

有理数の家系図から広がる数学の世界 ～結び目，繰り返し模様，ローラン多項式～

和久井道久 (関西大学システム理工学部)

2024年11月8日

目次

- §1. 有理数の Farey 和と家系図から祖先三角形・Conway-Coxeter フリーズへ
- §2. 連分数展開から結び目へ
- §3. 完全マッチングと祖先三角形と Conway-Coxeter フリーズ，そして，クラスター代数へ

このノートは，2024年11月8日に兵庫県立姫路商業高等学校にて開催された「令和6年度兵庫県数学教育会高等学校部会 西播磨支部 研究協議会」での講演会で配布した資料です。本バージョンは，講演後に若干の加筆・修正を行ったものになります。

今回の講演会でお話をさせていただくことになったのは，今年の夏，兵庫県高等学校数学研究部会が主催する懇談会にて，本学数学科を卒業し，現在，兵庫県立相生高等学校で先生をされている山本佑樹先生と10数年ぶりにお会いし，依頼を受けたことによります。

講演内容は有理数の家系図から広がる数学の世界であり，最初の方は高校生でも理解できる内容になっています。Farey 和と呼ばれる有理数に対する演算 (=分母同士・分子同士をそれぞれ足す操作) をもとに正の有理数の家系図ができ，その中に有理数を頂点にもつ三角形や多角形が見出され，それは数の繰り返し模様を生み出します。その繰り返し模様は，有理数の連分数展開，結び目，ローラン多項式とも関係し，様々な数学と結びついて発展し続けています。今回の話は，現代数学に直結しているにも関わらず，素朴で，難しい考え方を必要としない部分がたくさん含まれています。ぜひ，課題研究の素材として使っていただければ嬉しいです。

相生高等学校の小田昌史校長，山本佑樹先生を始め，会場までの案内，会場でPCの接続，控え室への案内など赤穂高校，姫路商業高等学校の先生方に大変お世話になりました。ここに記して感謝申し上げます。

§1. 有理数の Farey 和と家系図から祖先三角形・Conway-Coxeter フリーズへ

この講演では、有理数は

- 0 以上のものだけを考え、
- 既約分数で表わすときの分母は正とし、
- $\infty = \frac{1}{0}$ も特別に含める。

定義 1-1 既約分数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が **Farey ネイバー** であるとは、 $rq - ps = 1$ が満たされるときをいい、

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s}$$

を **Farey 和** という (これは再び既約分数になる)。

例 1-2

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{7} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{6}, & \frac{2}{7} = \frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3}, & \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{7} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{5}, & \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \oplus \frac{3}{4}, & \frac{6}{7} = \frac{5}{6} \oplus \frac{1}{1} \end{array}$$

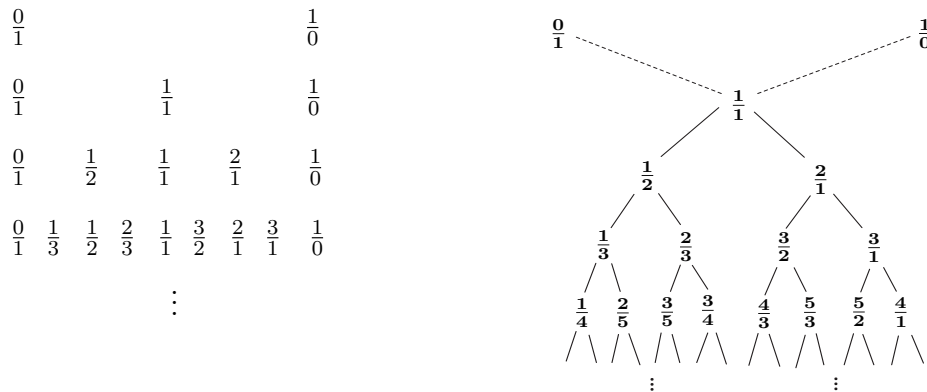
Farey 和は次の性質を持つ。

- $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} \implies \frac{b}{a} = \frac{s}{r} \oplus \frac{q}{p}$.
- 任意の非負有理数は $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ から \oplus を有限回施すことにより得られる。
- 任意の有理数 α に対して、次式を満たす Farey ネイバー $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ がただ一組存在する：

(1.1)
$$\alpha = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}.$$

条件 (1.1) を満たす Farey ネイバーの組 $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ を有理数 α の **親** と呼び、 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ をそれぞれ α の **左親**, **右親** と呼ぶ。

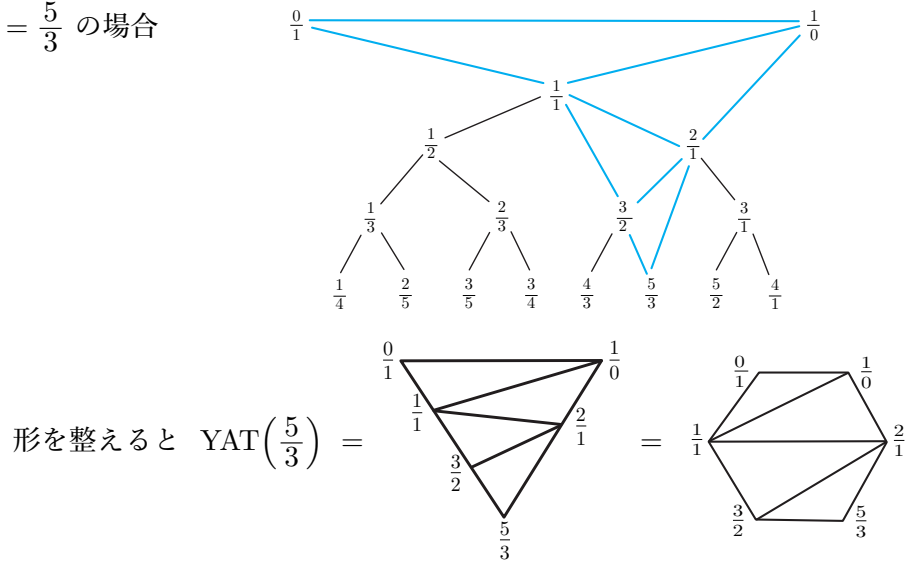
Stern-Brocot 木 と呼ばれる二進木が次々に Farey 和を付け加えることにより構成される。



