Polyaの定理とPattern Inventory

数 07-3　生田 雅範（代数学研究室）

1　序論

この論文では, 与えられた点の集合の各元に対して, 色の付け方を数える彩色の数え上げ問題について取り上げる.

群を平面図形, もっと一般に, 集合に作用させることを考える. 例えば, 正 n 角形の各頂点に, 与えられた m 色で色を付ける. このとき, 彩色の仕方として m^n 通りの方法が得られるが, 当然これらの中には本質的には“同じもの”が含まれている. ある彩色から回転や折り返しによって他の彩色が得られるとき, それらは“同じもの”—同じパターンを持つと言う—と見なされる. このことを考慮したときに得られる彩色の数を求めることが本論文の目的である. この種の数え上げの問題に対しては, 古くから Burnside の定理[1]が役に立つことが知られている.

集合 X と X 上の置換群 G とが与えられているとき, G によって引き起こされる X 上の同値関係による X の同値類の個数を求める問題を考える. この問題は, 同値類の個数を直接数えることによって解くこともできる. しかしながら, 集合 X が非常に多くの元を含んでいるとき, そのような数え上げは手がつけられないほど面倒なものとなる. Burnside の定理は, その群の置換の下で不変な X の元を数えることによって, 同値類の個数を求めることができるという定理である.

しかし一方で, 次のようなより一般的な問題に対しては, Burnside の定理が通用しない. m 色の各色に, この色は 1 回, この色は 3 回用いよといった具合に, 回数が付け加わった問題である. この種の数え上げ問題に対する有用な定理として, Polya[2]の定理がある. Polya の定理は Burnside の定理を改良することによって導かれる. 本論文では Polya の定理の証明方法とその使い方を紹介する.

この論文は次のように構成されている. 第 2 節では Polya の定理を証明するにあたり置換群の基本事項を述べる. 第 3 節では Polya の定理の紹介とその証明を行う. 第 4 節では Polya の定理を実際の問題に適用して答えを出すための道具として, Pattern Inventory の概念を紹介する. 第 5 節では正 6 角形の頂点を 3 種類の色を使って彩色するときの彩色の数え上げ問題を Polya の定理を用いて解く.

---

[1] この論文では, セミナーテキスト [1] に従い, Burnside の定理として引用するが, 歴史的経緯から, Cauchy-Frobenius の定理という呼び方がされることも多い.

[2] **George Pólya** 1887 年, ハンガリー, ブダペスト生まれ. ブダペスト大学, ウィーン大学などで数学, 物理学を学ぶ. 1912 年, エトヴェシュ・ロラーンド大学で, L. フェイェールの指導の下, 博士号を取得. アメリカ合衆国に亡命後, ブラウン大学を経て, スタンフォード大学教授 (1946 年-1953 年). 複素解析学, 級数論, 数論, 組合せ論など, 幅広い分野で業績を残す. また, *How to Solve It* (『いかにして問題をとくか』) を著すなど, 数学の普及にも力を注いだ. 1985 年, 米国パロ・アルトにて歿.

2　基本事項

Polya の定理を紹介する前に, この節では置換群の基本事項をまとめておく.

2.1　サイクル

空でない集合 X に対し, $\mathfrak{S}_X = \{\sigma \mid \sigma : X \longrightarrow X \text{ は全単射}\}$ を X 上の対称群とする.

定義 2.1.1

$\sigma \in \mathfrak{S}_X$ に対し, 次のような X の元 $a_1, \cdots, a_r$ が存在するとき, σ を**長さ r のサイクル** (*cycle of length r*) と呼び, $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_r)$ と書く:

$$\begin{aligned} &\sigma(a_i) = a_{i+1} && (i = 1, \cdots, r-1) \\ &\sigma(a_r) = a_1 \\ &\sigma(x) = x && (x \neq a_1, \cdots, a_r) \end{aligned}$$

また, 長さ 2 のサイクルを **互換** (*transposition*) と呼ぶ.

