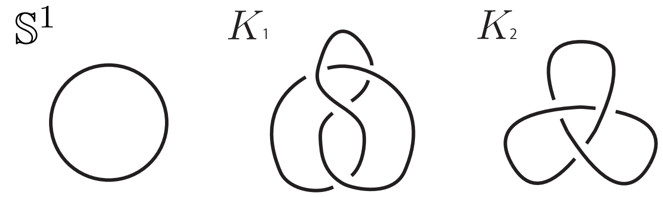
TWO-TYPE TANGLES からなる PRETZEL LINKS に対する GOERITZ INVARIANTS について

表現論研究室　　押田 郷平

1. はじめに

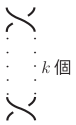
この論文では Pretzel links と呼ばれる特別な絡み目について考察する。絡み目 (link) とは、3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内で互いに交わらない有限個の単純閉曲線、つまり自己交差する点のない閉曲線のことをいう。特に、1 つの単純閉曲線からなる絡み目を結び目 (knot) というが、この論文では絡み目も結び目と呼ぶことにする。

下の図の結び目 K_1, K_2 を考える。

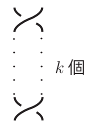


K_1 を空間内で連続的に変形することによって K_2 が得られる。このような 2 つの結び目は同じと考える。一般に、2 つの結び目 K_1 と K_2 の間に $h(K_1) = K_2$ となる同相写像 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が存在するとき、K_1, K_2 は**同値**であるという。一方、単位円周 $\mathbb{S}^1$ と K_1 は同値ではない異なる結び目であることが知られている。では、一般に 2 つの結び目が異なるということはどのように示されるのだろうか。そのことを調べるための道具として位相不変量というものがある。この論文では、結び目の同値に関する位相不変量として、Goeritz 不変量を扱う。Goeritz 不変量は、結び目の射影図から作られる行列の基本変形によって得られる比較的に計算の簡単な位相不変量である [1, 第 5 講]。つまり、2 つの結び目の Goeritz 不変量が異なるときに、それらは同値でないといえる。

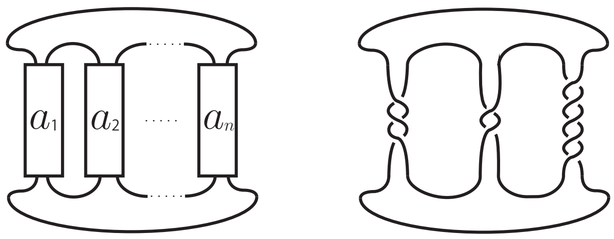
表題の Pretzel links は $\sum_{i=1}^{n} |a_i| \neq n$ を満たす 0 でない整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の組により与えられる次の図左の形をした絡み目で、これを $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と書く。図において、整数 $k \geq 0$ に対して $\boxed{k}$ はタングル



を意味する。$k < 0$ のときは



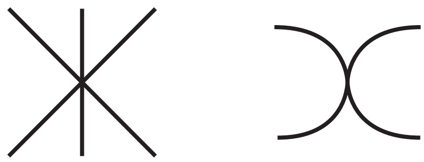
である。例えば、$P(3, -2, -5)$ は次の図右の結び目を表す。



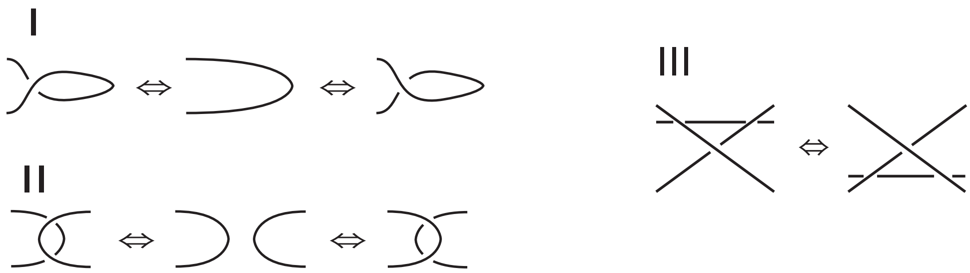
このPretzel linksについては既に分類定理が知られている[1, 補題4.3.1]。IkedaとSugimoto[2]はタングルが4本以下のいくつかのPretzel linksについて、そのGoeritz不変量を計算している。この論文では、彼らの方法[1, 定理4.1]を参考にしながら、特に$a_1 = \cdots = a_k = a, a_{k+1} = \cdots = a_n = b$という型の2種類のタングルからなるPretzel linksに対してGoeriz不変量を計算し、その結果を定理4.4や定理4.5で与える。

