第 29 章　オプション取引　Part 2

5.　プット・コール・パリティ

プット・コール・パリティ（put call parity）とは、同一の原資産、限月、行使価格のヨーロピアンタイプのプット・オプションとコール・オプションのプレミアムの間に存在する関係を表わしたものである。

今、満期日のキャッシュフローが 0 となるような、以下のポートフォリオを構築する。

- コール 1 単位の売り建て
- 原資産 1 単位の買い
- プット 1 単位の買い建て
- 満期時のペイオフが権利行使価格となるような割引債の売り

	現時点のキャッシュフロー	満期日のキャッシュフロー	
		$S_T \geq K$	$S_T < K$
コールの売り建て	C	－（S_T－K）	0
原資産の買い	－S	S_T	S_T
プットの買い建て	－P	0	K－S_T
割引債の売り	K / (1+rt)	－K	－K
合計	0 になるはず	0	0

C：コール・オプションのプレミアム

P：プット・オプションのプレミアム

S：原資産の現在価格

S_T：原資産の満期日の価格

K：権利行使価格

r：短期金利

t：満期日までの期間

このポートフォリオでは､満期日のキャッシュフローが原資産の価格にかかわらず 0 であるので､裁定が働かない均衡市場においては､現時点のキャッシュフローも 0 になるはずである。このことから、プット・コール・パリティと呼ばれる以下の式が導かれる。

$C = S + P - K/(1+rt)$　または、

$C = S + P - Ke^{-rt}$　　（$\because\ 1+rt \approx e^{rt}$）

（例）現在、日経平均が 12,000 円、満期まで 1 年で権利行使価格が 11,750 円のコール・オプションのプレミアムが 700 円である。安全資産の利子率を 3%として、プット･コー

ル･パリティから導かれるプットの価格を求めなさい。

C＝S＋P－K / (1+rt)なので、以下の式が成り立つ。

700 円＝12,000 円＋P 円－11,750 円 / (1 + 0.03×1 年)

プット・オプション・プレミアム＝107.76 円

6. オプション評価モデル

オプション評価モデルとは、ヨーロピアン･オプションの価格形成をいくつかの変数を使って理論的に説明しようとするモデルのことである。代表的なものに、2 項モデルやブラック･ショールズ・モデルがある。

6.1 2 項モデル（バイノミアル・オプション評価モデル）

原資産価格が、1 期間経過したときに上昇するか下落するかの 2 つの状態しかない場合を想定して、オプション価格を導出している。

例えば、原資産である株式の現在価格が 1,000 円であり、この株式は 1 期間後に、20%上昇しているか 10%下落しているかのどちらかであるとする。このとき権利行使価格が 1,050 円のコール・オプションとプット・オプションの理論価格はいくらとなるであろうか。また安全利子率は 8%であるとする。

まず、株式が上昇する確率を p とすると、無裁定条件から、次の式が成り立つ。

$$1000\text{円} = \frac{p \times 1200\text{円} + (1-p) \times 900\text{円}}{1+0.08}$$

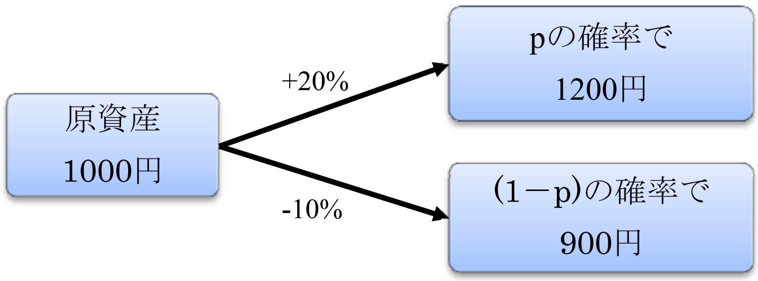
従って、p＝0.6 となる。またコール・オプションの価値は、株式が上昇すれば 150 円、下落すれば 0 円であるので、

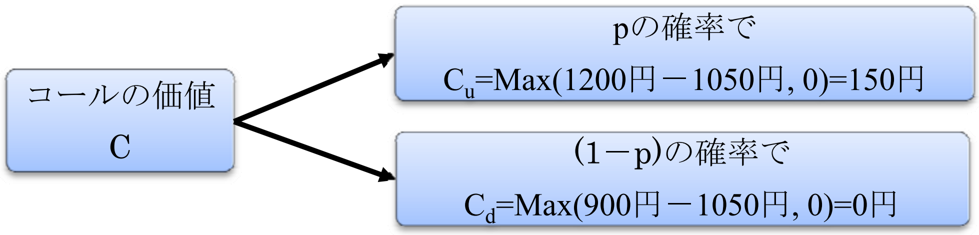
$$\text{コールの価値：} C = \frac{0.6 \times 150\text{円} + (1-0.6) \times 0\text{円}}{1+0.08} = 83.33\text{円}$$