定理 2.1.2

X を有限集合とする. $\sigma \in \mathfrak{S}_X, \sigma \neq e$ に対し, σ は長さ 1 以上の互いに共通の文字を含まないサイクルの積として表すことができる. この分解はサイクルの積の順序を除いて一意的である.

この分解を σ の **サイクル分解** (*cycle decomposition*) と呼ぶ.

2.2　シンメトリー

平面における図形の対称性を調べる為に, 群論の応用を考える.
$d(x, y)$ を点 x と y のユークリッド距離とする.

定義 2.2.1

X を平面の中の点の集合とする. 全単射な写像 $\sigma : X \longrightarrow X$ が, 「任意の $x, y \in X$ に対し, $d(\sigma(x), \sigma(y)) = d(x, y)$」を満たすとき, σ を X の**シンメトリー** (*symmetry*) と呼ぶ.

X のシンメトリー全体の集合を $Sym(X)$ と書き, これを X の**シンメトリー群** (*symmetry group*) と呼ぶ.

2.3 作用

定義 2.3.1

G を群とし, X を空でない集合とする. 次の 2 条件件が成り立つとき,
写像 $*: G \times X \longrightarrow X$ を, X 上の G の**作用** ($action$) と呼び, $*(g, x)$ を $g * x$ と書く:
(a) 任意の $x \in X$, 単位元 $e \in G$ に対し, $e * x = x$.
(b) 任意の $x \in X,\ g, h \in G$ に対し, $(gh) * x = g * (h * x)$.
また, 集合 X 上の群 G の作用が存在するとき, G は X 上に**作用する** (act) と言う.

X を空でない集合とし, G を対称群 $\mathfrak{S}_X$ の部分群とする. 任意の $g \in G, x \in X$ に対し, $g*x = g(x)$ と定めると, $*$ は X 上の G の作用となる. このとき, G は X 上に**自然に** ($naturally$) 作用すると言う. 特に, G が平面における点の集合 X のシンメトリー群ならば, G は X 上に自然に作用する.

以後, かんたんの為に, $g * x$ を単に gx と書くことにする.

2.4 軌道

定義 2.4.1

G を集合 X 上に作用している群とする. 任意の $a \in X$ に対し, 集合 $Orb(a) = \{ga \in X \mid g \in G\}$ を, G の下での a の**軌道** ($orbit$) と呼ぶ.

定理 2.4.2

G を集合 X 上に作用している群とする. このとき, G の下での X における軌道は, X の分割を形成する.

Proof. 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \sim y$ を「ある $g \in G$ に対し, $x = gy$」により定めると, $\sim$ は X 上の同値関係になる. 任意の $a \in X$ に対して, $\sim$ の下での a の同値類 $Cl_\sim(a)$ は,

$$Cl_\sim(a) = \{x \in X \mid x \sim a\} = \{ga \in X \mid g \in G\} = Orb(a)$$

となる. 故に, G の下での X における軌道は $\sim$ の下での同値類であり, 従って, X の分割を形成する. □

G の下での軌道の集合によって形成される X の分割を X/G とおき, G の下での X の**軌道分解** ($orbit\ decomposition$) と呼ぶ.

2.5 安定化部分群と固定集合

$x \in X$ に対して, x を固定する G における元全体の集合を, x の**安定化部分群** ($stabilizer$) と呼び, $Stab(x)$ と書く; 即ち, $Stab(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ である.

定理 2.5.1

G を集合 X 上に作用している群とし, $x \in X$ とする. このとき次が成立する:
(a) $Stab(x)$ は G の部分群である.
(b) G における部分群 $Stab(x)$ の指数は $(G : Stab(x)) = |Orb(x)|$ である.