次の規則に基づいて描いた Stern-Brocot 木上の三角形の「列」を有理数 α の **祖先三角形** といい、**YAT(α)** により表わす。祖先三角形の概念は山田修司 [23] により導入された。同じ概念が別の観点から Hatcher と Ortel [16] により発見されている。

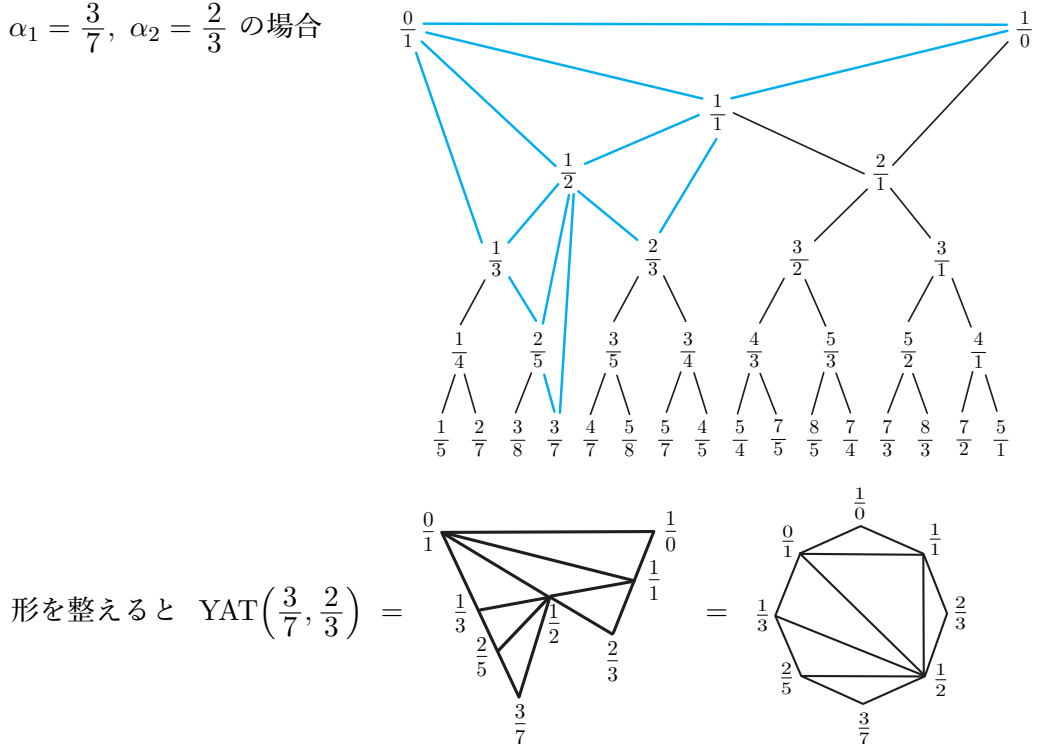
- (i) α とその左親・右親を線で結び、三角形を描く。
- (ii) α の親に対して、(i) と同様にその両親と線で結び、それらを頂点とする三角形を描く。
- (iii) (ii) の操作を $\frac{1}{1}$ に到達するまで繰り返す行い、最後に $\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ を頂点とする三角形を付け加える。

例 1-3 $\alpha = \frac{5}{3}$ の場合



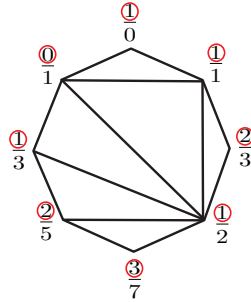
複数の正の有理数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ から同様の手続きにより、祖先三角形 $\text{YAT}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ を作ることができる。

例 1-4 $\alpha_1 = \frac{3}{7}, \alpha_2 = \frac{2}{3}$ の場合



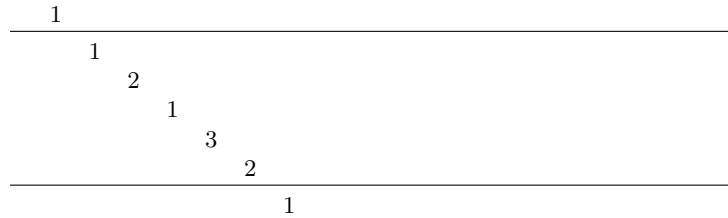
各頂点に割り当てられた既約分数の分子に注目すると

- ① 0 が割り当てられた頂点が唯一存在する。
- ② 0 を割り当てた頂点と辺で結ばれるすべての頂点には 1 が割り当てられている。
- ③ 三角形の 3 つの頂点に割り当てられている非負整数は $a, b, a + b$ である。



