

4A303-8 レプリカ法を用いたソーラス符号の解析

田所 大昂(関西大大学院) 三好 誠司(関西大)

結論 ソーラス符号の誤り訂正能力をレプリカ法を用いて理論的に調べた。得られた結果は計算機実験と良く一致した。また、西森温度で復号の良さ M が最大になることを確認した。さらに、情報ビット数 N が大きくなると試行毎のばらつきが小さくなること、積をとる数 K の値を大きくすると復号の良さがよくなることを確認した。

背景

- デジタル通信では誤り訂正符号が使われる
- 誤り訂正の性能上限としてシャノン限界が存在する
- シャノン限界を漸近的に満たす符号の一つにソーラス符号がある
- 多体相互作用系の強力な解析手法としてレプリカ法が知られている

目的

加法的白色ガウス雑音通信路におけるソーラス符号の誤り訂正能力をレプリカ法を用いた理論解析と計算機実験で調べる

モデル(2体の場合)



- 送りたいメッセージの代わりにその積 $\xi_i \xi_j$ を送信
- 通信路では平均0, 分散 $\frac{J^2}{N}$ のガウスノイズが重畳
- 雑音が重畳した受信信号 J だけを用いて ξ を推定する

手法 レプリカ法による理論解析(K=2の場合)

1. 受信信号 J とビット σ に関する事後分布

事後分布 $P(\sigma|J) = \frac{\exp[-\beta H(\sigma, J)]}{Z}$ ハミルトニアン $H(\sigma, J) = -\sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$

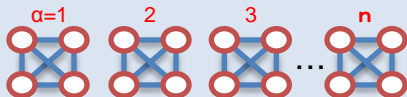
分配関数 $Z = \text{Tr}_{\{\sigma_i\}} \exp[-\beta H(\sigma, J)]$

2. 自由エネルギー F のノイズに関する平均 $\langle\langle F \rangle\rangle$ を計算

$\langle\langle F \rangle\rangle = -\frac{1}{\beta} \langle\langle \ln Z \rangle\rangle$ **計算が困難!!**

レプリカ法

- 恒等式 $\langle\langle \ln Z \rangle\rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle\langle Z^n \rangle\rangle - 1}{n}$ ($\langle\langle Z^n \rangle\rangle$ は n が自然数なら計算可能!!)
- $\langle\langle Z^n \rangle\rangle$ を自然数 n で計算し、実数へ解析接続
- レプリカ対称性を仮定
- $N \rightarrow \infty$ と $n \rightarrow 0$ の極限操作の入れ替え
- 鞍点法で積分を評価
- 相互作用 J_{ij} は同じだが、ビット σ が異なる系を n 個複製する



$\langle\langle Z^n \rangle\rangle = \int \left[\prod_{i<j} dJ_{ij} P(J_{ij}) \right] \text{Tr}_{\{\sigma^\alpha\}} \exp \left[-\beta \sum_{\alpha} \sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \right]$

3. 巨視的変数 $q_{\alpha\beta}, m_\alpha$ を導入

$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta$ $m_\alpha = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \sigma_i^\alpha$

レプリカ α, β 間の類似度

メッセージ ξ と推定ビット σ の間のオーバーラップ

$\langle\langle Z^n \rangle\rangle \simeq \int \left[\prod_{\alpha<\beta} dq_{\alpha\beta} \frac{dN \hat{q}_{\alpha\beta}}{2\pi i} \right] \left[\prod_{\alpha} dm_{\alpha} \frac{dN \hat{m}_{\alpha}}{2\pi i} \right] \exp[N(G_1 + G_2 + G_3)]$

$G_1 = \frac{\beta^2 J^2}{2} \sum_{\alpha<\beta} q_{\alpha\beta}^2 + \beta J_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha}^2 + \frac{\beta^2 J^2 n}{4}$ $G_2 = -\sum_{\alpha<\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} - \sum_{\alpha} \hat{m}_{\alpha} m_{\alpha}$

$G_3 = \frac{1}{N} \ln \left\{ \text{Tr}_{\{\sigma^\alpha\}} \exp \left(-\sum_{\alpha<\beta} \hat{q}_{\alpha\beta} \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta - \sum_{\alpha} \hat{m}_{\alpha} \sum_i \xi_i \sigma_i^\alpha \right) \right\}$

4. レプリカ対称性, 鞍点法を用いて1ビット当たりの平均自由エネルギー f を導出

レプリカ対称性

$q_{\alpha\beta} = q, \hat{q}_{\alpha\beta} = \hat{q}, m_{\alpha} = m, \hat{m}_{\alpha} = \hat{m}$

$-\beta f = -\beta \frac{\langle\langle F \rangle\rangle}{N} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle\langle Z^n \rangle\rangle$
 $= -\frac{1}{4} \beta^2 J^2 q^2 + \frac{1}{2} \hat{q} q + \beta J_0 m^2 - \hat{m} m + \frac{1}{4} \beta^2 J^2$

$-\frac{1}{2} \hat{q} + \int Dx \ln [2 \cosh(\sqrt{\hat{q}} x + m)]$

$Dx \equiv \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

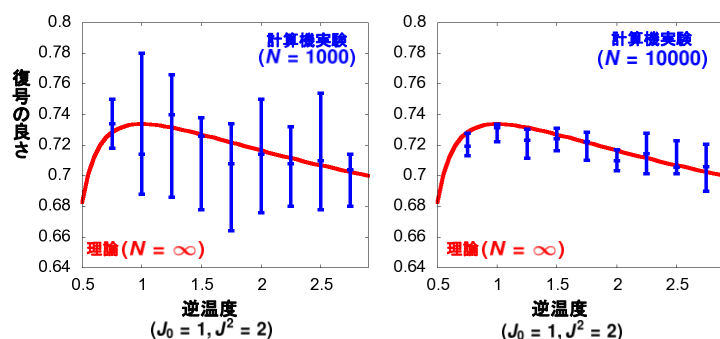
5. 鞍点条件から鞍点方程式を導出

$q = \int Dx \tanh^2 \beta G, m = \int Dx \tanh \beta G, G = J\sqrt{\hat{q}}x + 2J_0 m$

6. 鞍点方程式を解いて得た q, m から復号の良さ M を導出

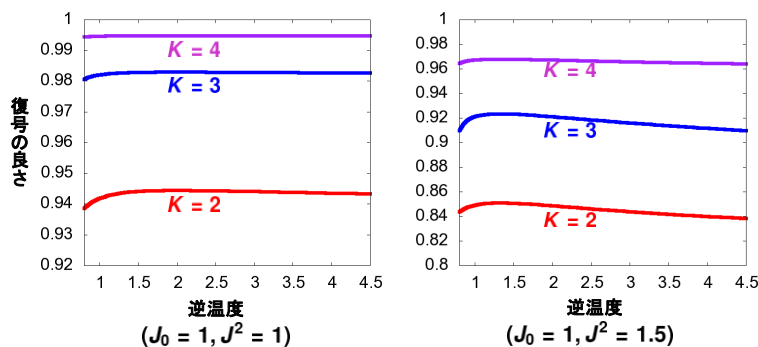
$M = \int Dx \text{sgn} G$

結果と考察



- 理論計算の結果と計算機実験の結果がよく一致している
- ビット数 N を大きくすると試行毎のばらつきが小さくなっている
- 西森温度で復号の良さ M が最大になっている

西森温度
 $\beta_N = \frac{2J_0}{J^2} = 1$



Kの値が大きくなると復号の良さが良くなる!

今後の予定

本研究は相互作用 J がクエンチ(凍結)されている状態を想定しているが、今後は相互作用 J がクエンチされおらずゆっくりと変化するような系におけるソーラス符号の誤り訂正能力について理論的解析を行う。