Proof. (a)$S := Stab(x)$ と書くことにする.
$ex = x$ であるから, $e \in S$ である. 任意の $g, h \in S$ に対して,
$(g^{-1}h)x = g^{-1}(hx) = g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$ となる.
故に, $g^{-1}h \in S$ となり, S は G の部分群であることが示された.
(b)G/S を G における S の左剰余類全体の集合とする.
写像 $\phi : G/S \longrightarrow Orb(x)$ を, $\phi(gS) = gx$ により定めると, ϕ は全単射な写像となる.
$\because$
・$gS = hS$ とすると, $g^{-1}h \in S$ より, $g^{-1}hx = x$ となる.
　故に, $gx = g(g^{-1}hx) = hx$ となり, ϕ は *well-defined* である.
・$\phi(gS) = \phi(hS)$ とすると, $gx = hx$ より, $g^{-1}hx = x$ となる.
　よって, $g^{-1}h \in S$ となり, 故に $gS = hS$ より, ϕ は単射である.
・任意の $y \in Orb(x)$ を取ると、ある $g \in G$ に対して, $y = gx = \phi(gS)$ より, ϕ は全射である.
故に, $(G : Stab(x)) = |G/S| = |Orb(x)|$ が成立する. □

$g \in G$ に対して, g によって固定される X における元全体の集合を, g の**固定集合** (*fixture*) と呼び, $Fix(g)$ と書く; 即ち, $Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$ である.

3　Polya の定理

ここでは, Polya の定理の紹介とその証明を行う.

3.1　作用の引き起こし

S を平面における点の集合とし, C を色の集合とする. 集合 C の元で, S の各元に色を付けることを, **色の割り当て** または, **カラーリング**と言う. 即ち, 集合 C の色を用いた, S の点へのカラーリングとは, S から C への写像のことである. つまり, 色の割り当て全体の集合 X は, S から C への写像全体の集合であり, これを $X = C^S$ と書くことにする.

G を集合 S のシンメトリー群とすると, G は集合 S に自然に作用する. 更にこのとき, S 上の G の作用は, 次のようにして X 上の G の作用を引き起こす:
任意の $g \in G, f \in X$ に対し, 写像 $g * f \in X$ を,

$$g * f : S \longrightarrow C,\ (g * f)(s) = f(g^{-1}s) \quad (s \in S)$$

として定める.
$\because$
任意の $g, h \in G, f \in X$ に対して,
・$(e * f)(s) = f(e^{-1}s) = f(s) \quad (s \in S)$
・$((gh) * f)(s) = f\left((gh)^{-1}s\right) = f(h^{-1}g^{-1}s) = (g * f)(g^{-1}s) = (g * (h * f))(s) \quad (s \in S)$
より, $e * f = f$ かつ, $(gh) * f = g * (h * f)$ を満たす.

3.2 重み関数

G を集合 X に作用している群とし, $R = \mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_q]$ を, 有理数係数のある与えられた不定元 $t_1, \cdots, t_q$ を持つ多項式全体から成る集合とする. 写像 $w : X \longrightarrow R$ が,「任意の $g \in G, x \in X$ に対し $w(gx) = w(x)$」を満たすとき, 写像 w を G の下での X 上の**重み関数** (*weight function*) と呼ぶ. この条件が成り立つとき, 軌道 $T = Orb(x)$ における任意の元は同じ重み $w(x)$ を持つ. 軌道 T における任意の元の共通の重みを T の**重み** (*weight*) と呼び, $w(T)$ と書く.

定理 3.2.1

G を有限集合 X に作用している有限群とし, $w : X \longrightarrow R$ を G の下での X 上の重み関数とする. このとき, G の下での X における軌道の重みの合計は, 次で与えられる:

$$\sum_{T \in X/G} w(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in Fix(g)} w(x)$$

Proof. $P = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$ とする.
このとき, $S = \displaystyle\sum_{(g,x) \in P} w(gx)$ を 2 通りの方法で計算する.
まず,

$$S = \sum_{g \in G} \sum_{x \in Fix(g)} w(gx) = \sum_{g \in G} \sum_{x \in Fix(g)} w(x) \tag{1}$$

である. 他方,

$$S = \sum_{x \in X} \sum_{g \in Stab(x)} w(gx) = \sum_{x \in X} \sum_{g \in Stab(x)} w(x) = \sum_{x \in X} |Stab(x)| w(x)$$