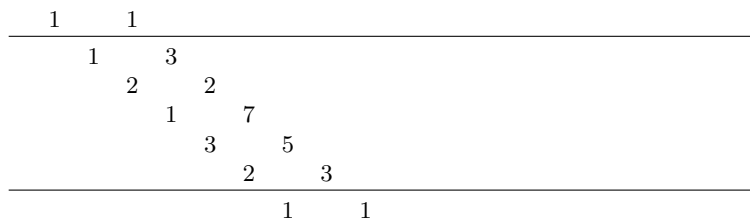
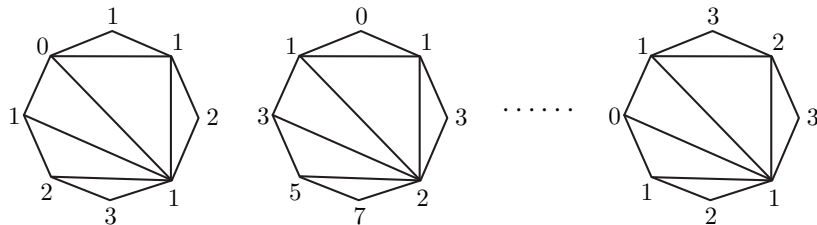
注意. 既約分数の分母に注目しても、上と同じ結果が得られる。

数の繰り返し模様が以下の手続きにより得られる。まず、0 が割り当てられた頂点から出発して、時計回りに 1 周して、頂点に割り当てられた分数の分子を順番に取り出し、0 を除いて左上から右下に向かって斜めに配置する。



ここで、見やすくするために、最上段の 1 のすぐ下と、最下段の 1 のすぐ上に線を引いている。

次に、0 の位置を時計回りに 1 つずらして、上記と同じ規則が満たされるように各頂点に非負整数を割り当てる。



これを 0 の位置が最初に選んだ位置に戻るまで繰り返す。さらに、右と左に同じパターンをコピーしていけば、帯状に並んだ数の繰り返し模様ができる。

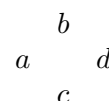
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	5	1	2	2	3	1	3	1		
2	2	4	4	1	3	5	2	2	2	4	
1	7	3	3	1	7	3	3	1	7		
1	3	5	2	2	2	4	4	1	3	5	
2	2	3	1	3	1	5	1	2	2		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

一般に、**Conway-Coxeter フリーズ** (略して CCF) とは、以下の 3 条件を満たすように正の整数を配置した表のことをいう。

(CCF1) 行は有限であり、各行は左右に無限に延びている。

(CCF2) 最初と最後の行は 1 が並ぶ。

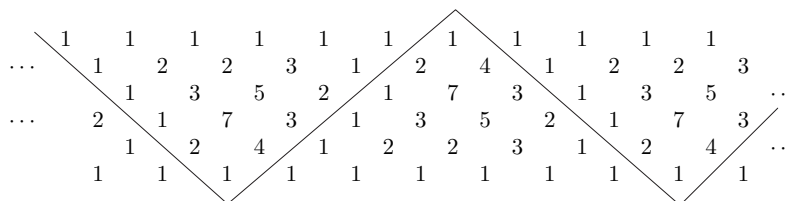
(CCF3) 各隣接する 4 つの要素 a, b, c, d は右図のようにダイヤモンドの形を成し、**ユニモジュラー規則** $ad - bc = 1$ を満たす。



最初と最後の行に並ぶ 1 を除いた行数を CCF の幅と呼ぶ。

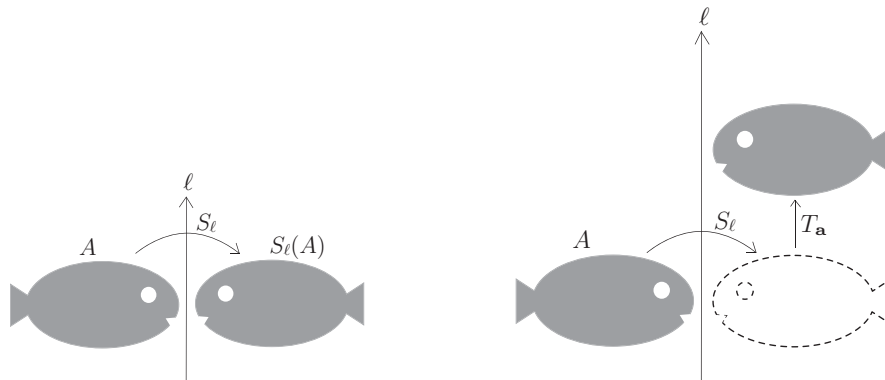
定理 1-5 (Coxeter [14])

- (1) 幅 m の CCF は $(m + 3)$ を周期を持つ。特に、各行に並ぶ数字の列は周期 $(m + 3)$ を持つ。
- (2) CCF は水平中央線に関して**映進対称性**を持つ。
- (3) CCF において、第 2 行には少なくとも 1 つ「1」が現れる。



2 つの CCF は、左右への平行移動、水平線・垂直線に関する鏡映、および、それらの合成によって移り合うとき、同値と考える。

注意. 平面における**鏡映**とは、ある直線 l に沿った折り返しによる移動 (線対称移動) のことをいい、**映進**とは、ある方向に平行移動したのち、移動した方向に関する鏡映を行う移動のことをいう。



ある方向への平行移動は**並進**と呼ばれる。平面上の図形が、鏡映(または映進または並進)により変わらないとき、その図形は鏡映対称性(または映進対称性または並進対称性)をもつと呼ばれる。

先ほどは祖先三角形(= 正多角形の三角形分割)から CCF を作ったが、逆に、CCF から次のように既約分数列を取り出し、祖先三角形を作る方法が、小木曾岳義により発見されている [17]。次の CCF の例を用いて説明する。

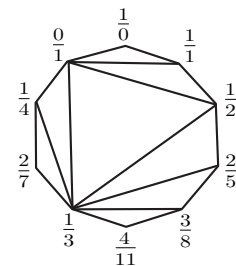
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	4	1	2	3	2	2	1	6	1	2	...	
...	7	3	1	5	5	3	1	5	5	1	7	
...	5	2	2	8	7	1	4	4	4	4	3	...
...	2	3	3	3	11	2	3	3	3	3	11	2
...	1	4	4	4	4	3	5	2	2	8	7	...
...	3	1	5	5	1	7	3	1	5	5	3	
...	2	1	6	1	2	4	1	2	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