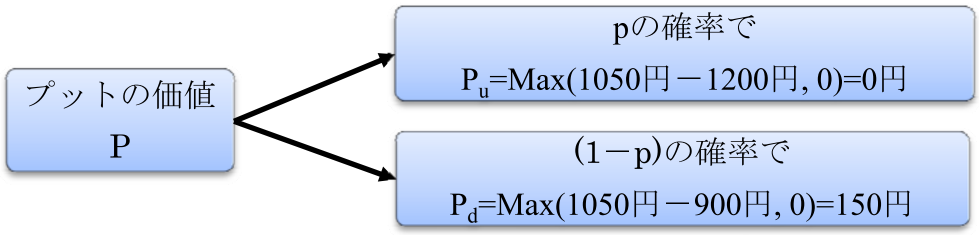
となる。一方、プット・オプションの価値は、株式が上昇すれば 0 円、下落すれば 150 円であるので、

$$\text{プットの価値：} P = \frac{0.6 \times 0\text{円} + (1-0.6) \times 150\text{円}}{1+0.08} = 55.55\text{円}$$

となる。







6.2　ブラック・ショールズ・モデル（Black-Scholes Model）

ブラック・ショールズ・モデルは、ヨーロピアンタイプ（満期日にのみ行使可能なオプション）のオプション価格を計算するモデルである。BS モデルは、1973 年にアメリカのフィッシャー・ブラック（Fischer Black）とマイロン・ショールズ（Myron Scholes）が共同で発表し、ロバート・マートン（Robert Merton）によって証明された。

フィッシャー・ブラックは 1995 年に亡くなったが、マイロン・ショールズとロバート・マートンは、この功績によって 1997 年にノーベル経済学賞を受賞した。

BS モデルは、原資産価格、権利行使価格、満期までの期間、短期金利、ボラティリティという、市場で入手容易なデータを当てはめるだけでオプション・プレミアムを算出できるという利点があり、実務界で広く利用されている。

コール・プレミアム： $C = S \cdot e^{-\delta t} \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2)$

プット・プレミアム： $P = -S \cdot e^{-\delta t} \cdot N(-d_1) + K \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

S：原資産価格

K：権利行使価格

t：オプションの満期までの期間

r：短期金利

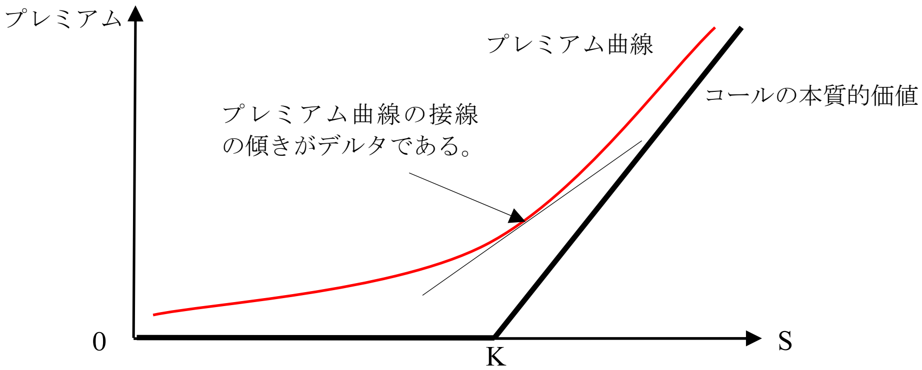
δ：原資産利回り

σ：原資産価格のボラティリティ

N(d)：標準正規分布の累積密度関数

オプション・プレミアムの原資産価格の変化に対する感応度は、ギリシャ指標と呼ばれる以下のギリシャ文字で表わされる。

- デルタ、delta、Δ：デルタは、原資産価格の変化に対するオプション価格の変化を表わしている。コール・デルタは$\Delta_C = \frac{\delta C}{\delta S}$、プット・デルタは$\Delta_P = \frac{\delta P}{\delta S}$で表わされる。コール・デルタは$0 \le \Delta_C \le 1$、プット・デルタは$-1 \le \Delta_P \le 0$の範囲の値を取る。



K＝権利行使価格、S＝原資産価格

また、プット・コール・パリティ（C＝S＋P－Ke^{-rt}）を原資産価格 S で偏微分すると、$\frac{\delta C}{\delta S} = \frac{\delta S}{\delta S} + \frac{\delta P}{\delta S}$、すなわち、$\Delta_C = 1 + \Delta_P$という関係が導かれるることになる。

- ガンマ、gamma、Γ：ガンマは、原資産価格の変化がデルタの変化に与える影響を表わしている。すなわち、オプション価格を原資産価格で 2 階偏微分したものであり、プレミアム曲線の曲がり方の大きさを意味している。$\Gamma_C = \frac{\delta \Delta_C}{\delta S} = \frac{\delta}{\delta S}\left(\frac{\delta C}{\delta S}\right) = \frac{\delta^2 C}{\delta S^2}$、

$\Gamma_P = \frac{\delta \Delta_P}{\delta S} = \frac{\delta}{\delta S}\left(\frac{\delta P}{\delta S}\right) = \frac{\delta^2 P}{\delta S^2}$で表わされる。なおガンマは、コール、プット共に常に正であ

り、アト・ザ・マネーで最大になる。

- ベガ、vega：ベガは、原資産価格のボラティリティの変化に対するオプション価格の変化を表わしている。$Vega_C = \dfrac{\delta C}{\delta \sigma}$、$Vega_P = \dfrac{\delta P}{\delta \sigma}$ で表わされる。なお、ボラティリティが大きいほど権利行使される確率が高くなってオプション価格が高くなるので、ベガはコール、プット共に常に正である。またアト・ザ・マネーで最大になる。
- シータ、theta、Θ：シータは、満期日までの時間の変化に対するオプション価格の変化を表わしている。$\Theta_C = \dfrac{\delta C}{\delta t}$、$\Theta_P = \dfrac{\delta P}{\delta t}$ で表わされる。なお、時間が経過するほど、オプション価格の時間価値部分が減少、すなわち時間が長くなるほど時間価値部分が増加するので、シータはコール、プット共に常に正である。
- ロー、rho、Ｐ：ローは、短期金利の変化に対するオプション価格の変化を表わしている。$\mathrm{P}_C = \dfrac{\delta C}{\delta r}$、$\mathrm{P}_P = \dfrac{\delta P}{\delta r}$ で表わされる。なお、短期金利が上昇すると、権利行使価格の現在価値が下がるので、コールの価格は上昇するが、プットの価格は下落する。従って、ローはコールに関しては正、プットに関しては負である。

[問題 1]

現在、ある配当のない株式の値段が **1,000** 円、満期まで **1** 年で権利行使価格が **1,050** 円のコール・オプションのプレミアムが **30** 円である。安全資産の利子率を **5%**として、プット・コール･パリティから導かれるプットの価格を求めなさい。

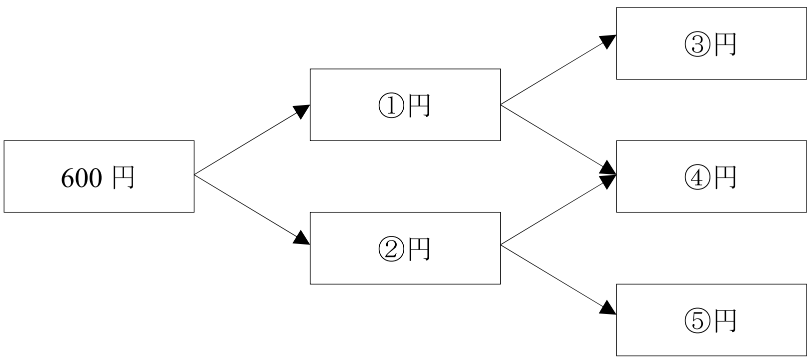
＿＿＿＿円

[問題 2]

A 社の株価は現在 600 円で、2 項モデルに従って、上昇するときは 20%、下落するときは 10%変動するものとする。また、2 期後に満期の来るヨーロピアン・タイプのコール・オプションの権利行使価格は 620 円であり､1 期間あたりの安全利子率は 4%とする。このとき、①～⑪の価格を求めなさい。

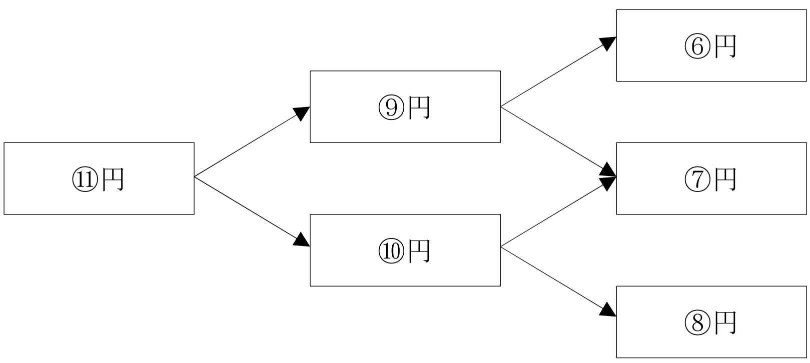
株価の変動

現在　第 1 期　第 2 期



コール価格の変動

現在　第 1 期　第 2 期



[問題 3]

オプション・プレミアムの感応性に関する次の記述のうち、正しいものを一つ選びなさい。

(A) コール・オプションおよびプット・オプションのデルタ（Δ）は、常にマイナスの値をとる。

(B) プット・オプションのベガ（vega）は、アウト・オブ・ザ・マネーのときに最も高くなる。

(C) コール・オプションのガンマ（Γ）はプラス、プット・オプションのガンマ（Γ）はマイナスである。

(D) コール・オプションのロー（Ρ）はプラスである。

[問題 4]

コールのデルタ（Δ_C）とプットのデルタ（Δ_P）の関係として、正しいものを一つ選びなさい。

(A) $\Delta_C = \Delta_P$

(B) $\Delta_C = -\Delta_P$

(C) $\Delta_C = 1 - \Delta_P$

(D) $\Delta_C = 1 + \Delta_P$