である. 定理 2.4.2 より, 軌道は X の分割を形成するから,

$$S = \sum_{T \in X/G} \sum_{x \in T} |Stab(x)| w(x) \tag{2}$$

となる. ここで, 定理 2.5.1 より,

$$|Stab(x)| = \frac{|G|}{|Orb(x)|}$$

であり, また, 任意の軌道 $T \in X/G$ に対して,

$$\sum_{x \in T} \frac{1}{|Orb(x)|} = \sum_{x \in T} \frac{1}{|T|} = |T| \frac{1}{|T|} = 1$$

となるから, 故に,

$$\sum_{x \in T} |Stab(x)| w(x) = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Orb(x)|} w(x) = |G| w(T) \sum_{x \in T} \frac{1}{|Orb(x)|} = |G| w(T)$$

である. よって, (2) より,

$$S = \sum_{T \in X/G} |G| w(T) = |G| \sum_{T \in X/G} w(T) \tag{2'}$$

以上, (1), (2′) より, $\displaystyle\sum_{T \in X/G} w(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in Fix(g)} w(x)$ を得る. □

3.3 重み関数の引き起こし

G を有限集合 S に作用している有限群とし, $X = C^S$ を S から C への写像全体の集合とする. このとき, 3.1 節において G は, 任意の $g \in G, f \in X, s \in S$ に対し, $(g * f)(s) = f(g^{-1}s)$ により与えられる X 上の引き起こされる作用 $*$ を持つことを見た.

任意の写像 $u : C \longrightarrow R$ は, 次のようにして G の下での X 上の重み関数 w を引き起こす:

$$w : X \longrightarrow R \text{ を } w(f) = \prod_{s \in S} u(f(s)) \text{ により定める.}$$

$\because$

$g \in G$ に対し, $w(g * f) = \prod_{s \in S} u((g * f)(s)) = \prod_{s \in S} u(f(g^{-1}s))$ である. 今, $s \longmapsto g^{-1}s$ は S の置換を表すので,s が S 内をくまなく重複なく動くとき, $g^{-1}s$ も S 内をくまなく重複なく動く. よって, R における多項式の積は可換であるから, $\prod_{s \in S} u(f(g^{-1}s)) = \prod_{s \in S} u(f(s))$ となり, $w(g * f) = w(f)$ となる. これは, w が G の下での X 上の重み関数であることを示している.

3.4 Polya の定理

以上で準備が整ったので, いよいよ Polya の定理を述べる.

定理 3.4.1 (Polya の定理)

G を n 個の元から成る有限集合 S に作用している有限群とし, C を空でない有限集合とし, 更に, $X = C^S$ を S から C への写像全体の集合とする. $u : C \longrightarrow R$ とし, $w : X \longrightarrow R$ を u によって引き起こされる G の下での X 上の重み関数とする.
このとき, G の下での X における軌道の重みの合計は次で与えられる:

$$\sum_{T \in X/G} w(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{c \in C} (u(c))^i \right)^{\lambda_i(g)}$$

但し, $\lambda_i(g)$ $(i = 1, \cdots, n)$ は g によって引き起こされる S の置換 σ_g のサイクル分解における長さ i のサイクルの数である.

Proof.

$f \in Fix(g)$ である為の必要十分条件は,任意の $s \in S$ に対し,$f(gs) = f(s)$ となることである. (*)

$\because$

$g \in G, f \in X$ に対し, $g * f = f$ とすると,
$f(s) = (g * f)(s) = f(g^{-1}s)$ $(s \in S)$ となる. よって, $f(gs) = f(g^{-1}gs) = f(s)$.
逆に, 任意の $s \in S$ に対し, $f(gs) = f(s)$ とすると,
$(g * f)(s) = f(g^{-1}s) = f(gg^{-1}s) = f(s)$ となる. よって, $g * f = f$.