この CCF に現れる数字の中の最大数である 11 に着目し、その数を通る左上から右下に伸びる直線を引く。さらに、その左隣りに直線を引き、それらの 2 直線から分数列を取り出す。

すると、分数列 “ $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{0}{1}$ ” が得られる。

この分数列から右図の正 10 角形の三角形分割が得られるが、どの隣接 2 直線を選んでも同じ三角形分割が得られる。

一般に、次が成立する。



定理 1-6 (Conway-Coxeter [2]) 正 n 角形の、新たに頂点を追加しない三角形分割の全体と幅 $(n-3)$ の CCF の全体との間に 1 対 1 対応が存在する。ただし、正 n 角形の三角形分割は回転で移り合うものを同一視し、CCF は平行移動で同じ配列となるものは同一視する。

内部辺を持たない三角形分割は、上から下へ 1 が連続して繋がった列が存在する CCF と対応する。このような CCF は **ジグザグ型** と呼ばれる。祖先三角形 $YAT(\alpha)$ から作られる CCF はジグザグ型である。

ジグザグ型 CCF において、最大の整数とその周囲にある 4 つの整数が決定的な役割を果たす [17,18]。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	3	1	2	5	1	2	2	2		
	5	2	1	⑨	4	1	3	3	...	
...	3	1	4	7	3	1	4	7		
	4	1	3	3	5	2	1	9	...	
...	1	2	2	2	3	1	2	5		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

定理 1-7 (小木曾-W. [17]) $\alpha = \frac{p}{q}$ を $0 < \alpha < 1$ を満たす有理数とし、 $(\frac{x}{r}, \frac{y}{s})$ を α の両親とする。このとき、祖先三角形 $YAT(\alpha)$ から作られるジグザグ型 CCF において q は最大の整数であり、その周囲にある整数は次の既約分数の分子として与えられる。

$$(1.2) \quad \alpha = \frac{p}{q}, \quad i(\alpha) = \frac{q-p}{q}, \quad r(\alpha) = \frac{r}{q}, \quad (ir)(\alpha) = \frac{s}{q}.$$

注意. $pp' \equiv 1 \pmod{q}$ を満たす $p' \in \{1, \dots, q-1\}$ をとると、

$$(1.3) \quad (ir)(\alpha) = \frac{q-p'}{q}, \quad r(\alpha) = \frac{p'}{q}.$$

ジグザグ型でない CCF

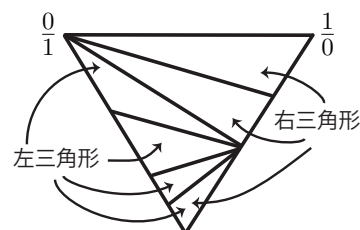
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	4	1	2	3	2	2	1	6	1	2	...	
	7	3	1	5	5	3	1	5	5	1	7	
...	5	2	2	8	7	1	4	4	4	3	...	
	2	3	3	3	11	2	3	3	3	11	2	
...	1	4	4	4	3	5	2	2	8	7	...	
	3	1	5	5	1	7	3	1	5	5	3	
...	2	1	6	1	2	4	1	2	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

を考えると、6,7,11 は、左上から右下へ伸びる直線上の数値における極大値であり、かつ、右上から左下へ伸びる直線上の数値における極大値である (7 については一部例外があるが、そうになっている箇所がある)。この数値 6,7,11 の組は CCF の不変量である。

問 1-8 ジグザグ型でない CCF を含めて、2 斜線から見て極大な整数を分母に、その周囲にある 4 つの整数を分子にして有理数を作ると、それらは何か意味のある有理数になっているか？

祖先三角形と連分数展開は密接に関係している。このことを説明しよう。

祖先三角形 $YAT(\alpha)$ を構成する基本三角形は、**左三角形**と**右三角形**に分類される。ただし、 α を頂点とする基本三角形のみ、左三角形でありかつ右三角形である。



$0 < \alpha < 1$ とし、 $YAT(\alpha)$ の基本三角形を上から順に、右三角形の個数と左三角形の個数を交互に数えて、自然数 a_1, a_2, \dots, a_n を定める。このとき、

$$(1.4) \quad \alpha = [0, a_1, \dots, a_n]$$

が成り立つ。ここで、右辺は(正則)連分数を表わし、整数 a_0 と自然数 a_1, \dots, a_n に対して、

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

例 1-9 $YAT\left(\frac{16}{23}\right) =$

 より $\frac{7}{10} = [0, 1, 2, 3], \frac{16}{23} = [0, 1, 2, 3, 2]$.

補題 1-10 $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ ($a_0 \in \{0\} \cup \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$) に対し、 n が偶数のとき、

$$\beta = \begin{cases} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2), \\ [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}] & (a_n = 1) \end{cases}$$

$$\gamma = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$$

は Farey ネイバーであり、 $\alpha = \beta \oplus \gamma$ が成り立つ。

例 1-11 $\frac{16}{23} = [0, 1, 2, 3, 2] = [0, 1, 2, 3, 1] \oplus [0, 1, 2, 3] = [0, 1, 2, 4] \oplus [0, 1, 2, 3] = \frac{9}{13} \oplus \frac{7}{10}$.

