1+0.05}\times 1\% \times 96.45\text{円} = \underline{\underline{-3.46\text{ 円}}}$$

債券 A と債券 B のコンベクシティ

$$\text{債券 A のコンベクシティ} = \frac{\frac{1}{(1+0.05)^2}\left(\frac{3\cdot 1\cdot 2}{1+0.05}+\frac{3\cdot 2\cdot 3}{(1+0.05)^2}+\frac{100\cdot 2\cdot 3}{(1+0.05)^2}\right)}{96.28} = \frac{513.61}{96.28}$$

$$= \underline{\underline{5.33\text{ 年}}}$$

債券 B のコンベクシティ ＝

$$\frac{\frac{1}{(1+0.05)^2}\left(\frac{4\cdot 1\cdot 2}{1+0.05}+\frac{4\cdot 2\cdot 3}{(1+0.05)^2}+\frac{4\cdot 3\cdot 4}{(1+0.05)^3}+\frac{4\cdot 4\cdot 5}{(1+0.05)^4}+\frac{100\cdot 4\cdot 5}{(1+0.05)^4}\right)}{96.45}$$

$$= \frac{1616.39}{96.45} = \underline{\underline{16.76\text{ 年}}}$$

利回りが 5%から 1%上昇したとき、デュレーションとコンベクシティの両方を用いた場合の債券 A と債券 B の価格変化率

$$\text{債券 A の価格変化率} = -\frac{1.97}{1+0.05}\times 1\% + \frac{1}{2}\times 5.33\times(1\%)^2 = -1.88\% + 0.027\% = \underline{\underline{-1.853\%}}$$

$$\text{債券 B の価格変化率} = -\frac{3.77}{1+0.05}\times 1\% + \frac{1}{2}\times 16.76\times(1\%)^2 = -3.59\% + 0.084\% = \underline{\underline{-3.506\%}}$$

利回りが 5%から 1%上昇したとき、デュレーションとコンベクシティの両方を用いた場合の債券 A と債券 B の価格変化額

$$\text{債券 A の価格変化額} = -\frac{1.97}{1+0.05}\times 1\%\times 96.28\text{円}+\frac{1}{2}\times 5.33\times (1\%)^2\times 96.28\text{円}$$

$$= -1.81\text{ 円} + 0.026\text{ 円} = \underline{\underline{-1.784\text{ 円}}}$$

$$\text{債券 B の価格変化額} = -\frac{3.77}{1+0.05}\times 1\%\times 96.45\text{円}+\frac{1}{2}\times 16.76\times (1\%)^2\times 96.45\text{円}$$

$$= -3.46\text{ 円} + 0.081\text{ 円} = \underline{\underline{-3.379\text{ 円}}}$$

[問題 9-1]

3 年後に満期がくる、クーポン・レート **6%**（年 **1** 回利払い）、額面 **100** 円の債券 **A** があり、現在の利回りは **4%**である。このとき以下の**(1)**～**(5)**の問いに答えなさい。

(1)　債券 **A** の現在の債券価格を求めなさい。

＿＿＿＿＿＿円

(2)　債券 **A** の現在のデュレーションを求めなさい。

＿＿＿＿＿＿年

(3)　デュレーションを用いて、債券 **A** の利回りが **4%**から **3%**に下落した場合の、価格変化率と価格変化額およびその場合の債券価格を求めなさい。

価格変化率＿＿＿＿%

価格変化額＿＿＿＿円

債券価格＿＿＿＿＿円

(4)　債券 **A** の現在のコンベクシティを求めなさい。

＿＿＿＿＿＿年

(5) デュレーションとコンベクシティの両方を用いて、債券 **A** の利回りが **4**%から **3**%に下落した場合の、価格変化率と価格変化額およびその場合の債券価格を求めなさい。

価格変化率　　　　　%

価格変化額　　　　　円

債券価格　　　　　　円

(6) 債券 **A** の利回りが **4**%から **3**%に下落した場合の、実際の価格変化率と価格変化額およびその場合の債券価格を求めなさい。

価格変化率　　　　　%

価格変化額　　　　　円

債券価格　　　　　　円