$g \in G$ とし, σ_g を g により引き起こされる S 上の置換, 即ち, 任意の $s \in S$ に対し, $\sigma_g(s) = gs$ とする. $\sigma_g = \gamma_1 \cdots \gamma_\lambda$ を (長さ 1 のサイクルも含む) σ_g のサイクル分解とする. この分解における任意のサイクルは $\gamma = (a\ ga\ \cdots\ g^{r-1}a)$ の形をしている.

このとき, $f \in Fix(g)$ である為の必要十分条件は, 各サイクル γ_j 上, f が定値写像となることである.

$\because$

$f \in Fix(g)$ とすると, (*) より, $f(a) = f(ga) = \cdots = f(g^{r-1}a)$ となる.
よって, サイクル γ における元に対して, f は定値写像である.
これは, σ_g のサイクル分解における任意のサイクル γ_j に対して成り立つ.
逆に, f を任意のサイクル γ_j 上の定値写像とすると, このとき, 任意の $s \in S$ に対し,
$r \geq 2$ のとき, $\gamma_j = (s\ gs\ \cdots\ g^{r-1}s)$ を考えると, $f(s) = f(gs)$ となり,
$r = 1$ のとき, $\gamma_j = (s)$ より, $s = gs$ となり, $f(s) = f(gs)$ となる.
よって, (*) より, $f \in Fix(g)$ である.

$f \in X$ とし, $f_j (j = 1, \cdots, \lambda)$ をサイクル γ_j 上の f の値とする.
このとき, $w(f) = \displaystyle\prod_{s \in S} u(f(s)) = \prod_{j=1}^{\lambda} (u(f_j))^{|\gamma_j|}$ となる.
但し, $|\gamma_j|$ は, サイクル γ_j の長さである. 故に,

$$
\begin{aligned}
\sum_{f \in Fix(g)} w(f) &= \sum_{f_1 \in C} \cdots \sum_{f_\lambda \in C} \prod_{j=1}^{\lambda} (u(f_j))^{|\gamma_j|} \\
&= \sum_{f_1 \in C} \cdots \sum_{f_\lambda \in C} (u(f_1))^{|\gamma_1|} \cdots (u(f_\lambda))^{|\gamma_\lambda|} \\
&= \Big((u(c_1))^{|\gamma_1|} + \cdots + (u(c_m))^{|\gamma_1|} \Big) \cdots \Big((u(c_1))^{|\gamma_\lambda|} + \cdots + (u(c_m))^{|\gamma_\lambda|} \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} \Big((u(c_1))^{|\gamma_j|} + \cdots + (u(c_m))^{|\gamma_j|} \Big) \\
&= \prod_{j=1}^{\lambda} \sum_{c \in C} (u(c))^{|\gamma_j|}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\Gamma = \{ \gamma \mid \gamma$ は σ_g のサイクル分解に現れるサイクル $\}$,
$\Gamma_i = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma$ の長さは $i \}$
とおくと, $\Gamma = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ となるから,

$$
\begin{aligned}
\sum_{f \in Fix(g)} w(f) &= \prod_{\gamma \in \Gamma} \sum_{c \in C} (u(c))^{|\gamma|} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{\gamma \in \Gamma_i} \sum_{c \in C} (u(c))^{|\gamma|} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \prod_{\gamma \in \Gamma_i} \sum_{c \in C} (u(c))^i = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{c \in C} (u(c))^i \right)^{|\Gamma_i|} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{c \in C} (u(c))^i \right)^{\lambda_i(g)}
\end{aligned}
$$

となる. 故に, 定理 3.2.1 より, X における軌道の重みの合計は,

$$\sum_{T \in X/G} w(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in Fix(g)} w(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{c \in C} (u(c))^i \right)^{\lambda_i(g)}$$

となる. $\square$

4 Pattern Inventory

ここでは, Polya の定理を実際の問題に適用して答えを出すための道具として, Pattern Inventory の概念を紹介する.