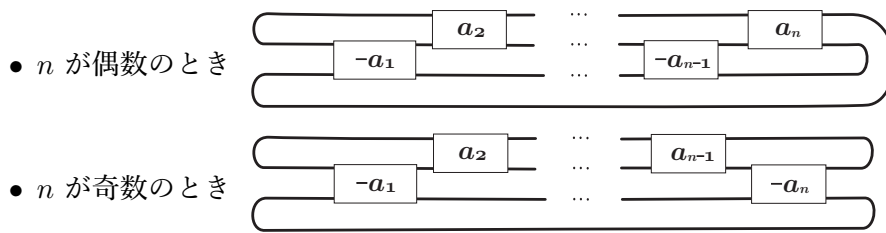
§2. 連分数展開から結び目へ

整数 k に対して $\boxed{k} = \begin{cases} \overline{\underbrace{\chi \dots \chi}_k} & (k \geq 0), \\ \overline{\underbrace{\chi \dots \chi}_k} & (k < 0) \end{cases}$

とする。有理数 $\alpha > 0$ に対して、絡み目 $L(\alpha)$ を次の図で定め、**有理絡み目**と呼ぶ。

(1) $\alpha = 1$ のとき

(2) $0 < \alpha < 1$ のとき $\alpha = [0, a_1, \dots, a_n]$ と表わし



(3) $\alpha > 1$ のとき $\overline{L(\alpha^{-1})}$ ($\overline{}$ は鏡像 (= 各交差の上下を入れ替える操作) を表わす)

例 2-1 (1) $\frac{3}{7} = [0, 2, 3]$ より $L\left(\frac{3}{7}\right) =$

(2) $\frac{4}{11} = [0, 2, 1, 3]$ より $L\left(\frac{4}{11}\right) =$

一般に、**結び目**とは、ひもの両端を繋げて輪の形にした、3次元空間内の自己交差のない曲線のことをいう。互いに交わらない有限個の結び目は、その全体をひとまとめとして見るとき、**絡み目**と呼ばれる。



三葉結び目 8の字結び目 ホップ絡み目 ボロミアン環

2つの絡み目は連続的変形の下で移り合うとき、同じとみなされる。例えば、次のような変形が可能である。



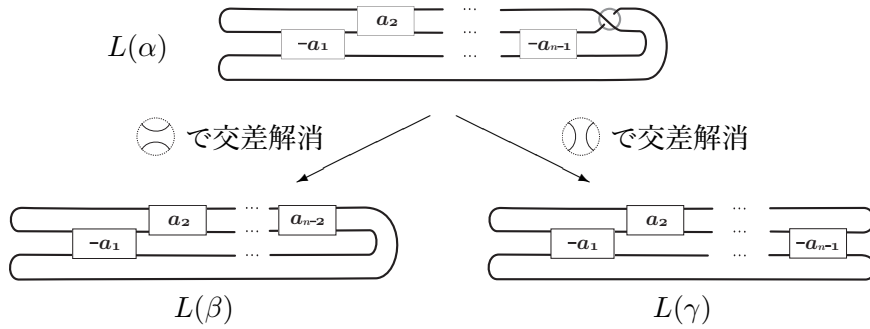
2つの絡み目がいつ同値になるかという問題は結び目理論の基本問題であるが、これを解くことは難しい。しかし、有理絡み目に限ると次の結果が知られている。この事実を含めて、結び目に関する基本事項については [1, 6, 11] 等を参照されたい。

定理 2-2 (Schubert の有理絡み目の分類定理 [22]) 有理絡み目 $L\left(\frac{p}{q}\right)$, $L\left(\frac{p'}{q'}\right)$ が同値であるための必要十分条件は、次の 2 条件が成り立つことである。

- ① $q = q'$
- ② $pp' \equiv 1 \pmod{q}$ または $p \equiv p' \pmod{q}$.

例 2-3 $4 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{13}$ より、 $L\left(\frac{4}{13}\right)$ と $L\left(\frac{10}{13}\right)$ は同値である。実際、

$$L\left(\frac{4}{13}\right) = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = L\left(\frac{10}{13}\right)$$

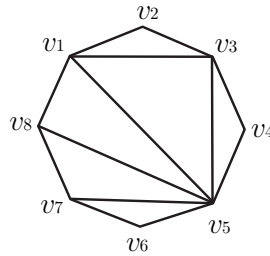


- n が奇数のときも, $a_n \geq 2$ と $a_n = 1$ のときに分けて考察することができる。

§3. 完全マッチングと祖先三角形と Conway-Coxeter フリーズ, そして, クラスター代数へ

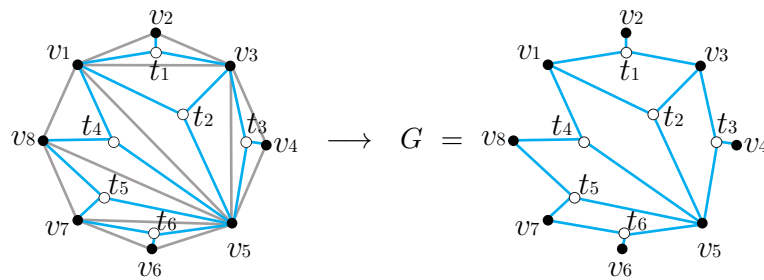
正 8 角形の三角形分割

(3.1)



を考える。各三角形の重心を t_i ($i = 1, \dots, 6$) とおき, t_i をそれが含まれている三角形の頂点と辺で結ぶ。すると, 下図右のように黒頂点と白頂点の 2 種類の頂点を持ち, 黒頂点と白頂点を結ぶ辺からなる **二部グラフ** G が得られる。

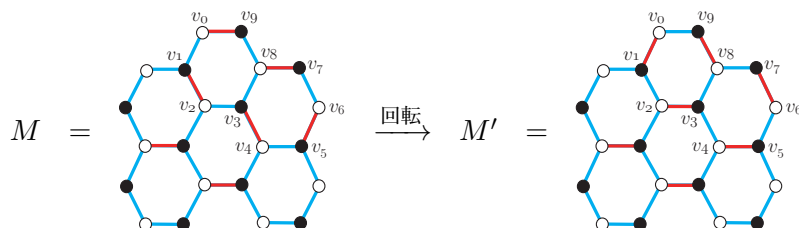
(3.2)



