交差項を含むOLSおよびProbitモデルの解釈：図による説明

太　田　浩　司

要旨

本稿では，交差項を含むOLSおよびProbitモデルの解釈に関する問題点を指摘し，その対処法について図解している。OLSモデルについては，交差項を構成する連続変数をその平均値にセンタリングすることによって，結果の解釈が容易になることを示している。一方，Probitモデルに関しては，センタリングを行っても，(i) 交差項の係数値とMarginal Effectとでは符号が異なりうる，(ii) 関数形の影響を受ける，(iii) 通常の統計ソフトでは交差項の誤ったMarginal Effectが表示される，といった固有の問題があるということを指摘している。Ai and Norton (2003) の作成したStataの**inteff**コマンドは，交差項の正しいMarginal Effectの算定を可能にしているが，その結果は明確な統計的推論が困難なものである場合がままある。そのような状況を回避するためにも，最初のモデル設計の段階で，交差項を含めることの理論的な検討を厳格に行うことが重要であるといえよう。

Keywords：交差項，OLSモデル，Probitモデル，Stataの**inteff**コマンド

１．はじめに

会計・ファイナンスにおける実証研究では，交差項を含む検証モデルが用いられることが多い。その理由としては，会計やコーポレート・ファイナンスで用いられる独立変数は互いに複雑に関連していることが多く，調査対象の独立変数が従属変数に与える影響が，調整変数と呼

本稿は，2018年８月21日に小樽商科大学で開催された第４回JARDISワークショップでのセミナー報告論文に加筆・修正したものである。東北大学の木村史彦先生および同志社大学の山本達司先生からは大変有益なコメントを頂戴したので，ここに謝意を述べたい。なお本研究は，（財）石井記念証券研究振興財団の平成29年度研究助成金（研29-11）およびJSPS科研費16K03762の援助を受けて行ったものである。

ばれる他の独立変数の値によって変化するという状況がしばしばあるからだと考えられる。このような実証会計・ファイナンス領域における交差項の多用にもかかわらず，不思議とその使用や解釈についてはアドホックであることが多く，中には誤った解釈を行っているのではないかと思われる論稿も見受けられる。

そこで，本稿では，交差項の意味するところを，会計・ファイナンス領域でしばしば用いられるモデルを例として取り上げ，また，その意味するところを図を使用して視覚的に示すことによって，交差項に関する正しい理解を促進することを目的としている。

なお，本題に移る前に，本稿で用いる用語や表記について，あらかじめ以下で述べることとする。最初に，交差項を含む推定モデルとは，通常，以下のような形式のモデルである。

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma Z + \delta X * Z + \varepsilon, \tag{1}$$

Y：従属変数,

X：調査対象変数の独立変数,

Z：調整変数とよばれる独立変数,

ε：誤差項。

Xは，研究の主目的である調査対象変数である。一方，Zは，調整変数（Moderator）と呼ばれるもので，XがYに与える影響の強度や方向性がZの値によって変化すると想定されている。また，右辺第2項のXは主効果（Main Effect）と呼ばれ，第4項のX^*ZはXとZの交互作用効果（Interaction Effect）を捉える交差項である。

次に，変数の上に$\overline{}$（bar）がついている場合はその変数の平均値を意味しており（e.g.,$\overline{X}$は変数Xの平均値），パラメータの上に$\hat{}$（hat）が付いている場合にはパラメータの推定値（e.g.,$\hat{\alpha}$はパラメータαの推定値）を意味している。また，本稿で頻出するセンタリング（中心化）とは，平均による中心化を意味しており，変数名に英大文字が含まれる場合にはセンタリング前，全て英小文字である場合にはセンタリング後の変数であるということを意味している（e.g.,$x = X - \overline{X}$，従って $\overline{x} = 0$，となる）。

最後に，本来推定モデルには，(1)式のように誤差項ε，推定結果を表す式には残差を表すが含まれるべきであるが，以下では表記の簡略化のために省略している。また図に関しても，表記の都合上，$\hat{}$が必要な場合にもそれを全て省略している。

なお，本稿の構成は以下のようである。次章はOLSモデルにおけるダミー変数と連続変数の交差項を含むモデル，第3章は連続変数同士の交差項を含むモデルについて議論する。第4章はMain Effectのない交差項モデル，第5章はセンタリングが必ずしも必要でないケースについて述べる。さらに，第6章はProbitモデルにおける交差項の解釈について述べ，最後に第7章で本稿を総括する。

２．ダミー変数×連続変数の交差項のケース

本章では，推定するOLSモデルが，ダミー変数と連続変数の積で表される交差項を含む場合の解釈について述べる[1)]。今，BigNと呼ばれる大手監査法人が，そのクライアント企業の利益の質に与える影響を調査するために，以下のようなモデルを推定するとする。

$$EarnQ = \alpha + \beta BigN + \gamma Z + \delta BigN * Z, \tag{2}$$

$EarnQ$：利益の質を表す従属変数，

$BigN$：調査対象変数で，大手監査法人ならば1，それ以外はゼロのダミー変数，

Z：調整変数とよばれる何らかの独立変数。

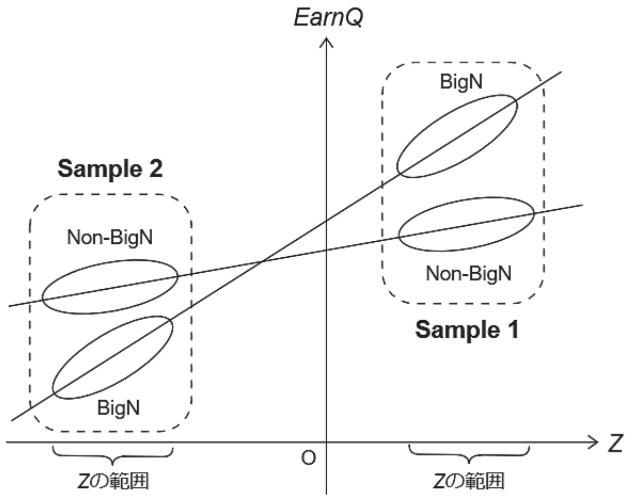
このとき，(2)式の推定結果が，

$$\underset{}{EarnQ} = \underset{(+)}{\hat{\alpha}} + \underset{(+)}{\hat{\beta}}BigN + \underset{(+)}{\hat{\gamma}}Z + \underset{(+)}{\hat{\delta}}BigN * Z, \tag{3}$$

というように，全ての係数推定値が正であったとする。なお，$\hat{\alpha}$の符号は解釈に影響を与えないが，図示の都合上正の値であるとしており，同様の理由で$\hat{\beta}$，$\hat{\gamma}$，$\hat{\delta}$の値に大きな差はないとする。このとき，全ての係数推定値が正であったので，(3)式の解釈を，以下のように行ったとする。

解釈１：BigNクライアント企業の利益の質は，Non-BigNクライアント企業の利益の質よりも高く，その差はZの値が大きくなるとより大きくなる。

図１　交差項がダミー変数×連続変数の場合の図例



1）OLSモデルに含まれる様々な種類の交差項の意味とその解釈については，Aiken and West（1991）およびJaccard and Turrisi（2003）で詳細に記述されている。

解釈１は，一見何の問題もないように思えるのだが，ここで，図１を見て欲しい。もしBigNとNon-BigNの観測値の散布図がSample 1のようであるならば，解釈１に問題はない。しかしながら，もしBigNとNon-BigNの観測値の散布図がSample 2のようであるならば，

解釈２：BigNクライアント企業の利益の質は，Non-BigNクライアント企業の利益の質よりも低いが，その差はZの値が大きくなると小さくなる，

と解釈するのが自然である。

ここで問題なのは，Sample 1でもSample 2でも，(2)式の推定結果は，同じ(3)式になるということである。すなわち調整変数Zの動く範囲を考慮することなく(3)式の結果のみから判断してしまうと，本来，解釈２が適切であるはずなのに誤って解釈１としてしまったり，あるいは，その反対の解釈を行ってしまう危険性があるのである。

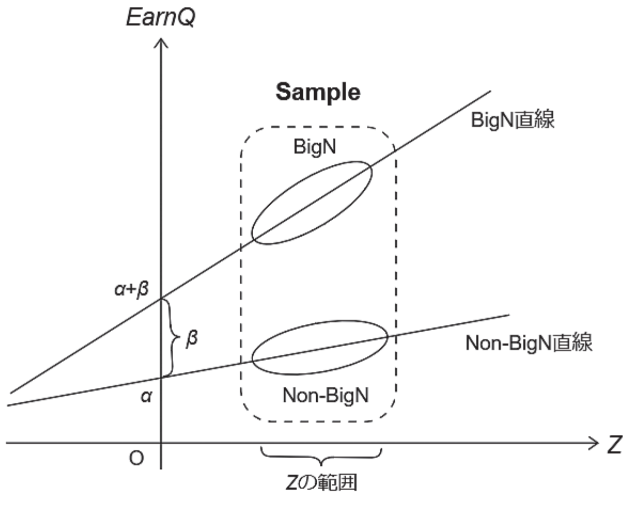
また，(3)式の結果は，Non-BigNとBigNに関する推定結果が，それぞれ，

Non-BigN直線：$EarnQ = \hat{\alpha} + \hat{\gamma}Z,$　　　　(4a)

BigN直線　　：$EarnQ = (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + (\hat{\gamma} + \hat{\delta})Z,$　　　　(4b)

で表されるということを意味している。これを図示したものが図２であるが，図からもわかるように，ダミー変数$BigN$の係数推定値$\hat{\beta}$は，(4a)式と(4b)式の定数項の差を示したものである。そして，定数項は，あくまでも，調整変数Zがゼロである場合の$EarnQ$の値であるので，そもそもZの範囲がゼロを含まない場合には，$BigN$の係数推定値$\hat{\beta}$にはほとんど意味がないのである。

図２　調整変数の範囲がゼロを含まない場合の図例



そこで推奨されるのが，調整変数Zからその平均値である$\overline{Z}$を差し引いて平均がゼロとなるようにセンタリング（$z = Z - \overline{Z}$）してやることである。そして，Zの代わりにzを用いて推定した結果が，以下のように，

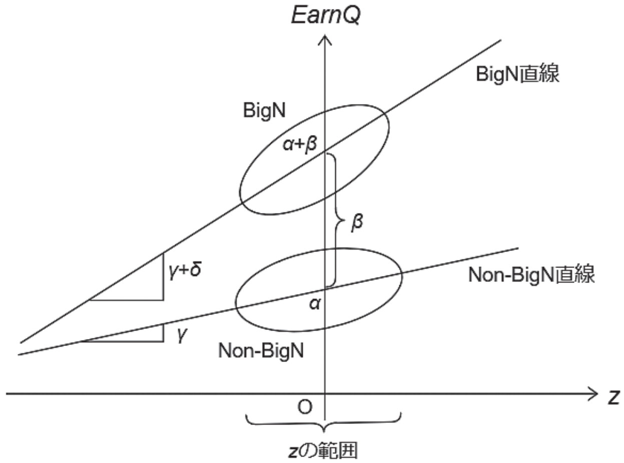
$$EarnQ = \underset{(+)}{\hat{\alpha}} + \underset{(+)}{\hat{\beta}}BigN + \underset{(+)}{\hat{\gamma}}z + \underset{(+)}{\hat{\delta}}BigN * z, \tag{5}$$

係数推定値が全て正であったとする。この場合には，(5)式は図３のように表されるので，以下のような解釈ができる。

解釈３：Zの平均値で，BigNクライアント企業の利益の質はNon-BigNクライアント企業の利益の質よりも高く，またその差は，Zの値が大きくなるとより大きくなる.

このようにZをセンタリングすると，$\hat{\beta}$はZの平均値で評価した場合のBigNとNon-BigNクライアント企業の利益の質の差を表すので，その値には意味があるのである[2)]。

図３　調整変数をセンタリングした場合の図例



３．連続変数×連続変数の交差項のケース

本章では，推定するOLSモデルが，連続変数と連続変数の積で表される交差項を含む場合の解釈について述べる。連続変数同士の交差項の場合には，前章のダミー変数と連続変数の交差項の場合よりも，さらに解釈が複雑である。今，監査の質の程度を表すある連続変数AQ（audit

---

２）Zをセンタリングした変数を$z = Z - \overline{Z}$と定義すると，(2)式は，

$$\begin{aligned} EarnQ &= \alpha + \beta BigN + \gamma Z + \delta BigN * Z \\ &= (\alpha + \gamma\overline{Z}) + (\beta + \delta\overline{Z})BigN + \gamma(Z - \overline{Z}) + \delta BigN * (Z - \overline{Z}) \\ &= (\alpha + \gamma\overline{Z}) + (\beta + \delta\overline{Z})BigN + \gamma z + \delta BigN * z, \end{aligned}$$

と書き換えられるので，Zをセンタリングして推定した場合には，*BigN*の係数はβからに変化するが，ZとBigN*Zの係数に変化は生じない。

quality）が，企業の利益の質に与える影響を調査するために，以下のようなモデルを推定するとする。

$$EarnQ = \alpha + \beta AQ + \gamma Z + \delta AQ * Z, \tag{6}$$

$EarnQ$：利益の質を表す従属変数，

AQ　　：調査対象変数で，監査の質の程度を表す連続変数，

Z　　　：調整変数とよばれる何らかの独立変数。

このとき，(6)式の推定結果が，

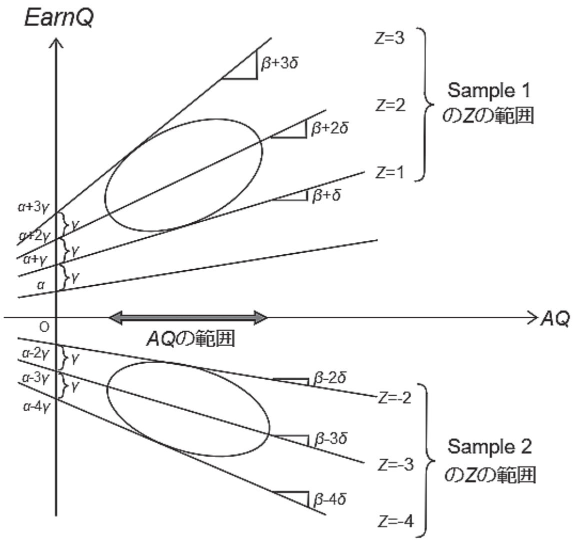
$$EarnQ = \hat{\alpha} + \underset{(+)}{\hat{\beta}}AQ + \underset{(+)}{\hat{\gamma}}Z + \underset{(+)}{\hat{\delta}}AQ * Z, \tag{7}$$

(+) (+)　 (+)　(+)

というように，全ての係数推定値が正であったとする。なお先と同様，$\hat{\alpha}$の符号は解釈に影響を与えないが，図示の都合上正の値であるとしており，同様の理由で$\hat{\beta}$，$\hat{\gamma}$，$\hat{\delta}$の値に大きな差はないとする。このとき，全ての係数推定値が正であったので，(7)式の解釈を，以下のように行ったとする。

解釈4：企業の利益の質は，監査の質が高くなるほど上昇し，その上昇度合いはZの値が大きくなるとより大きくなる。

図4　交差項が連続変数×連続変数の場合の図例



解釈4は，一見問題がないように思えるのだが，ここで図4を見て欲しい。図4は，AQの取る範囲は正であると仮定し，さらに，Sample 1はZの範囲が$1 \leq Z \leq 3$，Sample 2は$-2 \leq Z \leq -4$である場合の散布図を描いている。Sample 1の場合には解釈4で良いが，Sample 2の場合には次のように解釈するのが自然である。