2. REIDEMEISTER 移動と結び目の不変量

ここでは結び目の不変量を構成するための鍵となるReidemeister移動について説明する。そもそも結び目Kは$\mathbb{R}^3$内の対象である。これを$\mathbb{R}^2$へ射影することで、平面上の図形として扱うことができる。ただし、そのまま射影すると線の交差する点において上下の情報が失われるので、結び目の交差点では上下の情報を付けておく。これを結び目の射影図と呼ぶ。結び目の射影図は空間内で結び目の一部をわずかに動かすことで、下の図のように3重点以上の交差や、線が接しているような状態を避けることができる。このような図を結び目の正則射影図と呼ぶ。



結び目KからK'へ空間内で連続的に変形するとき、それらの正則射影図上では次の局所的な3つの操作の繰り返しによって互いに移り合うことが知られている。これらの操作をReidemeister移動と呼ぶ。



このことから、結び目の位相不変量を見つけるには、結び目の正則射影図全体上の関数であって、Reidemeister移動I,II,IIIで不変なものを見つければ良い。

3. GOERITZ 不変量

ここでは河内明夫先生の著書[1]に基づいて、Goeritz不変量の定義と計算方法を説明する。

3-1 Goeritz 不変量の定義と求め方

Kを結び目とする。結び目KのGoeritz不変量はKの連結図を用いて定義される。ここで連結図とは正則射影図であって、$\mathbb{R}^2$上のグラフとして連結なものをいう。全ての結び目は連結な正則射影図を持つ。よって、ここでは結び目の図式として連結図のみを扱う。

UをKの連結図とし、下図左のように隣同士の領域が同じ色にならないように白と黒で塗り分ける。

このような彩色の仕方を U の **checkerboard 彩色**という。黒領域全体を X_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$ とし、X_i と X_j が交差する点全体を $P_{i,j}$ とする。各交差点 $p \in P_{i,j}$ に対して $\eta(p)$ を上図右に基づいて ± 1 と定める。このとき、行列 $\overline{G}$ を

$$\overline{G} := (g_{i,j})_{i,j=0}^{n},\ g_{i,j} := \begin{cases} \sum\limits_{p \in P_{i,j}} \eta(p) & (i \neq j) \\ -\sum\limits_{k=0,\cdots,n,\ k \neq i} g_{i,k} & (i = j) \end{cases}$$

と定める。この $\overline{G}$ から任意の 1 行,1 列を取り除いた行列を G で表し、K の **Goeritz 行列**と呼ぶ。さらに $\det K := |\det G|$ と定める。この Goeritz 行列自体は U の取り方と彩色の仕方、$\overline{G}$ から取り除く行と列の選び方に依るが、そこから次のようにして結び目不変量を取り出すことができる。

整数行列 A に対して以下の**基本変形**を導入する。

1. A を A のある縦または横ベクトルを -1 倍して得られる行列で置き換える。

2. A を A の 2 つの縦または横ベクトルを交換して得られる行列で置き換える。

3. A を A のある縦または横ベクトルの整数倍を他の縦または横ベクトルに加えて得られる行列で置き換える。

4. A を $A \oplus (1)$ に置き換える。

整数行列 A に基本変形を繰り返して整数行列 B が得られるとき、それらは**同値**であるといい、$A \sim B$ と表す。単因子論により、任意の整数行列 A は次の条件 1 または 2 を満たす一意的な対角整数行列 $g(A) := (g_1) \oplus (g_2) \oplus \cdots \oplus (g_d)$ に同値である。$g(A)$ を A の**ねじれ不変量**と呼ぶ。