G の **マッチング** とは, 端点を共有しない辺の集合のことをいう。 G のマッチング M が **完全マッチング** であるとは, どの頂点も M に属するある辺の端点になっているときをいう。

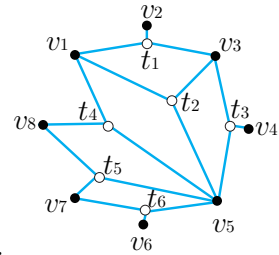
二部グラフ G の任意の 2 つの完全マッチングは, 「回転操作」の有限列によって移り合うことが知られている ([10] を参照)。

例 3-1

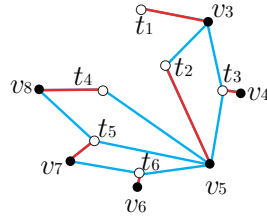


ここで, 赤色の辺がマッチングで選ばれた辺を表わす。

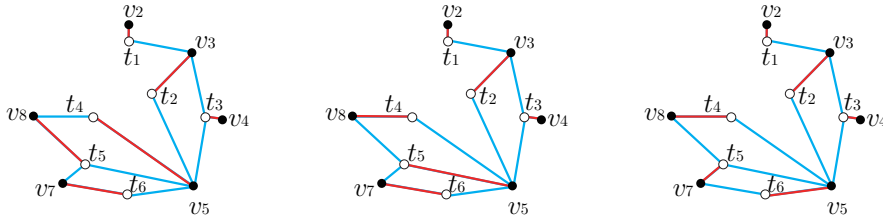
三角形分割 (3.1) から作った (3.2) の二部グラフ G を考える。頂点 v_i, v_j ($1 \leq i < j \leq 8$) とそれに隣接する辺を取り除いて作られる二部グラフを $G_{i,j}$, その完全マッチングの個数を $m_{i,j}$ とおく。



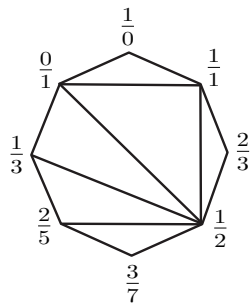
例 3-2 (1) $G_{1,2}$ の完全マッチングは次の 1 つだけなので $m_{1,2} = 1$.



(2) $G_{1,6}$ の完全マッチングは次の 3 つなので $m_{1,6} = 3$.



$m_{1,j}$ ($j = 2, \dots, 8$) を左上から右下へ並べると, (3.1) の正 8 角形の三角形分割 YAT $(\frac{3}{7}, \frac{2}{3})$ から構成される CCF の配列に一致している。



1			
...	1		...
		2	
...		1	...
			3
...			2
			1

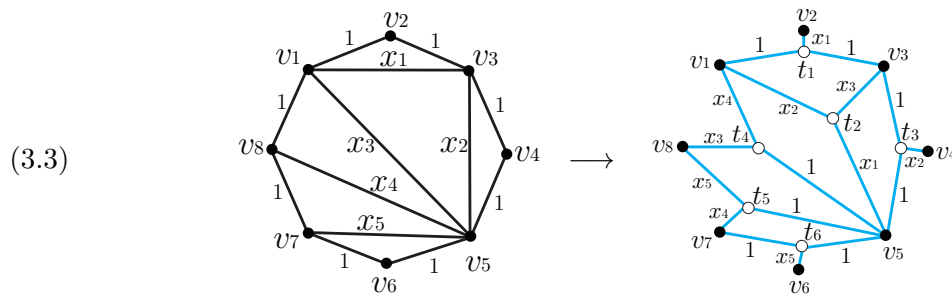
定理 3-3 (Carroll-Price [13] and Propp [9]) $n \geq 3$ とし, 正 n 角形の三角形分割 T から作られる CCF に配列される数字の, 第 i 番目の左上から右下への斜線上に並ぶ数字は, “ $m_{i,i+1}, m_{i,i+2}, \dots, m_{i,i+n-1}$ ” となる。ただし, $m_{i,j}$ の添え字は n を法として扱うものとする:

$m_{1,2}$	$m_{2,3}$...		
	$m_{1,3}$	$m_{2,4}$...	
...	$m_{1,4}$	$m_{2,5}$...	
	
		...	$m_{1,n}$	$m_{2,n+1}$
		...	$m_{1,n+1}$	$m_{2,n+2}$

上の定理の証明等は西山享の著書 [8] に詳しい。

ここからは、二部グラフの辺に重みを乗せて、完全マッチングの個数 $m_{i,j}$ を多項式に置き換えたものを考えよう。

- (1) 正 n 角形の三角形分割 T の各辺に、以下のように**重み** (weight) を乗せる。
 - T の内部辺に変数 x_1, \dots, x_{n-3} を 1 つずつ割り当てる。
 - T の周上の辺にはすべて 1 を割り当てる。
- (2) 二部グラフ G において、頂点が v_i, v_j, v_k の三角形とその重心 t をつなぐ辺 $[t, v_i]$ の**重み**を辺 $[v_j, v_k]$ の重みにより定義する。



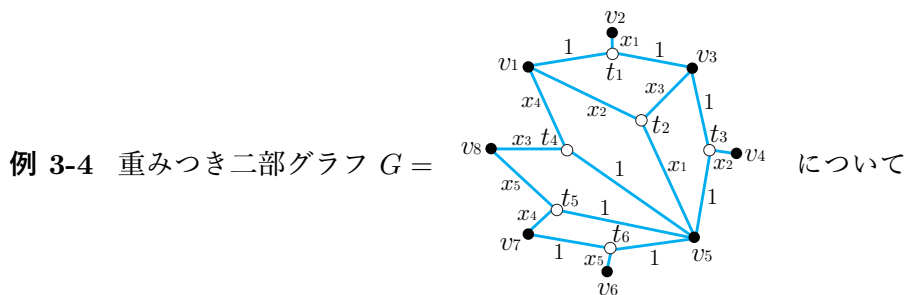
二部グラフ $G_{i,j} = G \setminus \{v_i, v_j\}$ の完全マッチングの全体を $\text{PM}(G_{i,j})$ とおく。