$C = \{c_1, \cdots, c_m\}$ を色の集合とし, $R = \mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_m]$ とし, 更に, w を写像 $u : C \longrightarrow R,\ u(c_i) = t_i\ (i = 1, \cdots, m)$ によって引き起こされる X 上の重み関数とする.
このとき, Polya の定理は次を与える:

$$\sum_{T \in X/G} w(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(t_1^i + \cdots + t_m^i \right)^{\lambda_i(g)} \tag{3}$$

ここからは, 色 $c_1, \cdots, c_m$ がそれぞれ $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 回起こるような色の割り当て $f : S \longrightarrow C$ を考える. 但し, $\beta_1, \cdots, \beta_m$ は, $\beta_1 + \cdots + \beta_m = n$ となる非負整数である. このとき, $\beta_i\ (i = 1, \cdots, m)$ は, $f(s) = c_i$ となる元 $s \in S$ の数, 即ち, $\beta_i = \#\{s \in S \mid f(s) = c_i\} = \#f^{-1}(c_i)$ である. 従って, f の重みと, f を含む軌道 T の重みは,

$$w(T) = w(f) = \prod_{s \in S} u(f(s)) = t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m}$$

となり, 故に, X における軌道の重みの合計は,
$B := \{(\beta_1, \cdots, \beta_m) \mid \beta_1 + \cdots + \beta_m = n,\ \beta_1, \cdots, \beta_m \text{は非負整数}\}$ とおき, 写像 $\varphi : X/G \longrightarrow B$ を $T \longmapsto \left(\#f^{-1}(c_1), \cdots, \#f^{-1}(c_m)\right)$ (但し, $f \in T$ である) とすると,

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in X/G} w(T) &= \sum_{(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in B} \sum_{T \in \varphi^{-1}((\beta_1, \cdots, \beta_m))} w(T) \\
&= \sum_{(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in B} \sum_{T \in \varphi^{-1}((\beta_1, \cdots, \beta_m))} t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m} \\
&= \sum_{(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in B} \left(\#\varphi^{-1}((\beta_1, \cdots, \beta_m))\right) t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m} \\
&= \sum_{(\beta_1, \cdots, \beta_m) \in B} p(\beta_1, \cdots, \beta_m) t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m} \qquad (4)
\end{aligned}$$

となる. 但し, $p(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ は, 同じ重み $t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m}$ を持つ軌道の数である. 言い換えると, $p(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ は色 $c_1, \cdots, c_m$ がそれぞれ $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 回起こるときの色の割り当ての数である. (4) の右辺の多項式は, m 個の不定元を持つ, 次数 n の同次多項式である. これを $P_{X/G}(t_1, \cdots, t_m)$ で定め, G の下での X における軌道の **Pattern Inventory** と呼ぶ. 従って, 与えられた回数

$\beta_1, \cdots, \beta_m$ を持つ異なった色の割り当ての数は, Pattern Inventory 多項式 $P_{X/G}(t_1, \cdots, t_m)$ における項 $t_1^{\beta_1} \cdots t_m^{\beta_m}$ の係数である. (3), (4) より, 次を得る:

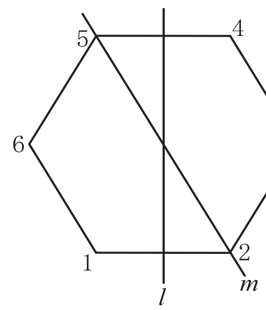
$$P_{X/G}(t_1, \cdots, t_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} \left(t_1^i + \cdots + t_m^i\right)^{\lambda_i(g)}$$

5 Example

Polya の定理を用いて, 次の具体的な問題を考え, 本論文を終えることとする.

【問題】 正 6 角形の各頂点に, 赤色 (R), 黄色 (Y), 青色 (B) の 3 色を用いて色を付ける. 各々の色に適当な回数制限をつけたときにできる異なった色の割り当ての数を数え上げよ.

まず, 正 6 角形のシンメトリー群 G は, 二面体群 $D_6 = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta, \alpha^5\beta\}$ (但し, α は正 6 角形の重心を中心とする角度 $\dfrac{\pi}{3}$ 回転, β は直線 l に関する折り返しを表す) である. 例えば, α^2 は正 6 角形の重心を中心とする角度 $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転, $\alpha\beta$ は直線 m に関する折り返しを表す.



G の各元 g によって引き起こされる置換 σ_g は次のようになる:

g	σ_g	g	σ_g
e	(1)	β	(12)(36)(45)
α	(123456)	$\alpha\beta$	(2)(5)(13)(46)
α^2	(135)(246)	$\alpha^2\beta$	(14)(23)(56)
α^3	(14)(25)(36)	$\alpha^3\beta$	(3)(6)(15)(24)
α^4	(153)(264)	$\alpha^4\beta$	(16)(25)(34)
α^5	(165432)	$\alpha^5\beta$	(1)(4)(26)(35)

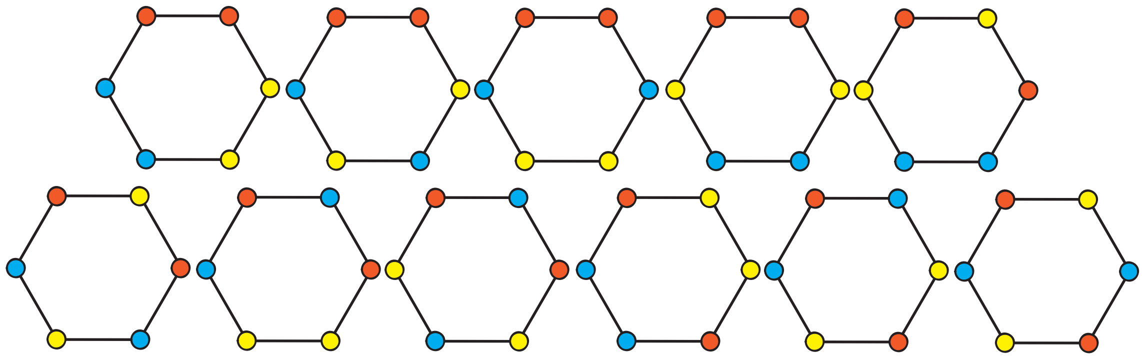
よって, 3 色を持つ Pattern Inventory 多項式は,

$$\begin{aligned}
P_{X/G}(t_1, t_2, t_3) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{6} \left(t_1^i + t_2^i + t_3^i\right)^{\lambda_i(g)} \\
&= \frac{1}{12}\{(t_1 + t_2 + t_3)^6 + 4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^3 + 3(t_1 + t_2 + t_3)^2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)^2 \\
&\qquad + 2(t_1^3 + t_2^3 + t_3^3)^2 + 2(t_1^6 + t_2^6 + t_3^6)\}
\end{aligned}$$

となる．後は, Pattern Inventory 多項式から欲しい係数を求めればよい．色の対称性を無視して, 全ての色の割り当ての数を数え上げると次のようになる:

R	Y	B	色の割り当て
6	0	0	1
5	1	0	1
4	2	0	3
3	3	0	3
4	1	1	3
3	2	1	6
2	2	2	11

この結果から, 3 色を均等に使うときに一番多くの彩色ができることが分かる．このときの 11 パターンを列挙すると次のようになる:



6　結論

Polya の定理を使うと, 実際に紙と鉛筆だけで全てのパターンを書き出すことに比べ, 数えこぼしが少ないので非常に有用である．この定理を用いることで大学入試等の難関レベルの問題が簡単に解けてしまうこともある．図形のシンメトリー群を決定することは一般に難しいが, シンメトリー群さえ見つけてしまえば, Polya の定理を用いて, あとは手計算なり計算機なりで欲しい項の係数を求めればよい．今後は, シンメトリー群の発見が難しそうな図形に関する彩色の数え上げ問題にも取り組んでいきたい．

謝辞

毎週のセミナーにおいて親身にご指導, 助言を頂きました和久井道久先生に深く感謝致します．

参考文献

[1] S.R.Nagpaul and S.K.Jain『Topics in Applied Abstract Algebra』(The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics), Brooks/Cole 2004.