条件 1. $d = 1,\ g_1 \geq 0.$

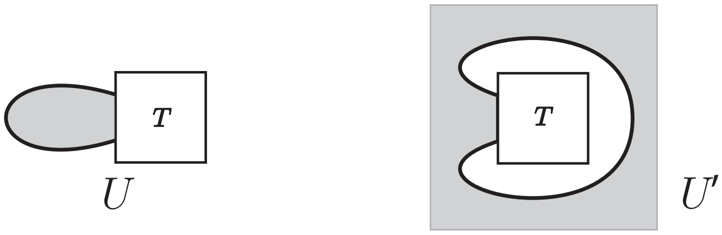
条件 2. $d \geq 2$ で、$1 \leq i \leq d$ のとき $g_i \neq 1$ であり、かつ $1 \leq i \leq d-1$ のとき g_{i+1} は g_i の整数倍である。

定理 3.1. 結び目 K の連結図 U の任意の checkerboard 彩色による Goeritz 行列 G のねじれ不変量 $g(G)$ は K の位相不変量である。$g(K) := g(G)$ を K の **Goeritz 不変量**と呼ぶ。

3-2 Goeritz 不変量の位相不変性の証明

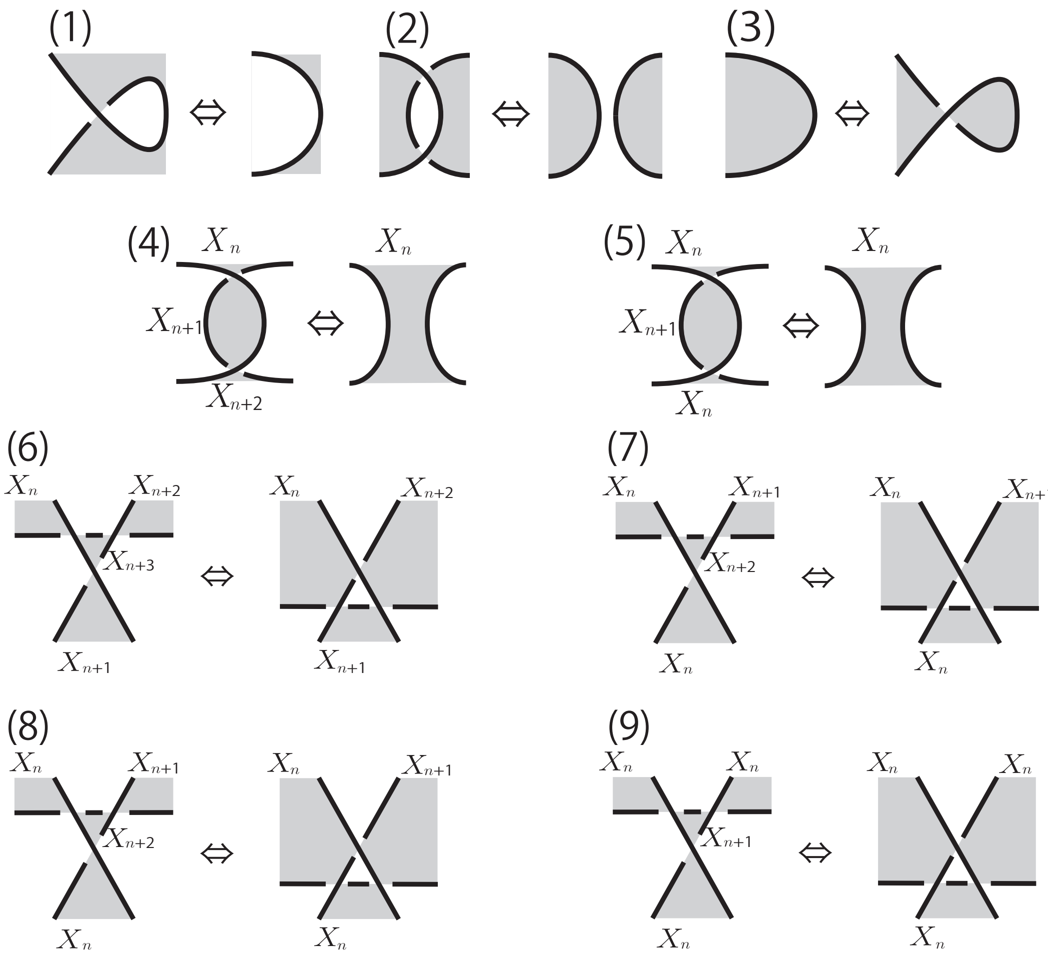
この節では [1] に倣って定理.3.1 の証明の概略を述べる。次の補題を用いる。