各 $M \in \text{PM}(G_{i,j})$ に対して、 M に属する辺の重みの積を $\text{wt}(M)$ と記す。また、 $\text{wt}(G) = \prod_{i=1}^{n-3} x_i$ と定めて、

$$(3.4) \quad \text{wt}_{i,j}(G) := \frac{1}{\text{wt}(G)} \sum_{M \in \text{PM}(G_{i,j})} \text{wt}(M)$$

とおく。

- $\text{wt}_{i,j}(G)$ は **ローラン多項式** (Larurent polynomial) であり、係数は非負整数である。
- $x_1 = \dots = x_{n-3} = 1$ とおくと、 $\text{wt}_{i,j}(G) = m_{i,j}$ である。



$$\text{wt}_{1,2}(G) = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{\prod_{i=1}^5 x_i} = 1$$

$$\text{wt}_{1,6}(G) = \frac{x_1 x_2 x_3 x_5 + x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3^2 x_4}{\prod_{i=1}^5 x_i} = x_4^{-1} x_5^{-1} (x_5 + x_3 + x_3 x_4)$$

定理 3-5 (Kuo [19]) 正 n 角形の三角形分割 T から二部グラフ G を作り, 変数 x_1, \dots, x_{n-3} を用意し, $\text{wt}_{i,j} := \text{wt}_{i,j}(G)$ を (3.4) のように定める。このとき, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ および $i+1 \leq j \leq i+n-1$ を満たす任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$(3.5) \quad \text{wt}_{i,j} \text{wt}_{i+1,j+1} - \text{wt}_{i,j+1} \text{wt}_{i+1,j} = 1,$$

$$(3.6) \quad \text{wt}_{i,i+1} = \text{wt}_{i,i+n} = 1$$

が成り立つ。ただし, $\text{wt}_{i,j}$ の添え字は n を法として扱う。

したがって, 整数の代わりにローラン多項式が配置された CCF を次のように作ることができる。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \text{wt}_{1,2} & \text{wt}_{2,3} & \cdots & & & \\ \hline & \cdots & \text{wt}_{1,3} & \text{wt}_{2,4} & \cdots & & \\ & & \cdots & \text{wt}_{1,4} & \text{wt}_{2,5} & \cdots & \\ & & & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & & & \cdots & \text{wt}_{1,n} & \text{wt}_{2,n+1} & \cdots \\ \hline & & & & \cdots & \text{wt}_{1,n+1} & \text{wt}_{2,n+2} & \cdots \end{array}$$

上の定理の証明等も西山享の著書 [8] に詳しく書かれている。

例 3-6 (3.3) の重みつき二部グラフ G から作られるローラン多項式が配置された CCF は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ \hline & x_1 & & \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2} & & x_2 & & \text{wt}_{4,6} & \cdots \\ & \cdots & \frac{x_1+x_3}{x_2} & & \frac{x_2+x_3}{x_1} & & \text{wt}_{3,6} & & \text{wt}_{4,7} \\ \frac{x_2+x_1x_4+x_3x_4}{x_2x_3} & & & x_3 & & \text{wt}_{2,6} & & \text{wt}_{3,7} & \cdots \\ & \cdots & x_4 & & \frac{x_3+x_5+x_3x_4}{x_4x_5} & & \text{wt}_{2,7} & & \frac{x_2+x_1x_4}{x_3} \\ x_5 & & \frac{1+x_4}{x_5} & & \frac{x_3+x_5}{x_4} & & \frac{x_2+x_3+x_1x_4}{x_1x_3} & & \cdots \\ \hline \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

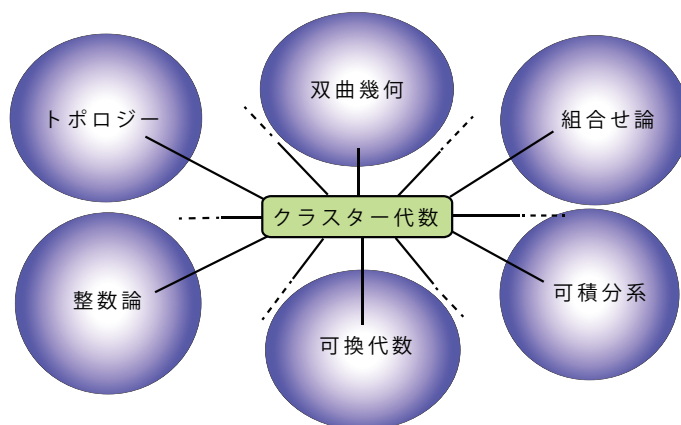
ただし, 複雑なローラン多項式が入る箇所はそのままにしている。

上の CCF に繰り返し現れる 1 以外のローラン多項式

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 := \frac{x_2+x_3}{x_1}, x_7 := \frac{x_1+x_3}{x_2}, \dots, \\ x_{20} := \frac{x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_3 + x_3^2 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_3^2x_4}{x_1x_3x_4x_5}$$