解釈5：企業の利益の質は，監査の質が高くなるほど低下するが，その低下度合いはZの

値が大きくなると緩和される。

ここで問題なのは，Sample 1でもSample 2でも，(6)式の推定結果が同じ(7)式になるということである。すなわち，調整変数Zの動く範囲を考慮することなく(6)式の結果のみから判断してしまうと，本来，解釈5が適切であるはずなのに誤って解釈4としてしまったり，あるいは，その反対の解釈を行ってしまう危険性があるのである。

そこで，前章同様，Zをセンタリングしたzを用いて(6)式を推定してやり，その推定結果が，以下のように，

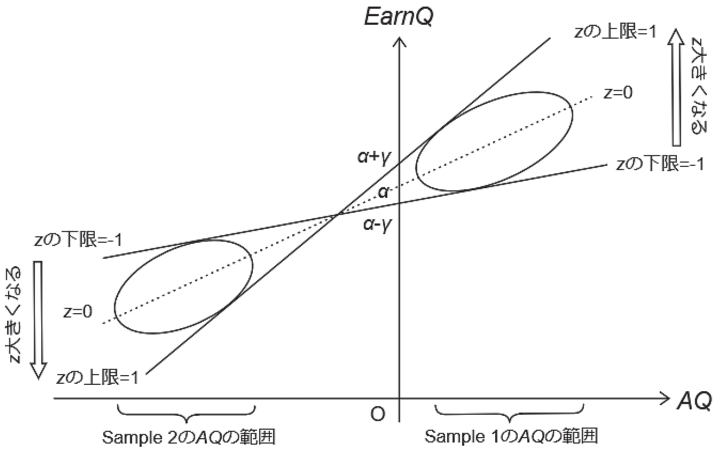
$$EarnQ = \hat{\alpha} + \hat{\beta}AQ + \hat{\gamma}z + \hat{\delta}AQ * z, \qquad (8)$$
$$(+)\ (+)\quad (+)\ (+)$$

全ての係数推定値が正であった場合には，次のような解釈ができる。

解釈6：Zの平均値では，企業の利益の質は監査の質が高くなるほど上昇し，その上昇度合いはZの値が大きくなるとより大きくなる。

しかしながら，解釈6も，AQが正の範囲を取るという仮定を外してしまうと，必ずしも適切な解釈であるとは限らない。図5は，(8)式を，zの範囲が$-1 \leq z \leq 1$であるとして描いた例である。Sample 1の場合もSample 2の場合も，$z=0$では，監査の質が高くなるほど企業の利益の質も上昇しており，またzの値が大きくなるほど監査の質の高さが利益の質の上昇に与えるインパクト（正の傾き）は大きくなっている。ただし，Sample 1では，zが大きくなるにつれて利益の質の水準も上昇しているが，Sample 2ではzが大きくなるにともなって利益の質の水準が下降している。

図5　調整変数だけをセンタリングした場合の図例



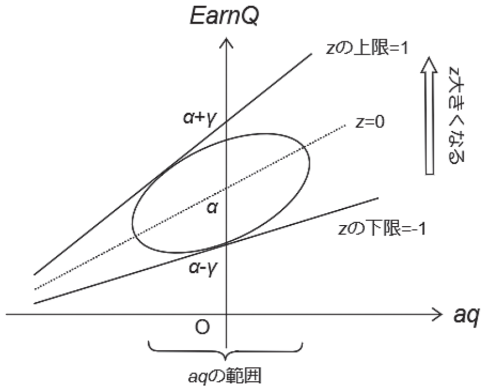
このように，調整変数Zをセンタリングしても，調査対象変数AQをセンタリングしていないと，解釈に曖昧さが残ってしまう。従って，連続変数同士の交差項の場合には，両変数にセンタリングを施すべきといえる。そして，その推定結果が，

$$EarnQ = \hat{\alpha} + \hat{\beta}aq + \hat{\gamma}z + \hat{\delta}aq * z, \qquad (9)$$
$$\quad (+)\ (+)\quad (+)\ (+)$$

のように，係数推定値が全て正であったとすると，(9)式は図6のように表されるので，以下のような解釈が行えるのである[3)]。

解釈7：Zの平均値では，企業の利益の質は監査の質が高くなるほど上昇する。また，Zが大きくなると利益の質が上昇するとともに，監査の質の高さが利益の質の上昇に与えるインパクトも大きくなる。

図6　調整変数と調査対象変数の両方をセンタリングした場合の図例



4．Main Effectのない交差項モデル

交差項を含むモデルにおいて，Main Effectのないモデルとは，調査対象変数の1次の項が欠落しているモデルであり，(2)式の場合には，$\beta BigN$の存在しない，

$$EarnQ = \alpha + \gamma Z + \delta BigN * Z, \qquad (10)$$

のようなモデルのことである。なお，以下の議論は，連続変数同士の交差項モデルにおいても成立するが，説明を容易にするために，本章ではダミー変数×連続変数の交差項モデルを用いて議論する。

今，(10)式のZをその平均値にセンタリング（$z = Z - \overline{Z}$）すると，

3）AQとZをセンタリングした変数を，それぞれ，$aq = AQ - \overline{AQ}$，$z = Z - \overline{Z}$と定義すると，(6)式は，

$$\begin{aligned} EarnQ &= \alpha + \beta AQ + \gamma Z + \delta AQ * Z \\ &= (\alpha + \beta\overline{AQ} + \gamma\overline{Z} + \delta\overline{AQ} * \overline{Z}) + (\beta + \delta\overline{Z})(AQ - \overline{AQ}) + (\gamma + \delta\overline{AQ})(Z - \overline{Z}) + \delta(AQ - \overline{AQ})(Z - \overline{Z}) \\ &= (\alpha + \beta\overline{AQ} + \gamma\overline{Z} + \delta\overline{AQ} * \overline{Z}) + (\beta + \delta\overline{Z})aq + (\gamma + \delta\overline{AQ})z + \delta aq * z, \end{aligned}$$

と書き換えられるので，AQとZををセンタリングして推定した場合には，AQの係数はβから$\beta + \delta\overline{Z}$に変化し，$Z$の係数は$\gamma$から$\gamma + \delta\overline{AQ}$に変化するが，$AQ*Z$の係数に変化は生じない。

$$
\begin{aligned}
EarnQ &= \alpha + \gamma Z + \delta BigN * Z \\
&= (\alpha + \gamma\overline{Z}) + \delta\overline{Z}BigN + \gamma(Z - \overline{Z}) + \delta BigN * (Z - \overline{Z}) \\
&= (\alpha + \gamma\overline{Z}) + \delta\overline{Z}BigN + \gamma z + \delta BigN * z,
\end{aligned}
$$

となり，$BigN$の１次の項が現れてしまう。

このことは，Main Effectを含まないモデルの調整変数をセンタリングすると，その推定結果は，元の推定結果と全く異なるものとなってしまうということを意味している。

これを，図を用いて説明する前に，調整変数の平均値へのセンタリングが定数項に与える影響について考察を行うことにする。(10)式のZをセンタリングした以下の式，

$$EarnQ = \alpha + \gamma z + \delta BigN * z,$$

の定数項αの推定量は，

$$\hat{\alpha} = \overline{EarnQ} - \hat{\gamma}\overline{z} - \hat{\delta}\overline{BigN * z},$$

と表現されるが，$\overline{z} = 0$であることを考慮すると，

$$\hat{\alpha} = \overline{EarnQ} - \hat{\delta}\overline{BigN * z}, \tag{11}$$

と表せる。

ここで，BigNクライアント企業とNon-BigNクライアント企業がとるzの値を，それぞれ，$z_{BigN=1}$，$z_{BigN=0}$で表すとすると，

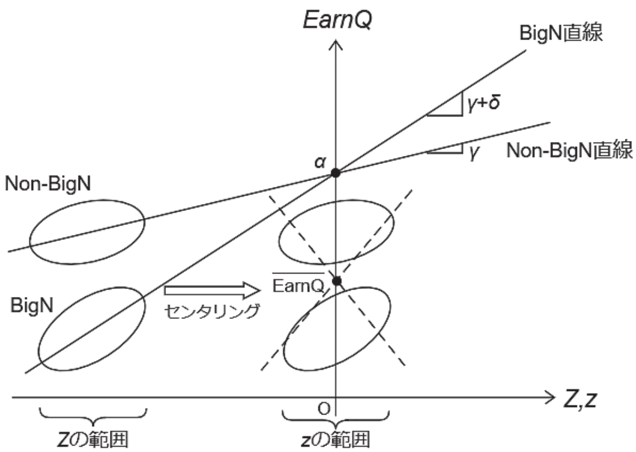
$$\sum z = \sum z_{BigN=1} + \sum z_{BigN=0} = 0,$$

が成り立つ。このとき，$\sum z_{BigN=1} \simeq \sum z_{BigN=0}$である場合には，$\overline{BigN * z} \simeq 0$となるので，(11)式は，

$$\hat{\alpha} \simeq \overline{EarnQ},$$

となる。つまり，Zに関するバラつきがBigNクライアント企業とNonBigNクライアント企業

図７　Main Effectのない交差項モデルの図例



で大きな差がない場合にZをセンタリングすると，定数項の推定量は，$EarnQ$の平均値に近似されるのである。

図7は，上記の結果に基づいて，Main Effectのない交差項モデルをセンタリングした場合の影響を図示したものである。もともとMain effectのないモデルでは，Non-BigN直線（$EarnQ=\alpha+\gamma Z$）とBigN直線（$EarnQ=\alpha+(\gamma+\delta)Z$）とが，縦軸上の一点（$0,\alpha$）で交わらなければならないという制約がある。このとき，Zに関してセンタリングを行うと，Zに関するバラつきがBigNとNon-BigNクライアント企業で大きく違わない場合には，両直線は，（$0, \overline{EarnQ}$）上を通って強引にデータにフィットさせないといけないので，両直線の傾きはセンタリング前とは大きく異なってしまうのである。

以上の考察から，理論的なモデル構築上，Main Effectを含めない方が良いという特別な制約がないのであれば，推定上の観点からは，その統計的有意性の有無にかかわらず，Main Effectを推定モデルに加えておく方が好ましいといえる。

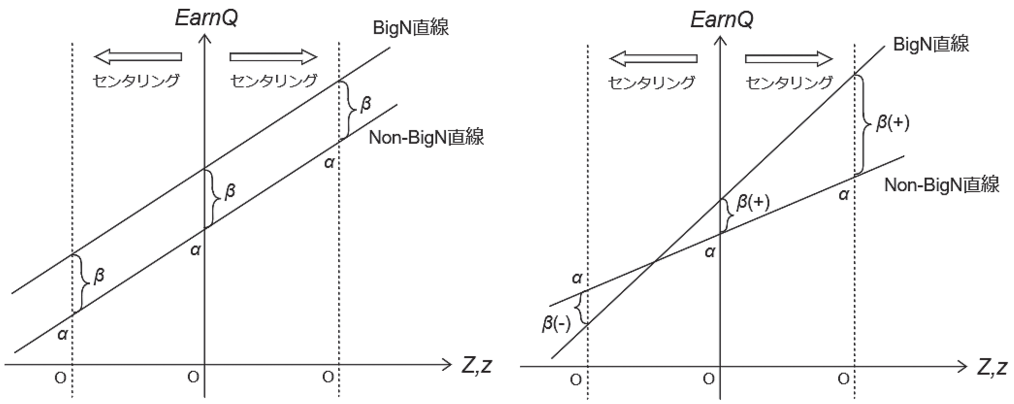
5．センタリングが必ずしも必要でないケース

5.1　2次式におけるセンタリングの重要性

前章までは，主として交差項を含むOLSモデルにおけるセンタリングの重要性について述べた。しかしながら，実際のところ，実証研究者間でセンタリングの重要性に対する認識度合いはあまり高くないと思われる。その理由のひとつとして考えられるのが，交差項を含まないモデルでは，センタリングを行う必要性がないということに起因するものである。

図8　センタリングが不要な場合と必要な場合の図例

(i) 交差項を含まないモデルの図例　　　　(ii) 交差項を含むモデルの図例



例えば，図8 (i)は，(2)式から交差項を除いた以下のモデルを例示したものである。

$$EarnQ=\alpha+\beta BigN+\gamma Z.$$

Zをセンタリングするということは，縦軸を左右に平行移動させるということであるので，ど

のように移動させてもBigN直線とNonBigN直線の間の垂直方向間の距離はβで一定である。したがって，Zをセンタリングしても解釈に影響を与えない。

一方，図８(ii)は，交差項を含むモデル，

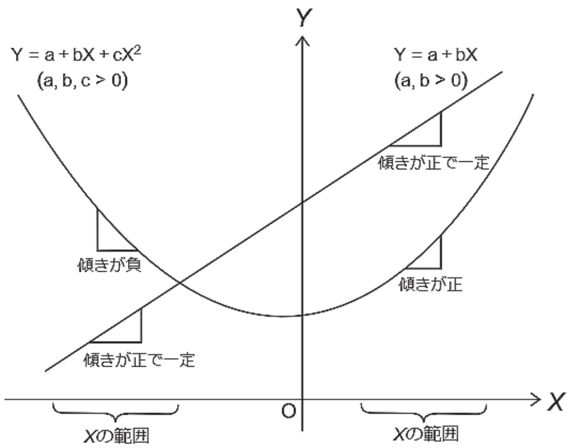
$$EarnQ = \alpha + \beta BigN + \gamma Z + \delta BigN * Z,$$

を例示したものである。この場合には，Zをセンタリングして縦軸を左右に平行移動させると，Zの平均値におけるBigN直線とNonBigN直線間の距離を表すβは，値や符号が変化してしまう。従って，Zをセンタリングすることには意味があるのである。

以上のように，推定モデルが交差項を含まない単純な１次式の場合にはセンタリングを行う必要性はないのだが，交差項を含めると複雑な２次式に変化するので，センタリングが重要になってくるのである。そして，多くの実証研究者はこの事実を十分に認識しておらず，センタリングを実施することなしに，安易に１次の推定モデルに交差項を加えてしまっているのではないかと思われるのである。

最後に，１次式と２次式におけるセンタリングの必要性の有無については，図９に示されている，１次式の$Y = a + bX \quad (a, b > 0)$と，２次式の$Y = a + bX + cX^2 \quad (a, b, c > 0)$のグラフを考えると容易に理解できる。

図９　２次式におけるセンタリングの必要性の図例



直線である１次式の場合には，傾きが正で一定であるので，XがYに与えるインパクトはXの範囲に係わらず一定である。一方，下に凸な曲線である２次式の場合には，Xの範囲によって傾きが正であったり負であったりと変化するので，XがYに与えるインパクトは一定ではない。従って，２次式の場合には，XがYに与える影響の解釈を容易にするために，Xをセンタリングしてやることが重要になってくるのである。

5.2　センタリングが必ずしも必要ではないケース

ここで注意しなければいけないのは，モデルに交差項が含まれているときにはどのようなケースでもセンタリングを施せば良いと考えてしまうことで，交差項を含むモデルであっても，センタリングを行うべきではないケースも存在するのである。

例えば，企業の信用スコアと利益の関係を調査するために以下のようなモデルを推定したいとする。なお，パラーメータの下の符号は予想される符号である。

$$CrScore = \alpha + \underset{(-)}{\beta} Loss + \underset{(+)}{\gamma} ROE + \underset{(-)}{\delta} Loss * ROE, \tag{12}$$

$CrScore$：信用スコアを表す従属変数,

$Loss$　：当期純利益が赤字ならば１，それ以外はゼロを取るダミー変数,

ROE　：当期純利益を純資産で除した自己資本利益率。

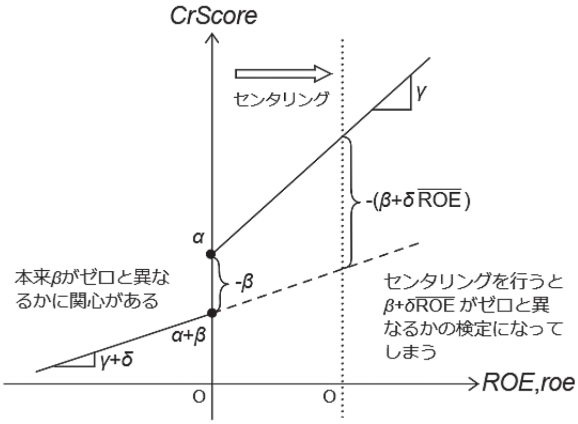
(12)式は，企業の信用スコアはROEと正の相関があるが，赤字になると信用スコアは大きく低下しROEとの相関も弱くなるということを予想している。この場合，気を付けねばならないのが，$Loss$とROEの関係である。つまり，$Loss$は当期純利益が赤字ならば１の値を取るダミー変数であるので，ROEが負の場合には必ず$Loss$の値は１となるということである。

この場合，ROEをセンタリングしたroeを用いて推定してしまうと，(12)式は，

$$\begin{aligned}CrScore &= \alpha + \beta Loss + \gamma ROE + \delta Loss * ROE\\ &= (\alpha + \gamma\overline{ROE}) + (\beta + \delta\overline{ROE})Loss + \gamma(ROE - \overline{ROE}) + \delta Loss * (ROE - \overline{ROE})\\ &= (\alpha + \gamma\overline{ROE}) + (\beta + \delta\overline{ROE})Loss + \gamma roe + \delta Loss * roe,\end{aligned}$$

と変形されるので，$Loss$の係数に対する有意性検定は，βがゼロと異なるかの検定から$(\beta + \delta\overline{ROE})$がゼロと異なるかの検定へと変化してしまう。しかしながら，本来知りたいのは，企業の信用スコアが利益が赤字になると大きく低下するかどうかということであるので，βが

図10　センタリングが必ずしも必要でない場合の図例



有意にゼロと異なるかどうかである。図10は，(12)式にセンタリングを行った場合の問題点を図示したものである。

このように，交差項を構成する２変数間にメカニカルな関係が存在する場合には，センタリングを施すと本来の調査目的が損なわれてしまう危険性があるので，十分注意が必要である。

６．Probitモデルにおける交差項の解釈と推定

6.1　基本的事項の説明

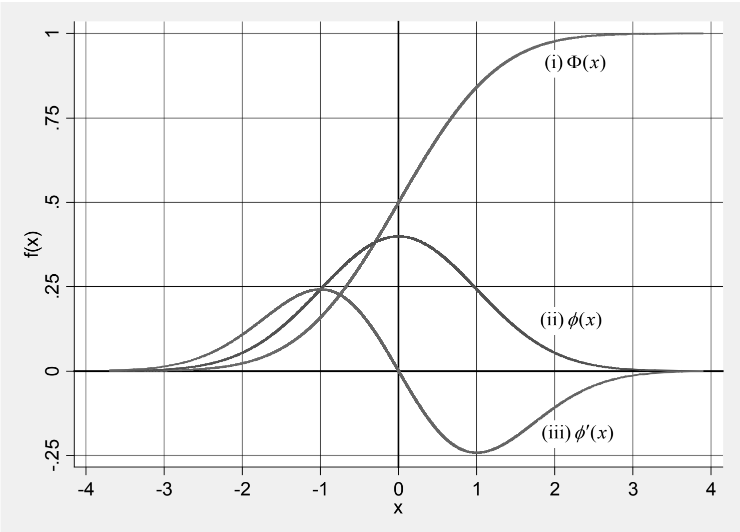
(6)式のような交差項を含む線形モデルでは，調査対象変数Xや調整変数Zをセンタリングすることによって，推定結果の解釈を容易にすることができた。しかしながら，Probitモデルのような非線形モデルが交差項を含む場合には，たとえXやZをセンタリングしても，その推定結果の解釈は難解である。

そこで本章では，説明を容易にするために，推定モデルとして，既にセンタリングが施された連続変数xとzを用いる以下のモデルを使用する。

$$Y = \alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z + \varepsilon.$$

また，表記についても，以下のように定める。

図11　標準正規分布のCDF，PDF，PDFの１次導関数のグラフ



（注）標準正規分布のCDF，PDF，PDFの１次導関数の関数式およびその値域は以下のようである。

(i) 標準正規CDF：$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$，　$0 < \Phi(x) < 1$.

(ii) 標準正規PDF：$\Phi'(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$，　$0 < \phi(x) < 0.40$.

(iii) 標準正規PDFの１次導関数：$\Phi''(x) = \phi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$，　$-0.24 < \phi'(x) < 0.24$.

$F(.)$ ：一般的な関数形，

$\Phi(.)$：標準正規分布の累積分布関数（CDF），

$\phi(.)$ ：標準正規分布の確率密度関数（PDF）（$\Phi'(.) = \phi(.)$），

$\phi'(.)$：標準正規分布のPDFの１次導関数（$\Phi''(.) = \phi'(.)$）。

図11は，（i）$f(x) = \Phi(x)$，（ii）$f(x) = \phi(x)$，（iii）$f(x) = \phi'(x)$を描いたものである。図からわかるように，（i）（ii）（iii）の値域は，それぞれ，$0 < \Phi(x) < 1$，$0 < \phi(x) < 0.40$，$-0.24 < \phi'(x) < 0.24$である。標準正規分布のCDFとPDFはxの値にかかわらず必ず正の値を取るが，PDFの１次導関数は正負両方の値を取るという点が重要である。

6.2　交差項のMarginal Effect

最初に，前章までで述べたOLSモデルも，本章で述べるProbitモデルも，Yの条件付き期待値を推定しているという点では同じである，

$$E[Y \mid x, z] = F(\alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z). \tag{13}$$

この関数形$F(.)$が最もシンプルな場合には，以下のOLSモデルとなる，

$$E[Y \mid x, z] = \alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z.$$

一方，Probitモデルでは，従属変数が０か１の２値変数であり，$F(.)$は標準正規分布の累積分布関数となっている，

$$E[Y = 1 \mid x, z] = \Phi(\alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z). \tag{14}$$

次に，OLSモデルとProbitモデルの主効果（(13)(14)式の右辺第２項）に関するMarginal Effectについて考える。(13)(14)式の主効果に関するMarginal Effectは，交差項x*zを別個の独立変数とみなした場合のxのMarginal Effectであるので，OLSモデルでは，

$$\frac{\partial E[Y \mid x, z, x * z]}{\partial x} = \beta,$$

であり，Probitモデルの場合には，$A = \alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z$とすると，

$$\frac{\partial E[Y = 1 \mid x, z, x * z]}{\partial x} = \frac{d\Phi(A)}{d(A)} \frac{\partial (A)}{\partial x} = \phi(A)\beta, \tag{15}$$

となる。

すなわち，主効果のMarginal Effectは，OLSモデルでは主効果の係数βで一定であるが，Probitモデルでは$\phi(A)$の値によって変化するといえる。ただし，図11からもわかるように，$\phi(A)$はAがどのような値を取っても常に正であることには変わりないので，Marginal Effectの符号はβと一致する。また，主効果のMarginal Effectがゼロと異なるかの検定統計量は，OLSモデルでは一定であるが，Probitモデルの場合には観測値ごとに変化する。

第３に，OLSモデルとProbitモデルの交差項（(13)(14)式の右辺第４項）に関するMarginal Effectについて考える。(13)(14)式の交差項に関するMarginal Effectは，xとzに関する交差

偏導関数となるので，OLSモデルでは，

$$\frac{\partial E[Y \mid x,z]}{\partial x \partial z} = \delta,$$

である。一方，Probitモデルの場合には，$A = \alpha + \beta x + \gamma z + \delta x * z$とすると，

$$\frac{\partial E[Y=1 \mid x,z]}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Phi(A)}{dA}\frac{\partial A}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\phi(A)(\gamma+\delta x)\big) \tag{16}$$
$$= \phi'(A)(\beta+\delta z)(\gamma+\delta x) + \phi(A)\delta,$$

となる。

つまり，交差項のMarginal Effectは，OLSモデルでは交差項の係数δで一定であるが，Probitモデルの場合には複雑に変化するといえる。(16)式の右辺第2項の$\phi(A)\delta$は，$\phi(A) > 0$なので，その符号はδと一致する。ただし，右辺第1項は，$\phi'(A)$が，図11にもあるように，$-0.24 < \phi'(A) < 0.24$の値を取るので，その符号がδと一致するという保証がない。従って，Probitモデルの交差項の係数δとそのMarginal Effectは，値は言うに及ばず，符号についても一致するとは限らないのである。また，交差項のMarginal Effectに関する検定統計量は，OLSモデルでは一定であるが，Probitモデルの場合には観測値ごとに変化する[4)]。以上の結果をまとめたものが，表1である。

表1　OLSモデルとProbitモデルにおける係数とMarginal Effectの値およびその差

Panel A：係数とMarginal Effectの値

モデル	項	係数	Marginal Effect
OLSモデル	主効果	β	β
	交差項	δ	δ
Probitモデル	主効果	β	$\phi(A)\beta$
	交差項	δ	$\phi'(A)(\beta+\delta z)(\gamma+\delta x)+\phi(A)\delta$

Panel B：係数とMarginal Effectの差

モデル	項	値	符号	t値／z値
OLSモデル	主効果	○	○	○
	交差項	○	○	○
Probitモデル	主効果	×	○	×
	交差項	×	△	×

(注)○＝同じ，△＝異なりうる，×＝異なる。

4）Probitモデルにおける主効果および交差項のMarginal Effectの分散の推定には，Delta法を用いる。つまり，(15)式と(16)式を，それぞれ，βとδの関数とみなして，

主効果のMarginal Effectの分散：$\left[\frac{d\phi(A)}{d(A)}\frac{\partial(A)}{\partial\beta}\beta + \phi(A)\right]^2 \sigma_\beta^2 = \left[\phi'(A)x\beta + \phi(A)\right]^2 \sigma_\beta^2,$

交差項のMarginal Effectの分散：$\left[\frac{\partial\left\{\phi'(A)(\beta+\delta z)(\gamma+\delta x)+\phi(A)\delta\right\}}{\partial\delta}\right]^2 \sigma_\delta^2,$

を求めるのである。これらの分散推定量を用いれば，それぞれのMarginal Effectの有意性検定が行える。

6.3　関数形が交差項のMarginal Effectに与える影響

本節では，Probitモデルの関数形が交差項のMarginal Effectに与える影響について述べる。今，交差項の含まれていない以下のOLSモデルとProbitモデルについて考える。

$$E[Y\mid x,z]=\alpha+\beta x+\gamma z, \tag{17}$$

$$E[Y=1\mid x,z]=\Phi(\alpha+\beta x+\gamma z). \tag{18}$$

ここで，OLSモデルの(17)式について，xとzについて交差偏微分すると，

$$\frac{\partial E[Y\mid x,z]}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}(\gamma)=0,$$

となる。一方，Probitモデルの(18)式についても，$B=\alpha+\beta x+\gamma z$として，先と同様に$x$と$z$について交差偏微分すると，

$$\frac{\partial E[Y=1\mid x,z]}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\Phi(B)}{dB}\frac{\partial B}{\partial z}\right)=\phi'(B)\beta\gamma, \tag{19}$$

と表されるので，$\phi'(B)=0$でない限りは，(19)式は通常ゼロとはならない。

つまり，OLSモデルでは，交差項が存在しない場合には当然のことながらxとzの交互作用効果は存在しないのだが，Probitモデルでは，たとえ交差項が存在しなくてもxとzの交互作用効果が存在してしまうのである[5)]。従って，たとえ交差項を含むProbitモデルの交差項のMarginal Effectがゼロとは異なっていたとしても，果たしてそれが本当にxとzの交互作用効果によるものなのか，それとも単にProbitモデルの関数形の影響なのかがはっきりとしないのである[6)]。

また，(19)式の交互作用効果が必ずゼロとなる$\phi'(B)=0$とは，図11からもわかるように，$\Phi(B)=0.5$のときだけであり，$\Phi(B)$は0.5近辺ではほぼ直線となっている。つまり，Probitモデルは$\Phi(.)$の中央付近では(17)式のOLSモデルのような線形関数となっているので，交互作用効果が出てこないのである。

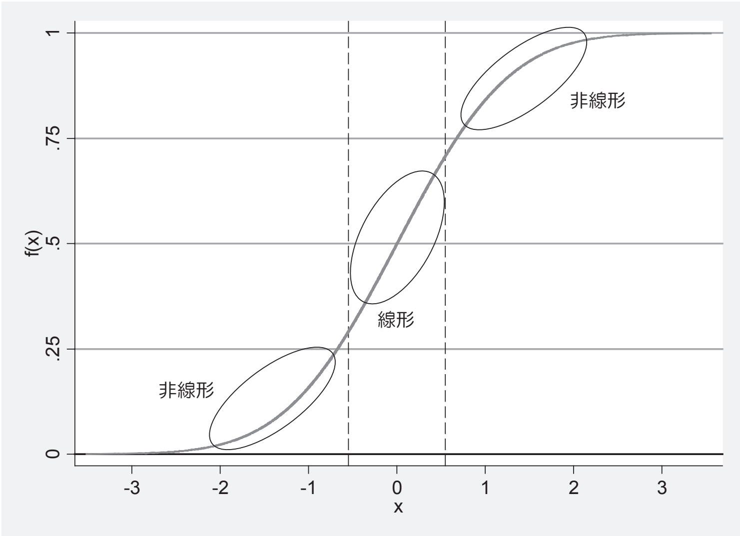
このことは，交差項を含むProbitモデルを実際に推定する際の重要な問題点を示唆している。一般的に，Probitモデルでは，その従属変数の値である０と１の観測値数がサンプルの半分ずつであるような場合には（例えば，大学に進学するかどうかの近年のサンプル），そのFitted Probabilityは分布関数の中央の0.5付近に集中しやすく，０と１のどちらかに観測値が偏っている場合には（例えば，BigNとNon-BigNのクライアント企業数），Fitted Probabilityは分布の端に集中することが多い。そして，Probitモデルの用いる分布関数$\Phi(.)$は，図12に示されているように，中央付近が線形で端の方は非線形になっているので，０と１の観測値に偏りがあ

5）(19)式は(16)式における交差項の係数δがゼロであると仮定した場合と等しい。

6）その意味では，Probitモデルにおいては，「交差項のMarginal Effect」というよりは，「モデルの交互作用効果」と表現する方が適切であると思われるが，本稿では，OLSモデルとの比較の観点から，Probitモデルにおいても「交差項のMarginal Effect」という表現を用いている。

るサンプルを用いると，非線形項である交差項の係数やMarginal Effectは，モデルの背後にある経済理論とは関係なくゼロになりにくいのである。これが，交差項を含むProbitモデルを推定する際の関数形に関する問題点である。

図12　標準正規CDFの線形部分と非線形部分



（注）本図は標準正規CDFを示している。中央部分は線形に近く，両端部分は非線形になっていることがわかる。

6.4　Stataによる交差項のMarginal Effectの推定

交差項を含むProbitモデルの推定上の問題点としてしばしば指摘されるのが，Stataを初め，EViews，LIMDEP等の会計・ファイナンスの実証研究で頻繁に用いられる統計ソフトが，Probitモデルの交差項のMarginal Effectを正しく表示しないということである。そして，多くの実証研究者達が，その誤ったMarginal Effectに基づいて結果の解釈を行ってしまっているという証拠が，複数の研究で報告されている。

例えば，Ai and Norton（2003）の調査によると，1980-1999の期間にJSTORの経済系Journal 13誌に載った論文で，非線形モデルで交差項を使用するものが72本あったが，全ての論文において誤った交差項の解釈を行っていたと述べている。また，会計・ファイナンスの実証研究においても，これと同様の指摘がPowers（2005）によってなされている。

そこで本節では，最初に統計ソフトの問題点を指摘し，その後，正しいMarginal Effectの推定方法をStataを用いた実例で示すこととする。

Stataをはじめとする一般的な統計ソフトの問題点は，Probitモデルの交差項$x*z$を，２つの独立変数を掛け合わせたものとは認識せずに，ひとつの別個の独立変数であると認識してしまうことである。従って，そのMarginal Effectを，他の独立変数同様に，$\phi(A)\delta$として計算してし

まうのである。しかしながら，真の交差項のMarginal Effectは，$\phi'(A)(\beta+\delta z)(\gamma+\delta x)+\phi(A)\delta$であるので，通常両者の値は全く一致せず，唯一一致するのが，$\phi'(A)=0$，すなわち$A=0$のときだけである。ちなみに，そのときのMarginal Effectは，$\phi(0)=0.40$であるので，0.4δである。

統計ソフトの表示する交差項のMarginal Effect：$\phi(A)\delta$,

正しい交差項のMarginal Effect：$\phi'(A)(\beta+\delta z)(\gamma+\delta x)+\phi(A)\delta$.

Ai and Norton（2003）は，正しいMarginal Effectを計算するためのStataのコマンド**inteff**を作成し，The Stata Journalに掲載されているNorton, Wang, and Ai（2004）で，その詳細な使い方を説明しているので，以下では**inteff**の使い方を実例でもって示すことにする。

最初に，東証上場３月決算一般企業の2013-14のデータを用いて，次のようなProbitモデルを推定する。

$$E[BigN=1\,|\,\mathbf{x}]=\Phi(\beta_0+\beta_1 size+\beta_2 roa+\beta_3 sizeroa+\beta_4 Nsub+\beta_5 Repolag+\beta_6 Newissue),$$

BigN：大手監査法人のクライアント企業なら１，それ以外はゼロのダミー変数,

size：MVEに自然対数を取ったものでセンタリング済み,

roa：センタリング済みのROA,

sizeroa：*size*roa*の交差項,

Nsub：子会社の数,

Repolag：期末から決算日までの日数,

Newissue：新株もしくは社債を発行していれば１，それ以外はゼロのダミー変数。

Stataのコマンドは，

```
probit Bign size roa sizeroa Nsub Repolag Newissue
```

であり，その推定結果が表２である。

表２　Probitモデルの推定結果

```
Probit regression                               Number of obs   =       4670
                                                LR chi2(6)      =     289.45
                                                Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -2674.1863                     Pseudo R2       =     0.0513
```

bign	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
size	.1983294	.0159505	12.43	0.000	.1670671	.2295917
roa	-.8828337	.4800458	-1.84	0.066	-1.823706	.0580389
sizeroa	-.8602219	.2280397	-3.77	0.000	-1.307172	-.4132722
Nsub	-.0021982	.0008102	-2.71	0.007	-.0037862	-.0006103
Repolag	-.0111927	.0031547	-3.55	0.000	-.0173758	-.0050096
Newissue	-.0608394	.0427676	-1.42	0.155	-.1446624	.0229836
_cons	1.098111	.1283019	8.56	0.000	.8466442	1.349578

また，通常のMarginal Effectを得たい場合のStataコマンドは，

margins, dydx（size roa sizeroa Nsub Repolag Newissue）

であり，その結果が表３である[7)]。

ただし，表３のMarginal Effectは，交差項*sizeroa*に関しては誤ったMarginal Effectを表示しており，(16)式に基づく正しいMarginal Effectを得るためのStataコマンドは，

inteff Bign size roa sizeroa Nsub Repolag Newissue

である。これにより，表４および図13（i）（ii）が得られる。

表３　Marginal Effectの推定結果

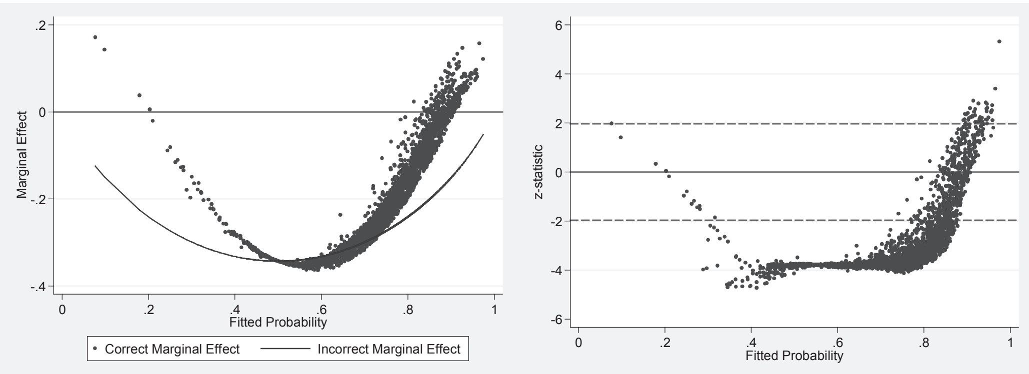
	dy/dx	Delta-method Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
size	.064467	.0049524	13.02	0.000	.0547605	.0741735
roa	-.2869652	.1559232	-1.84	0.066	-.5925692	.0186387
sizeroa	-.2796153	.073796	-3.79	0.000	-.4242527	-.1349779
Nsub	-.0007145	.0002627	-2.72	0.007	-.0012294	-.0001997
Repolag	-.0036382	.0010226	-3.56	0.000	-.0056425	-.0016339
Newissue	-.0197759	.0138943	-1.42	0.155	-.0470081	.0074564

表４　交差項に関する正しいMarginal Effectの記述統計量

Variable	Obs	Mean	Std. Dev.	Min	Max
_probit_ie	4670	-.233449	.1111717	-.3637688	.1716778
_probit_se	4670	.0674096	.0203325	.022838	.1220447
_probit_z	4670	-3.233878	1.246	-4.712335	5.325474

図13　交差項のMarginal Effectとその検定統計量の散布図

（i）交差項のMarginal Effectの散布図　　（ii）交差項のz-statisticの散布図



7）表３のMarginal Effectは，全観測値におけるMarginal Effectの平均である。全ての独立変数の平均値におけるMarginal Effectを示したい場合のStataコマンドは，

margins, dydx（size roa sizeroa Nsub Repolag Newissue）atmeans

または，**mfx**である。

表4の_probit_ieの行は，交差項*sizeroa*に関する正しいMarginal Effectの記述統計量を示している。表からは，交差項のMarginal Effectが，−0.363〜0.171の範囲に収まっており，平均は−0.233であることがわかる。また，_probit_zの行がMarginal Effectのz-statisticを示しており，その範囲は−4.712〜5.325で，平均は−3.233である。

図13(i)は，縦軸に各観測値におけるMarginal Effectの値，横軸にFittied Probabilityをとった散布図である。誤ったMarginal Effectが曲線で示されている。また，Marginal Effect = 0の位置で横線が引かれており，これより下の観測値のMarginal Effectは負で，上の観測値のMarginal Effectは正であることを示している。一方，図13(ii)は，縦軸に各観測値におけるMarginal Effectのz-statistic，横軸にFittied Probabilityをとった散布図である。z-statistic = 1.96と−1.96の位置で2本の横線が破線で引かれているので，上の破線より上の観測値は5％水準で正に有意，下の破線より下の観測値は5％水準で負に有意であるといえる。

図13からは，*sizeroa*のMarginal Effectが正負両方の符号をとり，有意性もまちまちであることがわかる。

6.5　本章のまとめ

本章では，Probitモデルに含まれる交差項に関連する注意事項として，以下の3点を指摘している。

(i)　Probitモデルの交差項のMarginal Effectは，その係数値とは，値，符号，z値の全ての点で異なる，もしくは異なりうる，

(ii)　従属変数の0と1の観測値数に偏りがある場合には，Probitモデルの関数形の影響を受けて，非線形項である交差項の係数およびMarginal Effectはゼロになりにくい，

(iii)　Stataを初めとする一般的な統計ソフトでは，交差項が2つの独立変数の積であるということを認識できないので，Probitモデルの交差項の誤ったMarginal Effectが表示される。

そして，(iii)の問題の対処法として，Ai and Norton（2003）は，Stataの**inteff**コマンドを作成し，Probitモデルにおける正しいMarginal Effectの値およびz-statisticを算定可能にしている。

しかし，ここで疑問となるのが，観測値ごとに交差項のMarginal Effectの値，符号，z-statisticが異なる，あるいは異なりうるということがわかったとして，そこから一体どのような統計的推論を導けばよいのかということである。つまりは，Marginal Effectを正しく計算できたのは良いのだが，その結果をどう解釈したら良いのかがわからないことがままあるということである。確かに，図13のように，Marginal Effectの符号が異なる観測値が少なからずあったり，統計的に有意でない観測値が多くみられるような状況では，一体どのような結論を導いたら良いのかが明瞭でない。

そこで，Greene（2010）やKaraca-Mandic, Norton, and Dowd（2012）では，交差項のMarginal Effectを計算する前に，まず，モデル設計の段階で交差項を含めることにどのような意味があるのかという，理論的な検討を厳格に行うことが最も重要であると主張している。さらに，統計的な結果に加えて，得られた推定値から交差項を形成する両変数がFittied Probabilityに与える影響を図示することが，交差項を含むモデルの理解に役立つと述べている。

図14　交互作用効果の図による検証

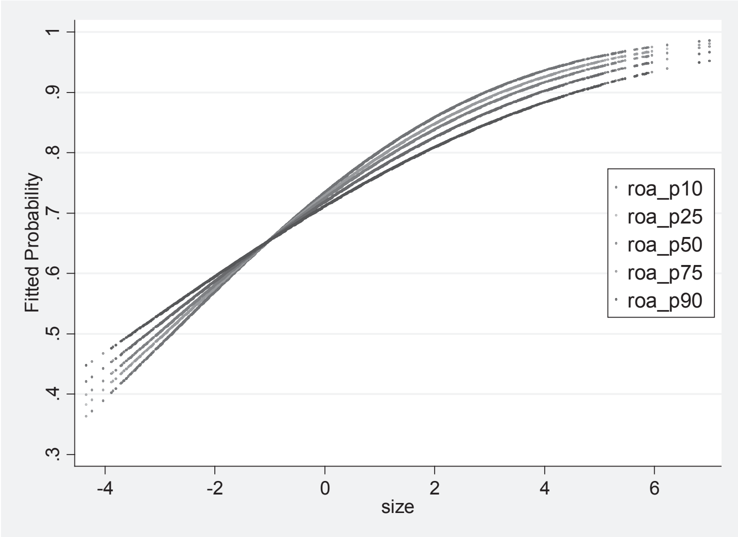


図14は，交互作用効果を視覚的に確認するために，前節の分析を用いて，調整変数*roa*の10，25，50，75，90 percentileにおける，調査対象変数*size*とFittied Probabilityの関係を散布図で示したものである。なお他の独立変数は，その平均値で固定している。*size*の値が大きい図の右端では，上からroa_p10，roa_p25，roa_p50，roa_p75，roa_p90の順番であるが，*size*の値が小さい図の左端では，その順番が逆になっている。このことは，企業規模とBigN選択確率の関係がROAの水準によって変化するということを意味しており，交互作用効果の存在を示唆している。しかしながら，図全体で見る限りはその差異は微小であり，結論としては企業規模とROAの交互作用効果はほとんど存在しないと判断するのが妥当であると思われる。

7．　おわりに

会計・ファイナンスにおける実証研究では，交差項を含む検証モデルが用いられることが多いが，その使用や解釈についてはアドホックである場合が多く，実証研究者の間で，交差項に対する理解が十分進んでいないのではないかと思われる節がある。そこで，本稿では，OLSモデルとProbitモデルに交差項が含まれている場合に気を付けねばならない点を図を用いること

によって指摘し，その対処法について述べている。

最初に，OLSモデルに含まれる交差項については，調査対象変数がダミー変数，調整変数が連続変数である場合には，調整変数をその平均値にセンタリングし，両変数ともに連続変数である場合には，両変数にセンタリングを施すことが，推定結果の解釈に役立つことを述べている。

次に，OLSモデルで，交差項は含むがMain Effectがないというモデルは，センタリングを行うと全ての係数が影響を受けてしまう。従って，理論的なモデル構築上Main Effectを含めない方が良いという特別の制約がない限りは，推定上の観点からは，その統計的有意性の如何にかかわらず，Main Effectを推定モデルに加えておく方が好ましいといえる。さらに，交差項を構成する２変数間にメカニカルな関係が存在するような場合には，センタリングを施すと本来の調査目的が損なわれてしまうことがあるので，モデルによっては，センタリングが必要でないケースも存在するということを指摘している。

最後に，Probitモデルが交差項を含む場合には，交差項を構成する変数にセンタリングを施しても，(i)Probitモデルの交差項の係数値とMarginal Effectとでは，値が異なるだけでなく符号までも異なりうる，(ii)従属変数の０と１の観測値数に偏りがある場合には，交差項は関数形の影響を強く受けてしまう，(iii)一般的な統計ソフトでは，Probitモデルの交差項の誤ったMarginal Effectが表示される，といった固有の問題が残されるということを指摘している。そして，(iii)の問題の対処法として，Ai and Norton（2003)は，Stataの**inteff**コマンドを作成し，Probitモデルにおける正しいMarginal Effectの値および検定統計量を算定可能にしている。

しかしながら，たとえ**inteff**の使用によって正しいMarginal Effectが計算できたとしても，Marginal Effectの符号が異なる観測値が多くあったり，統計的に有意でない観測値が多くみられるような状況では，一体どのような統計的推論を導けば良いのかが明瞭ではないという問題は残る。そこで，そのような状況を回避するためにも，Greene（2010）やKaraca-Mandic, Norton, and Dowd（2012）が主張するように，最初のモデル設計の段階で，交差項を含めることの理論的な検討を厳格に行うことが重要であるといえる。また，交差項の影響は表による数値結果からだけでは理解が困難であるので，具体的に図示することも交差項を含むモデルの解釈に役立つであろう。

引用文献

Ai, C. and E. Norton, [2003], "Interaction terms in logit and probit models," *Economics Letters* 80 (1), 123-129.

Aiken, L. and S. West, [1991], *Multiple regression: Testing and interpreting interactions*. Sage Publications, Ltd., London, UK.

Greene, W., [2010], "Testing hypotheses about interaction terms in nonlinear models," *Economics Letters* 107 (2), 291-296.

Jaccard, J. and R. Turrisi, [2003], *Interaction effects in multiple regression 2nd edition*. Sage Publications, Inc., Iowa City, IA.

Karaca-Mandic, P., E. Norton, and B. Dowd, [2012], "Interaction terms in nonlinear models," *Health Services Research* 47 (1-1), 255-274.

Norton, E., H. Wang, and C. Ai, [2004], "Computing interaction effects and standard errors in logit and probit models," *The Stata Journal* 4 (2), 154-167.

Powers, E., [2005], "Interpreting logit regressions with interaction terms: an application to the management turnover literature," *Journal of Corporate Finance* 11 (3), 504-522.