補題 3.2. 連結図 U のコンパクトでない領域を白とする checkerboard 彩色と次の図右のように U を変形した連結図 U' のコンパクトでない領域を黒とする彩色を考える。ただし、図において、四角形 T の中は同じ色が塗られているものとする。このとき、これらの Goeritz 行列は一致する。



この補題は、四角形 T の周りの色が U, U' 共に変わらないことと、また、曲線の部分が同じ T との交わりの部分以外での他との交わりが無いことから証明される。

上の補題の U' は、Reidemeister 移動 I,II,III の有限回操作で、U から変形できることがわかる。したがって、定理 3.1 を証明するにはコンパクトでない領域を白とする彩色を施した連結図 U に対して、Reidemeister 移動 I,II または III を 1 回施して U' を作ったとき、U, U' の Goeritz 行列 G, G' が、基本変形で移り合うことを示せばよい。Reidemeister 移動 III について、鏡像をとることを認めると、証明は次の 9 つの場合に分けられる。



ただし、(4),(5) において右側の図の黒領域は $n+1$ 個あるとする。(6), $\cdots$,(9) についても同様である。ここでは (4) の下での不変性を示す。

(4) の左側の図から定まる行列 $\overline{G}$ は、A をある n 次正方行列、$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ をある n 次縦ベクトル、u,v,w をある整数とすると、

$$\overline{\boldsymbol{G}}=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{a} & u & 1 & v \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 & 0 & -1 \\ {}^t\boldsymbol{b} & v & -1 & w \end{pmatrix}$$

とおくことができる。$\overline{G}$ に対して、次の基本変形を施す。

$$\overline{\boldsymbol{G}} \overset{①}{\to} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{a} & u & 1 \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{②}{\to} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 0 & 1 \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{③}{\to} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 & 0 \\ {}^t\boldsymbol{0} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim A$$

ここで ①,③,③ は以下の操作を表す。

① 一番下の 1 行と一番右の 1 列をそれぞれ取り除く。

② 一番下の行に適当な整数をかけて他の行に加えて 0 にしていく。一番右の列にも同様の操作を施す。

③ 右から 1,2 列目を入れ替える。

次に右側の図から定まる Goeritz 行列 G' について、次の操作を行う。

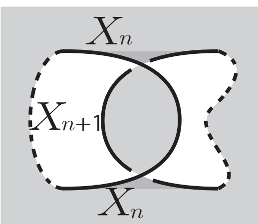
$$\overline{\boldsymbol{G}'}=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b} & u+2v+w \end{pmatrix} \overset{④}{\to} A$$

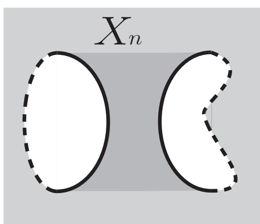
ここで ④ は以下の操作を表す。

④ 一番下の 1 行と一番右の 1 列をそれぞれ取り除く。

よって、$\overline{G}$ と $\overline{G'}$ は基本変形で移り合う。ここで、$\overline{G}$ と $\overline{G'}$ の各の行または列の和は 0 であることから、$\overline{G}\sim G\oplus(0)$, $\overline{G'}\sim G'\oplus(0)$ である。ねじれ不変量の表示の一意性から $G\sim G'$ すなわち、G と G' は基本変形で移り合う。

他の場合についても、(4) と同様の方法で基本変形によって G と G' が移り合うことを示すことができる。ただし、(5) は下の図のように連結図とならないので実際には生じない。 □





4. PRETZEL LINKS の GOERITZ 不変量

ここではいくつかの Pretzel links に対する Goeritz 不変量を計算する。以下では、整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ の最大公約数を $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ と書くことにする。Pretzel links の Goeritz 不変量については Ikeda と Sugimoto[2] により、次の定理が知られている。

定理 4.1. (Ikeda-Sugimoto)

(1)$L=P(a_1,a_2,a_3)$ の Goeritz 不変量は

$$g(L)=\left((a_1,a_2,a_3),\tfrac{\det L}{(a_1,a_2,a_3)}\right),\left(\tfrac{\det L}{(a_1,a_2,a_3)},(a_1,a_2,a_3)\right), or\ \left(\det L\right)$$

$$(\text{ただし、}\det L=|a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1|)$$

(2)$L=P(a_1,a_2,a_3,a_4)$ のとき、

(i) $i=2$ または 3 に対して $a_1=\pm a_i$ のとき、$g(L)=\left((a_1,a_{5-i},a_4),\frac{(a_1,a_{5-i})(a_1,a_4)}{(a_1,a_{5-i},a_4)},\frac{\det L}{(a_1,a_{5-i})(a_1,a_4)}\right)$ ただし $\det L=|a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_1+a_4a_1a_2|$ である[1]。

(ii) $a_1=a_2=a_3=a_4$ のとき、$g(L)=(|a_1|,|a_1|,4|a_1|)$.

定理4.1においてPretzel linksの行列式が現れている。一般にn個のタングルからなるPretzel linksの行列式は次の補題4.2のように求められる。

補題 4.2. n を 2 以上の自然数とする。$L_n=P(a_1,\cdots,a_n)$ に対して、L_n の Goeritz 行列を G_n とおくと、

$$\det G_n=(a_1\cdots a_{n-1}+a_2\cdots a_n+\cdots+a_n\cdots a_{n-2})(-1)^{n+1}$$

である。よって、

$$\det L_n=|a_1\cdots a_{n-1}+a_2\cdots a_n+\cdots+a_n\cdots a_{n-2}|$$

である。

証明　$L_i=P(a_1,\cdots,a_i)$ とし、その Goeritz 行列を G_i とする。

$n=2$ のときは $\overline{G_2}=\begin{pmatrix}-a_1-a_2 & a_1+a_2\\ a_1+a_2 & -a_1-a_2\end{pmatrix}$ なので、$G_2=(-a_1-a_2)$ となり補題の等式は成り立つ。$n=3$ のときも同様に成り立つ。

$n=k-1,k$ で成り立っているとする。

$$\overline{\boldsymbol{G_{k+1}}}=\begin{pmatrix}-a_1-a_{k+1} & a_1 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1}\\ a_1 & -a_1-a_2 & a_2 & \ddots & & 0\\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & a_k\\ a_{k+1} & 0 & \dots & 0 & a_k & -a_k-a_{k+1}\end{pmatrix}$$

から第1行, 第1列を取り除いて、$\boldsymbol{G_{k+1}}=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & \boldsymbol{G_k} & & \vdots\\ & & & 0\\ & & & a_k\\ 0 & \dots & 0 \quad a_k & -a_k-a_{k+1}\end{pmatrix}$ となる。

よってその行列式は、

$$\begin{aligned}\det G_{k+1}&=(-a_k-a_{k+1})\det G_k-a_k(a_k\det G_{k-1})\\&=(a_1a_2\cdots a_k+a_2a_3\cdots a_{k+1}+\cdots+a_{k+1}a_1\cdots a_{k-1})(-1)^{k+2}.\end{aligned}$$

□

[1] [2] の著者の一人の池田先生に確認と了承を得た上で、定理 4.1(2)(i) に関して原著の記述を変更させて頂きました。

上の補題より $\det G_3 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$, $\det G_4 = -a_1a_2a_3 - a_2a_3a_4 - a_3a_4a_1 - a_4a_1a_2$.

主結果を示すために、[2] において使われた Euclid の互除法についての次の補題を用いる。

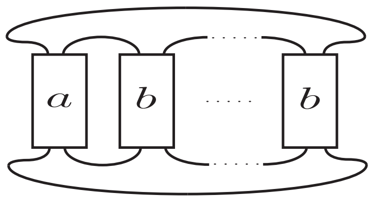
補題 4.3. a, b, p_i, q_i $(i = 1, 2)$ をある整数とし、$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ p_1a + q_1b & p_2a + q_2b \end{pmatrix}$ とおく。

このとき、$\boldsymbol{G} \sim \begin{pmatrix} (a, b) & 0 \\ 0 & p_3a + q_3b \end{pmatrix}$ を満たす p_3, q_3 が存在する。

証明 $a = b$ のとき、$(a, b) = |a|$ であるので、第 1 列の (-1) 倍を第 2 列に加えると補題の結果が得られる。いま、$a > b$ とすると、ある整数 s と $0 \leq r < b$ を満たすある整数 r が存在して、$a = sb + r$ と表される。次に b, r に対しても、ある整数 s_1 と $0 \leq r_1 < r$ を満たすある整数 r_1 が存在して $b = s_1r + r_1$ と表せる。これを続けていくと、ある自然数 n が存在して、$r_{n-2} = s_nr_{n-1} + 0$ が得られる。このとき、Euclid の互除法より、$(a, b) = r_{n-1}$ である。よって、G の第 2 列の $-s$ 倍を第 1 列に加えて、そこから第 1 列の $-s_1$ 倍を第 2 列に加えて、というように繰り返すと、$(1, 2)$ 成分を 0 に、$(2, 1)$ 成分を (a, b) の整数倍にできる。よって、補題の結果が従う。 □

定理 4.4. $n + 1$ 個のタングルからなる Pretzel links $L = P(a, b, \cdots, b)$ に対して

$g(L) = \left((a, b), \overbrace{|b|, \cdots, |b|}^{n-2}, \left|\frac{na+b}{(a,b)}b\right|\right)$ である。



証明 G を L の Goeritz 行列とすると、

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \begin{pmatrix} -a-b & a & 0 & \dots & 0 & b \\ a & -a-b & b & \ddots & & 0 \\ 0 & b & -2b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & b & -2b \end{pmatrix}$$

より、ここから第 1 行,1 列を取り除いて、

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} -a-b & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & -2b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & -2b \end{pmatrix}$$

が得られる。

ここで $k \geq 0$ として G に次の基本変形を施す。

$$\begin{pmatrix} -(k+1)a-b & b & 0 & 0 \\ ka+b & -2b & b & 0 \\ 0 & b & -2b & b \\ 0 & 0 & b & -2b \end{pmatrix} \overset{①}{\to} \begin{pmatrix} -(k+1)a-b & b & 0 & 0 \\ -(k+2)a-b & 0 & b & 0 \\ (k+1)a+b & 0 & -2b & b \\ 0 & 0 & b & -2b \end{pmatrix}$$

$$\overset{②}{\to} \begin{pmatrix} b & -(k+1)a & 0 & 0 \\ 0 & -(k+2)a-b & b & 0 \\ 0 & (k+1)a+b & -2b & b \\ 0 & 0 & b & -2b \end{pmatrix} \overset{③}{\to} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(k+2)a-b & b & 0 \\ 0 & (k+1)a+b & -2b & b \\ 0 & 0 & b & -2b \end{pmatrix}$$

となる。ここで ①, ②, ③ は以下の操作を表す。
① 第 1 行の $2, (-1)$ 倍をそれぞれ第 2,3 行に加える、
② 第 2 列を第 1 列に加えて、第 $1, 2$ 列を入れ替える、
③ 第 3 行の 1 倍を第 1 行に、第 1 列の $(-1), 2, (-1)$ 倍をそれぞれ第 2,3,4 列に加える。

この操作を $k = 0, \cdots, n-3$ と順に代入して行うと、

$$\boldsymbol{G} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} b & & \mathbf{0} & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & b & & \\ \hline & & & -(n-1)a-b & b \\ & \mathbf{0} & & (n-2)a+b & -2b \end{array}\right)$$

が得られる。これに次の操作 ④, ⑤, ⑥ を施す。

④ 下から 1 行目の 1 倍を下から 2 行目に加える。
⑤ 補題 4.3 より $(1, 1)$ 成分と $(1, 2)$ 成分に Euclid の互除法を用いる。ただし、$p_i, q_i (i = 1, 2)$ はある整数である。
⑥$p_1 a + q_1 b$ は (a, b) の倍数なので、第 1 行に適当な整数をかけて第 2 行に加える。

$$\begin{pmatrix} -(n-1)a-b & b \\ (n-2)a+b & -2b \end{pmatrix} \overset{④}{\to} \begin{pmatrix} -a & -b \\ (n-2)a+b & -2b \end{pmatrix}$$

$$\overset{⑤}{\to} \begin{pmatrix} (a,b) & 0 \\ p_1 a + q_1 b & p_2 a + q_2 b \end{pmatrix} \overset{⑥}{\to} \begin{pmatrix} (a,b) & 0 \\ 0 & p_2 a + q_2 b \end{pmatrix}$$

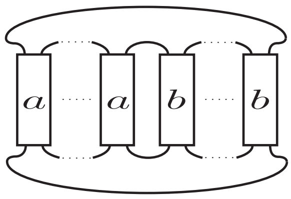
ここで、$p_2 a + q_2 b$ が負であれば、第 2 列に -1 をかける。以上より、整数行列の基本変形の下では行列式は符号を除いて変わらないから、$p_2 a + q_2 b = \dfrac{|\det G|}{|b|^{n-2}(a,b)}$ がわかる。

一方、補題 4.2 において、$a_1 = a,\ a_2 = \cdots = a_{n+1} = b$ とすると、
$\det G = \bigl(nab^{n-1} + b^n\bigr)(-1)^{n+2}$ が得られる。したがって、

$$G \sim \bigl((a,b)\bigr) \oplus (b) \oplus \cdots \oplus (b) \oplus \bigl(\bigl|\tfrac{na+b}{(a,b)} b\bigr|\bigr)$$

となる。したがって、定理の結果が従う。 □

定理 4.5. m と n を 2 以上の自然数とする。Pretzel link
$L = P(\overbrace{a, \cdots, a}^{m}, \overbrace{b, \cdots, b}^{n})$ に対して、



$n \leq m$ のとき、

$$g(L) = \Bigl(\overbrace{(a,b), \cdots, (a,b)}^{n}, \overbrace{|a|, \cdots, |a|}^{m-n}, \overbrace{\tfrac{|ab|}{(a,b)}, \cdots, \tfrac{|ab|}{(a,b)}}^{n-2}, \bigl|\tfrac{na+mb}{(a,b)^2} ab\bigr|\Bigr)$$

$m < n$ のとき、

$$g(L) = \Bigl(\overbrace{(a,b), \cdots, (a,b)}^{m}, \overbrace{|b|, \cdots, |b|}^{n-m}, \overbrace{\tfrac{|ab|}{(a,b)}, \cdots, \tfrac{|ab|}{(a,b)}}^{m-2}, \bigl|\tfrac{na+mb}{(a,b)^2} ab\bigr|\Bigr)$$ である。

証明　$L=P(a,\cdots,a,b,\cdots,b)$ の Goeritz 行列 G は、

$$
\overline{\boldsymbol{G}}=\begin{pmatrix}
-a-b & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\
a & -2a & \ddots & \ddots & & & & & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -2a & a & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a & -b-a & b & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & b & -2b & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\
b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b & -2b
\end{pmatrix}
$$

から第 1 行, 第 1 列を取って、

$$
\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}
-2a & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -2a & a & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & a & -b-a & b & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & b & -2b & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b & -2b
\end{pmatrix}
$$ である。

ここで定理 4.4 と同じ変形を施して、

$$
\boldsymbol{G}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccccc|ccc}
a & & \mathbf{0} & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
\mathbf{0} & & a & & & & & & & & \\
\hline
 & & & -(m-1)a & a & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & (m-2)a & -2a & a & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & a & -b-a & b & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & b & -2b & (n-2)b & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & b & -(n-1)b & & & \\
\hline
 & & & & & & & & b & & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & \mathbf{0} & & b
\end{array}\right)
$$ が得られる。

ただし、空いているブロックには全て 0 が入る。次に線で囲まれた 5 次正方行列を G' とおいて、次の基本変形をする。

$$
G'\overset{①}{\to}\begin{pmatrix}
0 & a & 0 & 0 & 0 \\
-ma & 0 & a & 0 & 0 \\
(m-1)a & a & -b-a & b & (n-1)b \\
0 & 0 & b & 0 & -nb \\
0 & 0 & 0 & b & 0
\end{pmatrix}
\overset{②}{\to}\left(\begin{array}{c|ccc|c}
a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -ma & a & 0 & 0 \\
0 & (m-1)a & -b-a & (n-1)b & 0 \\
0 & 0 & b & -nb & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & b
\end{array}\right)
$$

さらに、囲まれた 3 次正方行列を G'' とおくと、

$$G'' \overset{\text{③}}{\to} \begin{pmatrix} -ma & a & 0 \\ -a & 0 & -b \\ 0 & b & -nb \end{pmatrix} \overset{\text{④}}{\to} \begin{pmatrix} p_1a+q_1b & (a,b) & p_2a+q_2b \\ (a,b) & 0 & 0 \\ p_3a+q_3b & 0 & p_4a+q_4b \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{⑤}}{\to} \begin{pmatrix} (a,b) & 0 & 0 \\ 0 & (a,b) & 0 \\ 0 & 0 & p_5a+q_5b \end{pmatrix}$$

となる。ただし、$p_i, q_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ はある整数であり、①, $\cdots$,⑤ は以下の操作を表す。
① は上から 1 行目の 2 倍を上から 2 行目に、左から 1 行目の $(n-1)$ 倍を左から 2 行目にそれぞれ加える。逆 (右下) からも同様である。
② は第 1,5 行目の 1 倍をそれぞれ第 3 行目に加えて、第 1,2 列と第 4,5 列をそれぞれ入れ替える。
③ は第 1,3 行の 1 倍をそれぞれ第 2 行に加える。
④ は補題 4.3 より $(1,2)$ 成分の a と $(3,2)$ 成分の b、$(2,1)$ 成分の $-a$ と $(2,3)$ 成分の $-b$ に Euclid の互除法を用いる。
⑤$(1,1), (1,3), (3,1)$ 成分はそれぞれ (a,b) の倍数であるので、(a,b) の行または列に適当な整数をかけて加えることで 0 にする。さらに、第 1,2 列を入れ替える。

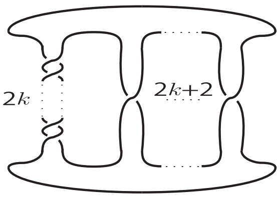
基本変形の下で行列式は符号しか変化しないから、$p_5a + q_5b = \dfrac{|\det G|}{a^{m-2}b^{n-2}(a,b)^2}$ であることがわかる。さらに、補題 4.2 より、

$\det G = (na^m b^{n-1} + ma^{m-1}b^n)(-1)^{m+n+1}$ なので、$p_5a + q_5b = \dfrac{na+mb}{(a,b)^2}ab$ が得られて、

$G \sim \big((a,b)\big) \oplus \big((a,b)\big) \oplus \overbrace{(|a|) \oplus \cdots \oplus (|a|)}^{m-2} \oplus \overbrace{(|b|) \oplus \cdots \oplus (|b|)}^{n-2} \oplus \Big(\Big|\frac{na+mb}{(a,b)^2}ab\Big|\Big)$ となる。ここで、$\min\{m,n\}$ 個ある $(|a|) \oplus (|b|)$ に補題 4.3 を $\min\{m,n\}$ 回用いると、定理の結果が得られる。 □

定理 4.4 において、$a = -1,\ b = -2k,\ n = 2k+3$ とすると、次の例が得られる。

例 4.6. $L = P(-2k, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{2k+2})$ のとき、$g(L) = \big(2k(2k+2)+1\big) = \big((2k+1)^2\big)$ である。



特に $k = 1$ のものは仲仕結びと呼ばれる。これも Pretzel link であり、$L = P(-2,-1,-1,-1,-1)$ で表される。仲仕結びは簡単で、かつ、ロープに大きなコブができる結び方であり、人命救助の際にロープを遠くへ投げるためや、滑車の滑り止めなどに用いられている。

この論文では、$P(a, \cdots, a, b, \cdots, b)$ の形をした Pretzel link の Goeritz 不変量を計算したが、同じように 2 種類のタングルからなる Pretzel links としては $P(a, b, \cdots, a, b)$ などがある。これらの Goeritz 不変量を計算することは今後の課題といえる。

謝辞　この論文に関して、近畿大学の池田徹先生と山下登茂紀先生から定理 4.5 の結果を含めて多くの有益なコメントを頂きました。心より厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] 河内明夫『レクチャー結び目理論』, 共立出版, 2007 年.

[2] T.Ikeda and H.Sugimoto"Goeritz invariants of pretzel links", J. Geom. **104**, 127-136, (2013).