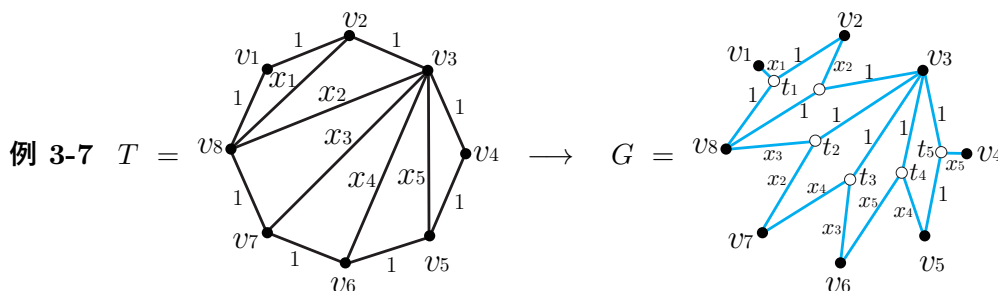
は **クラスター変数** と呼ばれ, これらに 1 を加えたものの和差積および整数倍で表わされる有理式の全体は \mathcal{A}_5 と記され, (係数なしの) A_5 型 **クラスター代数** と呼ばれる。

クラスター代数 (団代数) は Fomin と Zelevinsky [15] により 2000 年に導入され, 現在, トポロジー, 整数論, 双曲幾何, 可換代数, 組合せ論, 可積分系など多くの数学の分野と関連し, 幅



広く研究されている。そのエッセンスを知りたい場合には、井上玲の集中講義録 [3] と解説記事 [4], 西山の著書 [8], 数理科学の特集 [24] を手に取られるとよい。発展的な内容を含む入門的な記事として [5, 7, 20, 21] がある。高校生のために書いた拙文 [12] には、この記事では触れなかった補完的な内容が扱われているので、合わせて読んでいただくと理解が深まると思う。

結びに代えて、ローラン多項式が配列された CCF に関する問題の一つを提示したい。



を考える。 T から導かれるジグザグ型 CCF は次のようになる。

	1	1	1	1	1	1	1	1	1
...	3	1	2	5	1	2	2	2	
	5	2	1	⑨	4	1	3	3	...
...	3	1	4	7	3	1	4	7	
	4	1	3	3	5	2	1	9	...
...	1	2	2	2	3	1	2	5	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$G_{i,j}$ の完全マッチングの個数 $m_{i,j}$ を使うと、 $9 = m_{1,4}$ であり、 $4 = m_{0,4} = m_{4,8}$, $2 = m_{1,3}$, $7 = m_{1,5}$, $5 = m_{2,4}$ である。

問 3-8 ジグザグ型 CCF においては、その表の中の最大の整数とそれの周囲にある 4 つの整数から定まる 4 つの有理数 $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}$ が重要な意味をもった。では、有理式

$$\frac{wt_{4,8}}{wt_{1,4}}, \frac{wt_{1,3}}{wt_{1,4}}, \frac{wt_{1,5}}{wt_{1,4}}, \frac{wt_{2,4}}{wt_{1,4}}$$

は何か意味を持つだろうか？

参考文献 (入門的)

- [1] C.C. Adams, *The knot book*, W.H. Freeman & Co., New York, 1994. (金信泰造・訳『結び目の数学—結び目理論への初等的入門』培風館, 1998 / 原書改訂版, 丸善出版, 2021.)
- [2] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94, 175–183.
- [3] 井上玲 (神保道夫・記)『クラスター代数入門』(立教大学数理物理学研究センター Lecture Notes 3), 2016.
- [4] 井上玲, 「現代数学への誘い—クラスター代数入門」, 現代数学 2024 年 11 月号, 8–13.
- [5] 黒木玄, 「フリーズパターン—数の繰返し模様の不思議」, 2013 年 7 月 7 日, <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf>.
- [6] 村杉邦男『結び目理論とその応用』日本評論社, 1993.
- [7] 中島啓「ディンキン図式をめぐって—数学におけるプラトン哲学」, 平成 21 年度 (第 31 回) 数学入門公開講座公開テキスト, 京都大学数理解析研究所, 2009.
- [8] 西山享『フリーズの数学 スケッチ帖 数と幾何のきらめき』共立出版, 2022.
- [9] J. Propp, *The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers*, Integers **20** (2020), # A12, 38pages.
- [10] 高崎金久『線形代数と数え上げ』日本評論社, 2012/増補版, 2021.
- [11] 和久井道久, 「結び目と連分数」, 平成 28 年度金沢大学理工学域数物科学類計算科学特別講義のために作成したノート, 2017/改訂版, 2024, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf.
- [12] 和久井道久, 「数の繰返し模様の数理」, 高大連携セミナー「関大の研究を体験する」(関西大学千里山キャンパスにて) のために作成したノート, 2021, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/FriezePattern_KoDaiRenkei2021_for_text.pdf.

参考文献 (専門的)

- [13] G. Carroll and G. Price, *Two new combinatorial models for the Ptolemy recurrence*, unpublished manuscript 2003, <https://faculty.uml.edu/~jpropp/reach/Carroll/ptolart.pdf>.
- [14] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.
- [15] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [16] A. Hatcher and U. Ortel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology **28** (1989), 453–480.
- [17] T. Kogiso and M. Wakui, *A bridge between Conway-Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, J. Knot Theory Ramif. **28** (2019), 1950083 (40 pages).
- [18] T. Kogiso and M. Wakui, *A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag-type by rational links*, Osaka J. Math. **59** (2022), 341–362.
- [19] E.H. Kuo, *Applications of graphical condensation for enumerating matchings and tilings*, Theor. Comput. Sci. **319** (2004), 29–57.
- [20] S. Morier-Genoud, *Coxeter’s frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics*, Bull. London Math. Soc. **47** (2015), 895–938.
- [21] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *Farey boat: Continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **121** (2019), 91–136.
- [22] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Zeit. **66** (1956), 133–170.
- [23] 山田修司, 「2 橋結び目の Jones 多項式」, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集, 1996 年 2 月, 92–96.
- [24] 数理科学 2015 年 3 月号 特集・団代数をめぐって—新たな共通言語の認識—, サイエンス社.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science

Kansai University

3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan