数の繰り返し模様にまつわる
トポロジー、組合せ論、代数

—令和６年度金沢大学理工学域数物科学類

計算科学コース４年生および自然科学研究科博士前期課程大学院生のための特別講義—

2025 年 2 月 14 日

和久井 道久

はじめに

このノートは、2025年1月21日から24日にかけて、金沢大学で行った特別講義の準備のために作成したノートに加筆・修正を施したものです。金沢大学で特別講義を行うのは今回で2回目になります。前回の2016年と同様に、金沢大学の川越謙一先生からの依頼を受けて実現しました。今回は「数の繰り返し模様にまつわるトポロジー、組合せ論、代数」というテーマでお話をさせていただきましたが、その内容は2016年の特別講義でお話させていただいた「結び目と連分数」がもとになっています。それゆえ、今回の特別講義は前回の「アンサー講義」と言ってよいかもしれません。

今回の特別講義の内容には、城西大学の小木曽岳義先生との共同研究による成果がたくさん盛り込まれています。小木曽先生と出会ったのは、2017年2月に木村巖先生、古閑義之先生、小木曽先生、山根宏之先生が主催された富山大学における研究集会「Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics」においてです。研究集会の最終日、富山大学に向かう市電に偶然小木曽先生と同乗し、修士の学生に Markov 3 数の木に付随するブラケット多項式を、系統的に計算するためのアルゴリズムを探しているが掴めない部分があるということを聞きました。そのときふと、1995年10月に和歌山県の加太で開催された研究集会において、京都産業大学の山田修司先生が話されていた、有理タングルの Kauffman ブラケットおよび有理絡み目の Jones 多項式を隣り合う有理数から計算するための公式が思い浮かび、そのことを話しました。ほどなくして、小木曽先生から山田先生の公式を使って問題が解決できるという知らせを受け、それをきっかけに共同研究が始まりました。山田先生の公式は、有理数の連分数展開を使って導かれるもので、その理解に2016年の特別講義の内容がぴったり当てはまったのです。小木曽先生との共同研究をきっかけに、寺嶋郁二先生とその院生だった永井渡氏、金英子先生とその院生だった富田誠氏らと知り合い、研究交流・共同研究が始まりました。当時小木曽先生の修士課程に在籍して 2 次無理数の q-変形を研究していた任鑫氏は、修了後、私が所属する関西大学の後期博士課程に進学し、修士の研究テーマを発展させた内容で2024年3月に学位を取得しました。その間、同僚の柳川浩二先生とも共同研究を行い、現在は場を大阪大学に移して研究活動を続けています。そして、川越先生から直接伺ったのですが、今回特別講義を依頼されたのは、2024年3月に九州大学で開催された「Low dimensional topology and number theory XV」において、任氏の話を聞いて興味を持ったことがきっかけとのことでした。何とも言えない縁を感じ、とても感慨深く思います。

さて、この講義の目標と扱う内容について簡単に触れておきましょう。1970年代初頭、Coxeter [6] により、フリーズパターンと呼ばれる非負整数を帯状に配置して作られる「繰り返し模様」が考え出され、Coxeter と Conway [7] によりフリーズパターンと凸多角形の（内部に頂点を設けない）三角形分割との対応づけが与えられました。2000年に入り、Fomin と Zelevinsky [11] によって導入されたクラスター代数の理論の中でフリーズパターンが再登場したことをきっか

けに、現在、可積分系、数理物理、組合せ論、整数論、トポロジーなど広汎な分野との関連で研究されるようになっています。この講義では、小木曽先生との共同研究で得られた結果 [32–34] を中心に、Coxeter と Conway のフリーズパターン (短く、Conway-Coxeter フリーズ、さらに略して CCF と書きます) と結び目や三角形分割などの図形との結びつきを中心に、幾何学、トポロジー、組合せ論、代数学の話題を解説します。

この講義ノートは全部で 6 つの節と 1 つの付録で構成されています。第 1 節では、有理数の家系図と呼ぶことのできる Stern-Brocot 木を用いて、山田先生が考案された有理数の祖先三角形 [74] を導入します。祖先三角形から有理数の連分数展開が視覚的に捉えられることを示します。第 2 節では、多角形の (新たに頂点を追加しない) 三角形分割から、単純な規則に基づいて、数の繰り返し模様 (CCF) を作る方法を説明します。CCF の初等的な性質を証明し、特に、1 で囲まれた基本領域を持つ CCF(これをジグザグ型 CCF と言います) が有理数の 4 つ組と 1 対 1 に対応することや祖先三角形との対応関係などを調べます。第 3 節では、ジグザグ型 CCF が鏡像を無視した有理絡み目と 1 対 1 に対応することを証明したのち、結び目の正規化された Jones 多項式の定義と計算方法を説明します。第 4 節では、2020 年頃に Morier-Genoud と Ovsienko [44] により導入された有理数の q-変形の基礎理論を解説します。第 5 節では、[73] において導入された、互いに素な自然数の対 (a, b) に対して、$a + b$ の q-変形とみなすことができる非負整数係数多項式 $(a, b)_q$ を定義し、その性質を調べます。この q-変形を用いて、Morier-Genoud と Ovsienko による q-有理数に対する Farey 和公式の新しい解釈を与えます。さらに応用として、q-有理数の分子多項式がいつ一致するかということに関わる算術的予想 [35] の十分性の証明を与え、最後に、CCF の q-変形の構成法を紹介します。第 6 節では、クイバーとクラスター代数の定義と例を述べた後、有理数の祖先三角形から定まる A 型クイバー上のクラスター代数を考え、それに付随する特別な F-多項式の特殊化として、第 3 節で導入された正規化された Jones 多項式の計算公式が得られることを示します。最後に、A 型クラスター代数における特別なクラスター変数に対する、永井渡と寺嶋郁二による状態和公式 [51] から上述の F-多項式を導きます。付録には、互いに素で小さな値の自然数対 (a, b) に対する q-変形 $(a, b)_q$ と、正規化された Jones 多項式の値の一覧を掲載します。

第 5 節までの話題は予備知識はほとんど必要ありませんし、扱う対象が具体的なので、興味を持たれた方は、実験して予想を立てたり (可能なら証明してみましょう)、様々な現象を観察してみてください。きっと面白い発見があると思います。

1 月下旬にさしかかる時期での集中講義でしたが、予想以上に多くの学生と院生に参加していただきました。授業中、院生と思われる複数の受講生から積極的に質問が飛び出し、とても有意義な講義となりました。授業に参加くださった一人一人に感謝申し上げます。

最後に、川越謙一先生に謝辞を思い出とともに述べさせていただきます。川越さんには、滞在中、宿泊先から大学までの車による送り迎えと事務手続きの仲介をしていただいいたことを始めとして、金沢のソウルフード (8 番ラーメン、加登長、魚がし食堂など) を堪能させていた

だいたり、川越さんの行きつけの小料理屋で、郷土料理と旬の料理をごちそうになるなど、何から何までお世話になりました。最終日の早朝には、川越さんが運転する車で寒ブリを食べに氷見の魚市場食堂に連れていってもらいました。その帰り道、2024 年 1 月 1 日に発生した能登半島地震の被災地の輪島を案内してくださいました。テレビでしか見ていなかった光景を目の当たりにして、現状をほんの少し実感できたように思います。川越さんは毎週末輪島でボランティア活動をしていると話してくれました。復興に向けて懸命な活動が行われています。被災された皆様に 1 日も早く平穏な日常が訪れますよう、願ってやみません。

著者しるす

2025 年 2 月

も　く　じ

§1．有理数の祖先三角形と連分数展開

根元と呼ばれる頂点から下へ向かって伸びているグラフで，各頂点から 2 本ずつ下へ向かって辺が出ているものを**二進木** (binary tree) という。ここでは，$\frac{1}{1}$ を根元とし，正の有理数を頂点に持つ二進木が，Farey 和 (= 分母同士と分子同士をそれぞれ足す演算) と呼ばれる有理数同士の演算を用いて定まることを説明する。この二進木上に有理数の祖先三角形が定義される。この節では，Farey 和の定義と性質を調べた後，祖先三角形の定義を導入し，祖先三角形を用いることにより，有理数の連分数展開が目で見て捉えられることを示す。

この講義ノートを通じて，有理数を既約分数で表わすときの分母は正とする。さらに，$\infty = \frac{1}{0}$ も特別な既約分数と考える。

● 1 - 1：有理数の家系図–Stern-Brocot 木–

n を自然数としたとき，分母が n 以下で $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす有理数を小さい順に並べた有限数列は，位数 n の **Farey 数列** (Farey sequence) と呼ばれ，F_n と書かれる。

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \text{“}\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\text{”} \\
F_2 &= \text{“}\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\text{”} \\
F_3 &= \text{“}\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\text{”} \\
F_4 &= \text{“}\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\text{”} \\
F_5 &= \text{“}\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\text{”}
\end{aligned}
$$

Farey 数列において隣接する 2 項 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ は $rq - ps = 1$ を満たし，逆に，$rq - ps = 1$ を満たすとき，Farey 数列において $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ は隣接する。そこで，

$$rq - ps = 1$$

を満たす 2 つの既約分数 $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ を **Farey 隣数** (Farey neighbor) と呼ぶ。

既約分数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} := \frac{p+r}{q+s} \tag{1.1}$$

と定めると，これは再び既約分数になる。この有理数は有理数 $\frac{p}{q}$ と $\frac{r}{s}$ の **Farey 和** (Farey sum) または**メディエント** (mediant) と呼ばれる。もし，$\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が Farey 隣数ならば，$\frac{p}{q}, \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ および $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}, \frac{r}{s}$ は共に Farey 隣数である。

演習 1-1　このことを確かめよ。

$\frac{a}{b} > 1$ が $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ のように Farey 和に分解できると，$\frac{b}{a} < 1$ は $\frac{b}{a} = \frac{s}{r} \oplus \frac{q}{p}$ のように Farey 和に分解できる。したがって，有理数の Farey 和分解を求めるには，$0 < \alpha < 1$ の範囲の有理数 α について Farey 和分解を求めれば十分である。

既約分数 $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ が Farey 隣数ならば，(i) それらはともに 0 以上であるか，(ii) ともに 0 以下であるか，(iii) $\dfrac{p}{q}$ は整数で $\dfrac{r}{s} = \infty$ のいずれかの状況が生じることに注意しよう。

補題 1-1

(1) $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ が Farey 隣数で，$\dfrac{r}{s} \neq \infty$ であるとき，$\dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ は開区間 $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ に属する既約分数の中で，分母の絶対値および分子の絶対値が最小である。

(2) 任意の非負有理数は $\dfrac{0}{1}$ と $\dfrac{1}{0}$ から $\oplus$ を有限回施すことにより得られる。

(3) 任意の有理数 α に対して

$$\alpha = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} \tag{1.2}$$

を満たす Farey 隣数 $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ がただ一組存在する。条件 (1.2) を満たす Farey 隣数の組 $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ を有理数 α の**親** (pair of parents) と呼ぶ。$\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ をそれぞれ α の左親，右親と呼ぶ。

(**証明**)

(1) 証明は [2; Lemma 3.8] に従う。

まず，$\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ がともに 0 以上の有理数の場合を考える。$\dfrac{p}{q} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{r}{s}$ を満たす既約分数 $\dfrac{x}{y}$ を任意にとる。

$p = 0$ のとき，既約性により $q = 1$ である。$\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s}$ は Farey 隣数なので，$r = 1$ である。

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{0}{1} = \left(\frac{1}{s} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{0}{1}\right) = \frac{y - sx}{sy} + \frac{x}{y} \geq \frac{1}{sy} + \frac{1}{y} = \frac{1+s}{sy}$$

であるから $y \geq 1 + s = q + s$ を得る。また，$x \geq 1 = p + r$ である。

$p > 0$ のときも同様に，

$$\frac{1}{sq} = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \left(\frac{r}{s} - \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} - \frac{p}{q}\right) = \frac{ry - sx}{sy} + \frac{qx - py}{qy} \geq \frac{1}{sy} + \frac{1}{qy} = \frac{q+s}{sqy}$$

であるから $y \geq q+s$ を得る。逆数 $\dfrac{s}{r} < \dfrac{q}{p}$ が Farey 隣数であることから，同様にして $x \geq p+r$ を得る。

次に，$\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ がともに 0 以下の有理数の場合を考える。この場合，$\dfrac{-r}{s}, \dfrac{-p}{q}$ はともに 0 以上の有理数となる。$\dfrac{p}{q} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{r}{s}$ を満たす任意の既約分数 $\dfrac{x}{y}$ に対して $\dfrac{-r}{s} < \dfrac{-x}{y} < \dfrac{-p}{q}$ が成立するので，先に示したことから $y \geq s + q$, $|x| = -x \geq -r - p = |p + r|$ となる。

(3) を先に示す。証明は [2; Theorem 3.9] あるいは [5; Lemma and Definition 2.1.6] に従う。

I. 存在性：$\alpha = \dfrac{m}{n}$ を $\alpha \in \mathbb{Q}$ の既約分数表示とする。m, n は互いに素であるから，不定方程式 $my - nx = 1$ は解を持つ。その解 $(x, y) = (p, q)$ のうち，$0 \leq q < n$ を満たすものをとる。$r = m - p$, $s = n - q$ とおくと，$mq - np = 1$, $nr - ms = 1$ であるから，$\dfrac{p}{q} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{r}{s}$ であって，$qr - ps = 1$ が満たされる。したがって，$\dfrac{r}{s}$ は既約分数であり，$\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ は Farey 隣数である。さらに，$\alpha = \dfrac{p+r}{q+s} = \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ が成立する。

Ⅱ. 一意性：$\alpha \in \mathbb{Q}$ が 2 通りに既約分数の Farey 和に分解されたと仮定する：

$$\alpha = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} \oplus \frac{r'}{s'}, \quad \left(\frac{p}{q} < \frac{r}{s}, \quad \frac{p'}{q'} < \frac{r'}{s'}\right).$$

$\alpha = \dfrac{m}{n}$ を α の既約分数表示とする。

● $s = 0$ の場合：$r = q = 1$ である。よって，$n = 1$ である。$n = q' + s'$ でもあるから，$q' = 1$, $s' = 0$ でなければいけないことがわかる。したがってまた，$r' = 1$ であって，$p = m - r = m - r' = p'$ となる。故に，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$ が成り立つ。

● $s' = 0$ の場合も上と同様にして $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$ が示される。

● $s > 0$, $s' > 0$ の場合：$\dfrac{p}{q}, \dfrac{m}{n}$ は Farey 隣数なので

$$mq - pn = 1 \tag{$*1$}$$

であり，$\dfrac{p'}{q'}, \dfrac{m}{n}$ は Farey 隣数なので

$$mq' - p'n = 1 \tag{$*2$}$$

である。$(*1) - (*2)$ より

$$m(q - q') = n(p - p') \tag{$*3$}$$

を得る。m, n は互いに素であるから，

$$q - q' = nk \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{$*4$}$$

と表わされる。$n = q + s > q$, $n = q' + s' > q'$ であるから，$-n < q - q' < n$ である。これと $(*4)$ を合わせて $q - q' = 0$ でなければいけないことがわかる。このとき，$(*3)$ より $p = p'$ が従う。

$\dfrac{m}{n}, \dfrac{r}{s}$ が Farey 隣数であり，$\dfrac{m}{n}, \dfrac{r'}{s'}$ が Farey 隣数であることから上と同様の議論により $s - s' = 0$ および $r = r'$ が導かれる。こうして，$s > 0$, $s' > 0$ の場合も $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$ が成り立つ。

(2) 自然数 n に対して F_n^+ を分母が n の 0 以上の既約分数全体からなる集合とする。

I. 任意の $\alpha \in F_1^+$ は $\alpha = \dfrac{p}{1}$ $(p \geq 0)$ と表わされ，したがって，

$$\alpha = \frac{p-1}{1} \oplus \frac{1}{0} = \left(\frac{p-2}{1} \oplus \frac{1}{0}\right) \oplus \frac{1}{0} = \cdots = \left(\cdots\left(\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0}\right) \oplus \cdots \oplus \frac{1}{0}\right) \oplus \frac{1}{0}$$

となるから，F_1^+ の元については主張は成立する。

Ⅱ. $n \geq 2$ を自然数として，任意の $\beta \in \displaystyle\bigcup_{m=1}^{n-1} F_m^+$ に対して (2) の主張は成立すると仮定する。$\alpha \in F_n^+$ とする。(3) より，$\alpha = \dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ となる Farey 隣数 $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ が存在する。$n \geq 2$ なので $\alpha > 0$ である。もし，$s = 0$ であったとすると $r = q = 1$ であり，このとき，$\alpha = \dfrac{p}{1} \oplus \dfrac{1}{0}$ となる。これは $\alpha \in F_n^+$ であることに矛盾する。よって，$s > 0$ である。これと $\alpha > 0$ を合わせると，$\dfrac{p}{q} \geq 0$, $\dfrac{r}{s} \geq 0$ であることがわかる ($\because s > 0$ より，補題 1-1 の直前に挙げられている (i), (ii), (iii) のうち，(iii) は生じず，$\alpha > 0$ より (ii) も生じない)。

$s>0$ より $q,s\leq n-1$ となるから，帰納法の仮定により，$\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{r}{s}$ は $\dfrac{0}{1}$ と $\dfrac{1}{0}$ によって生成される。よって，α もそうなっている。 □

注意 1-2

(1) 上の補題の (1) の主張は $\dfrac{r}{s}=\infty$ のときには正しくない。例えば，$\dfrac{-4}{1}<\dfrac{2}{5}<\dfrac{1}{0}$ であるが，$2\geq|-4+1|=3$ は成り立たない。但し，$\dfrac{r}{s}=\infty$ であっても分母については正しい。実際，$\dfrac{p}{1}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{1}{0}$ を満たす任意の既約分数 $\dfrac{x}{y}$ に対して $\dfrac{x}{y}<\dfrac{1}{0}$ より $y>0$ であるから，$y\geq 1=q+0$ が満たされる。

(2) 上の補題の証明の中で引用した Aigner の著書 [2] は，未解決の Markov 予想を初学者向けにわかりやすく解説した専門書である。Markov 予想は，Markov 方程式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ を満たす正の整数の組 (x,y,z) の系統図に関する一意性に関する予想であるが，その系統図の縫製方法は上で紹介した Stern-Brocot 木とよく似ている。小木曽 [31] により，概均質ベクトル空間の裏返し変換を背景とした Markov 方程式の t-変形と，第 4 節で説明する Morier-Genoud と Ovsineko による有理数の q-変形のアイデアが使われた q-変形が導入され，それらの間の関係が論じられている。

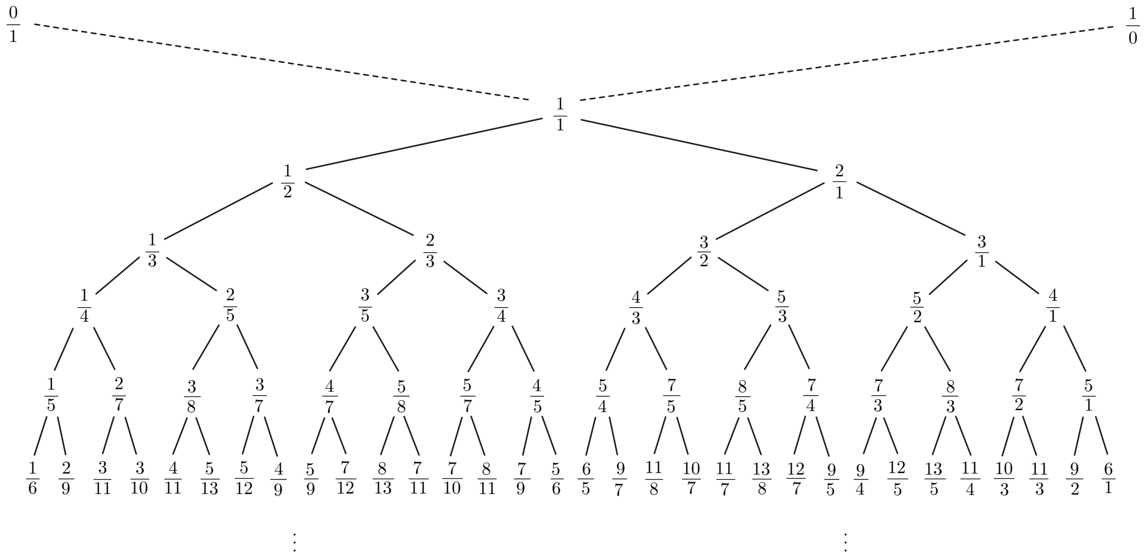
演習 1-2 有理数 $\alpha,\beta\,(>1)$ が Farey 隣数ならば，β^{-1},α^{-1} も Farey 隣数であり，$\beta^{-1}\oplus\alpha^{-1}=(\alpha\oplus\beta)^{-1}$ が成り立つことを示せ。

補題 1-1 より，頂点に非負有理数が割り当てられた，以下で述べるような (特別な頂点 $\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{0}$ と点線で描かれた 2 つの辺を持つ) 二進木が得られる。

まず，2 つの頂点 $\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{0}$ を同じレベルに置き，その次のレベルにそれらの Farey 和 $\dfrac{1}{1}$ を置く。有限列 “$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{0}$” の連続する 2 項は Farey 隣数になっている。$\dfrac{1}{1}$ の次のレベルには，$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1}$ の Farey 和 $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{0}$ の Farey 和 $\dfrac{2}{1}$ を配置する。すると，連続する 2 項が Farey 隣数であるような有限列 “$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{1},\dfrac{1}{0}$” が得られる。$\dfrac{1}{1}$ と $\dfrac{1}{2}$ および $\frac{1}{1}$ と $\dfrac{2}{1}$ をそれぞれ辺で結ぶ。さらに，得られた有限列の連続する 2 項の Farey 和を次のレベルに置き，それらを現在のレベルに置かれている (左または右) 親と辺で結ぶ。これを繰り返すことにより，二進木が得られる。

$\dfrac{1}{1}$ 以下の部分からなる二進木を **Stern-Brocot 木** (Stern-Brocot tree) [4,67] という。Stern-Brocot 木における左半分の分枝は特に **Farey 木** (Farey tree) と呼ばれ，複素力学系やカオス理論において重要な役割を演じるが，このノートでは，区別せず同じ Stern-Brocot 木という呼び名を用いる。Stern-Brocot 木は，別の文脈では，Farey tesselation あるいはモジュラー図式と呼ばれることもある。

Stern-Brocot 木に，$\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{0}$ を頂点として追加し，点線で描かれた 2 つの辺を追加したグラフを**拡大 Stern-Brocot 木**と呼ぶことにする。補題 1-1(2) より，すべての非負有理数は拡大 Stern-Brocot 木の中に現れる。



● 1 - 2 : 有理数の祖先三角形

拡大 Stern-Brocot 木上に，正の有理数 α を頂点とする (上下が逆さまの) 三角形を次の規則に基づいて描くことができる。

(i) α とその親を線で結び (辺で繋がっていない方の親については辺を追加する)，それらを頂点とする三角形を描く。

(ii) α に近い世代の親について，(i) と同様にその親と線で結び，それらを頂点とする三角形を描く。

(iii) (ii) の操作を $\dfrac{1}{1}$ に到達するまで繰返し行い，最後に，$\dfrac{1}{1}, \dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{0}$ を頂点とする三角形を付け加える。

このようにして得られる，各頂点に有理数が割り当てられた小三角形からなる集合を α を頂点とする (山田の) **祖先三角形** (ancestor triangle) といい，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ により表わす。祖先三角形を構成する各小三角形を**基本三角形** (fundamental triangle) と呼ぶ。

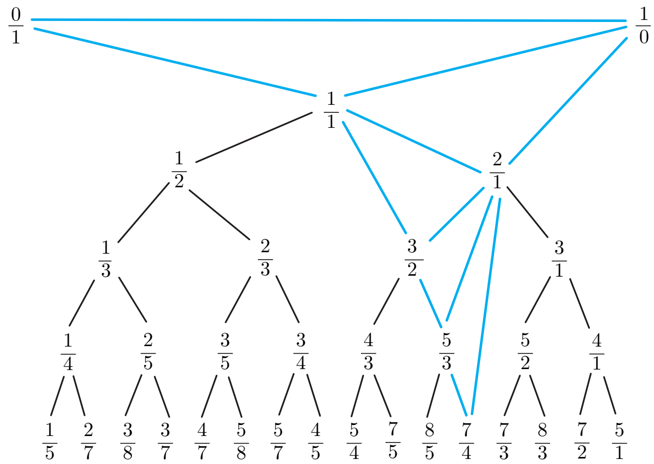
祖先三角形の概念は 2 橋結び目の Jones 多項式の研究のために，山田修司 [74] により考え出された。本質的に同じ概念は Hatcher と Ortel の論文 [16] にも見られるが，背景は異なる。このノートでは，後述の Conway-Coxeter フリーズとの関連から，山田修司のアイデアに基づいた定義 (正確にはそれをアレンジしたもの) を採用する。

複数の正の有理数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ からも同様の手続きにより，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ を作ることができる。

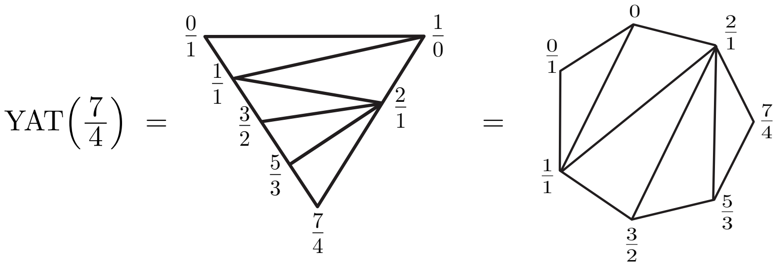
例 1 - 3　$\alpha = \dfrac{7}{4}$ の場合

$$\alpha = \frac{5}{3} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{3} = \frac{3}{2} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2} = \frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1}, \quad \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \oplus \frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0}$$

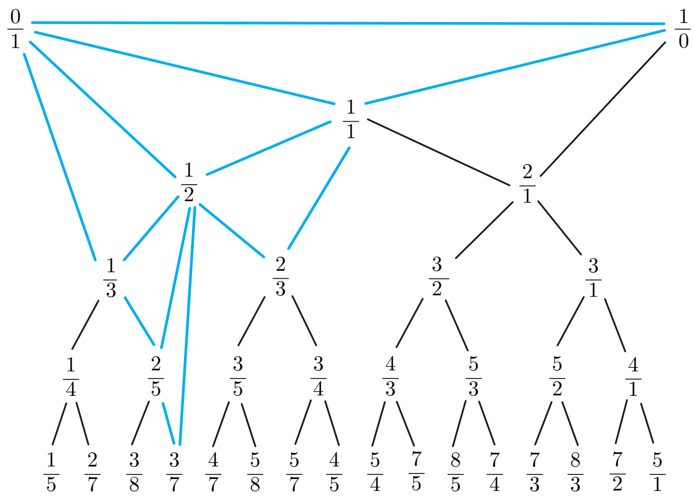
であるから，これをもとに祖先三角形を Stern-Brocot 木に描くと次図の青い線の部分になる。



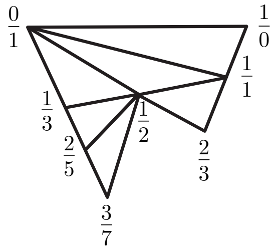
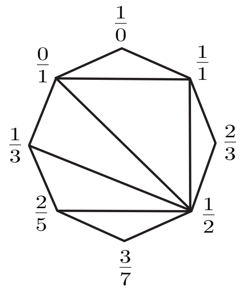
形を整えて，$\mathrm{YAT}\left(\frac{7}{4}\right)$ は次のようになる。



例 1-4　$\alpha_1 = \dfrac{3}{7}$，$\alpha_2 = \dfrac{2}{3}$ の場合



形を整えて，$\mathrm{YAT}\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{3}\right)$ は次のようになる。

$\mathrm{YAT}\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{3}\right) =$  $=$ 

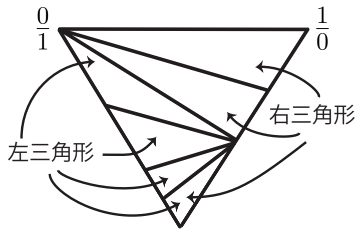
上の例のように，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ は形を整えることにより，各頂点に非負有理数が割り当てられた正多角形の三角形分割を与えることがわかる。

$\alpha \in (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ に対して，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ は $\mathrm{YAT}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ を頂点を通る垂直線に関して鏡映したものになる。

演習 1-3 $\mathrm{YAT}\left(\frac{2}{13}\right), \mathrm{YAT}\left(\frac{8}{11}, \frac{4}{3}\right)$ を求めよ。

● 1-3： 有理数の祖先三角形と連分数展開

祖先三角形と連分数展開は密接に関係している。このことを説明しよう。



祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ を構成する基本三角形の一辺が $\mathrm{YAT}(\alpha)$ の左側の斜辺上にあるとき，**左三角形**と呼ばれ，右側の斜辺上にあるとき**右三角形**と呼ばれる。α を頂点とする基本三角形のみ，左三角形でありかつ右三角形であるが，それ以外の基本三角形は左三角形であるか右三角形であるかのいずれかである。

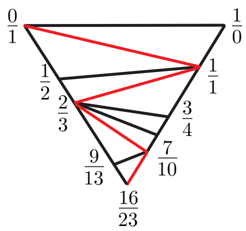
$0 < \alpha < 1$ とし，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ の基本三角形を上から順に，右三角形の個数と左三角形の個数を交互に数えて，自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を定める。このとき，

(1.3) $$\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$$

が成り立つ。ここで，右辺は (有限) **正則連分数** (regular continued fraction) を表わし，整数 a_0 と自然数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，

(1.4) $$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

により与えられる。

例 1-5 $\mathrm{YAT}\left(\frac{16}{23}\right) =$  より $\frac{7}{10} = [0, 1, 2, 3]$，$\frac{16}{23} = [0, 1, 2, 3, 2]$.

上で述べた結果は，次の補題1-6と補題1-8から従う。

補題 1-6　$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ $(a_0 \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ に対し，

(1) $a_0 = 0$ かつ n が偶数，または，$a_0 \geq 1$ かつ n が奇数のとき

$$\beta = \begin{cases} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2 \text{ のとき}), \\ [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}] & (a_n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\gamma = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

は Farey 隣数であり，$\alpha = \beta \oplus \gamma$ が成り立つ。

(2) $a_0 = 0$ かつ n が奇数，または，$a_0 \geq 1$ かつ n が偶数のとき

$$\beta = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}],$$

$$\gamma = \begin{cases} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2 \text{ のとき}), \\ [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}] & (a_n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

は Farey 隣数であり，$\alpha = \beta \oplus \gamma$ が成り立つ。

例 1-7　$\dfrac{16}{23} = [0,1,2,3,2] = [0,1,2,3,1] \oplus [0,1,2,3] = [0,1,2,4] \oplus [0,1,2,3] = \dfrac{9}{13} \oplus \dfrac{7}{10}$.

(**補題 1-6 の証明**)

$a_0 = 0$ の場合は逆数をとればよいので，$a_0 \geq 1$ の場合に示せばよい。$n = 1, 2, 3$ のときは直接成立することが確かめられる。

$n \geq 4$ とし，$n - 1$ のとき補題の主張は正しいと仮定する。

最初に，$a_n \geq 2$ の場合を示す。

$$[a_1, \ldots, a_n - 1] = \frac{p_n}{q_n} \qquad [a_1, \ldots, a_{n-1}] = \frac{r_n}{s_n}$$

のように既約分数で表示すると，

$$q_n r_n - p_n s_n = (-1)^{n+1}$$

が成り立つ (帰納法の仮定)。このとき，

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n - 1] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n - 1]} = \frac{a_0 p_n + q_n}{p_n},$$

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_{n-1}]} = \frac{a_0 r_n + s_n}{r_n}$$

となる。ここで，

$$p_n(a_0 r_n + s_n) - r_n(a_0 p_n + q_n) = p_n s_n - r_n q_n = (-1)^n$$

であるから，n が偶数ならば，$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}], [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1]$ は Farey 隣数になっていて，n が奇数ならば，$[a_0, a_1, \ldots, a_n - 1], [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ は Farey 隣数になっている。さらに，

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] \oplus [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1] &= \frac{a_0 r_n + s_n}{r_n} \oplus \frac{a_0 p_n + q_n}{p_n} \\ &= \frac{a_0(r_n + p_n) + (s_n + q_n)}{r_n + p_n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0 + \cfrac{1}{\frac{r_n+p_n}{s_n+q_n}} \\
&= a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n - 1] \oplus [a_1, \ldots, a_{n-1}]} \\
&= a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= [a_0, a_1, \ldots, a_n]
\end{aligned}
$$

となる。よって，n のときにも補題の主張は成り立つ。

次に，$a_n = 1$ の場合を示す。

n が偶数のとき

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$$

であり，$a_{n-1} + 1 \geq 2$ であるから，n が奇数の場合の結果より，

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}],\ [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}]$$

は Farey 隣数であり，

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}] \oplus [0, a_1, \ldots, a_{n-2}]$$

が成り立つ。

n が奇数のとき

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 1] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$$

であり，$a_{n-1} + 1 \geq 2$ であるから，n が偶数の場合の結果より，

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}],\ [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

は Farey 隣数であり，

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}] \oplus [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

が成り立つ。 □

補題 1-8 開区間 $(0, 1)$ 内の有理数 $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ $(a_n \geq 2)$ に対して，YAT(α) において $[0, a_1, \ldots, a_j]$ に対応する頂点は，j が奇数のとき左側の斜辺上にあり，偶数のとき右側の斜辺上にある。

(証明)

I. 整数 $m \geq 1$ に対して

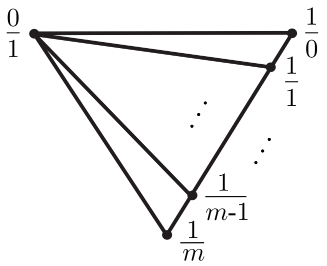
$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0}, \quad \frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{3} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{m} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{m-1}$$

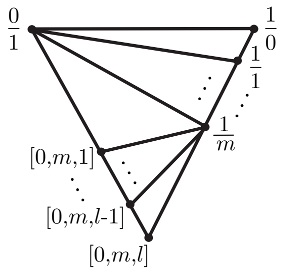
であるから，YAT(α) において $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{a_1}$ は右側の斜辺上にある (次図左を参照)。

Ⅱ. 整数 $l, m \geq 1$ に対して

$$[0, m, 1] = \frac{1}{m+1} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{m},\ [0, m, 2] = [0, m, 1] \oplus [0, m],\ \ldots,\ [0, m, l] = [0, m, l-1] \oplus [0, m]$$

であるから，YAT(α) において $[0,a_1,1],[0,a_1,2],\ldots,[0,a_1,a_2]$ は左側の斜辺上にある (次図右を参照)。





Ⅲ. より一般に，補題 1-6 と帰納法により，補題は示される。 □

有理数 α $(0<\alpha<1)$ の連分数展開を $\alpha=[0,a_1,\ldots,a_n]$ $(a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N})$ とする。祖先三角形 YAT(α) において

$$[0],\ [0,a_1],\ [0,a_1,a_2],\ \ldots,\ [0,a_1,a_2,\ldots,a_n] \tag{1.5}$$

を頂点とする下降道を**連分数道**と呼ぶことにすると，この道は補題 1-8 により YAT(α) 上をジグザグに移動する。よって，この道と YAT(α) の斜辺により山田の祖先三角形は n 個の三角形 (基本三角形の和集合) に分割される。その三角形たちを頂点 α に遠い方から順に $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ と名付けて，α の**連分数展開から定まる三角形列**と呼ぶことにする。各 Δ_j は a_j 個の基本三角形からなる。

同様に，有理数 α (>1) の連分数展開を $\alpha=[a_1,\ldots,a_n]$ $(a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N})$ とする。祖先三角形 YAT(α) において

$$\left[\frac{1}{0}\right],\ [a_1],\ [a_1,a_2],\ \ldots,\ [a_1,a_2,\ldots,a_n] \tag{1.6}$$

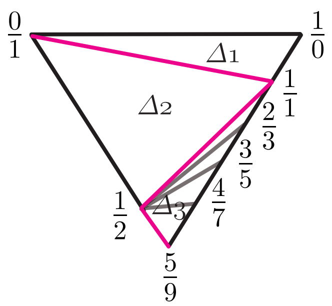
を頂点とする下降道を**連分数道**と呼ぶ。$0<\alpha<1$ のときと同様に，$\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ を定めて，α の**連分数展開から定まる三角形列**と呼ぶ。各 Δ_j は a_j 個の基本三角形からなる。

<ins>**例 1-9**</ins> (1) $\frac{5}{9}$ の場合

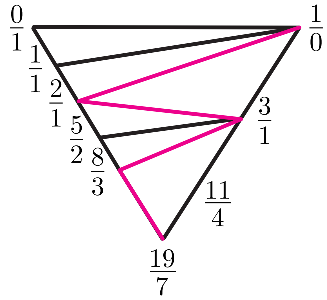
$\frac{5}{9}=[0,1,1,4]$ と表わすことができ，

$\frac{0}{1}$, $[0,1]=\frac{1}{1}$, $[0,1,1]=\frac{1}{2}$

である。よって，$\frac{5}{9}$ の連分数展開 $\frac{5}{9}=[0,1,1,4]$ が定める連分数道は右図で赤で記された下降道である。



(2) $\alpha = \dfrac{19}{7} = [2, 1, 2, 2]$ の場合

$\mathrm{YAT}\left(\dfrac{19}{7}\right) =$ 

$\dfrac{3}{1} = [2, 1]$, $\dfrac{11}{4}$, $\dfrac{19}{7} = [2, 1, 2, 2]$ を頂点とする基本三角形は右であり，$\dfrac{2}{1} = [2]$, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{8}{3} = [2, 1, 2]$ を頂点とする基本三角形は左である。

演習 1-4　$\alpha = \dfrac{3}{8}$ の場合に対して $\mathrm{YAT}(\alpha)$ を描き，α の連分数展開と連分数道を求めよ。

任意の有理数は正則連分数の形に表わすことができる。詳しくは，次が成り立つ。

定理 1-10　任意の有理数 α は

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n] \qquad (a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$$

のように正則連分数で表わすことができ，n の偶奇を指定すればこの表示は一意的である。 □

上の定理の証明は例えば，[72; §2] を参照。

注意. $0 < \alpha < 1$ ならば $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ であり，$\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ ならば $\dfrac{1}{\alpha} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ となる。そこで，α の連分数展開としては，$0 < \alpha < 1$ のときには $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ を用い，$\alpha > 1$ のときには $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ を用いることにする。

● 1-4： 有理数の負連分数展開

有理数の連分数展開は，通常は $+$ で繋いでいったものを扱うが，トポロジーや幾何学における問題のために $-$ で繋いでいく負連分数展開を扱うことも少なくない。この節では，有理数の正則連分数展開と負連分数展開との関係を Morier-Genoud と Ovsienko の論文 [43; Sections 2.1–2.3] に基づいて説明する。

負連分数とは次のように与えられる連分数のことである。

$$c_1 - \cfrac{1}{c_2 - \cfrac{1}{c_3 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{c_{l-1} - \cfrac{1}{c_l}}}}} \tag{1.7}$$

但し，$c_1, \ldots, c_l$ は 2 以上の整数である。この連分数で表される有理数をこの講義では $[c_1, \ldots, c_l]^-$ で表わす (同じ対象は，Morier-Genoud と Ovsienko の論文 [43, 44] を始め，多くの文献では $[\![c_1, \ldots, c_l]\!]$ と記されている)。任意の有理数 α (> 1) は負連分数によって一意的に表わされ

る。α を上記の形に表わすことを α の**負連分数展開** (negative continued fraction expansion) という。

注意 1-11 (1) c_1 は次のように求められる。$\alpha = \dfrac{p}{q}$ と既約分数で表わす。

$$p = aq + r \qquad (a, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < q)$$

と表わすとき，

$$c_1 = \begin{cases} a & (\alpha \in \mathbb{N} \text{ のとき}) \\ a+1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。

(2) (1.7) 自身は $c_l = 1$ でも — この取り方を許すと一意性が満たされないが — 意味がある。よって，$c_l = 1$ のときにも $[c_1, \ldots, c_l]^-$ を (1.7) の意味で用いることができる。同様に，c_1 については任意の整数でも (1.7) 自身は意味を持つので — この場合には 1 より大きな有理数でなくなるかもしれないが — $[c_1, \ldots, c_l]^-$ を (1.7) の意味で用いることができる。

(3) 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して，

$$[\,\overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{r\text{ 個}}\,]^- = \frac{r+1}{r}$$

が成り立つ。

正則連分数展開と負連分数展開の間に次の変換式が成立する。

命題 1-12 ([20, 21, 44]) 有理数 $\alpha\ (>1)$ が

$$\alpha = [a_1, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}] = [c_1, \ldots, c_l]^- \tag{1.8}$$
$$\big(a_i \geq 1\ (i = 1, \ldots, 2m),\ c_j \geq 2\ (j = 1, \ldots, l)\big)$$

のように連分数展開されるとき，$m \geq 2$ ならば，

$$(c_1, \ldots, c_l) = (a_1 + 1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_2 - 1\text{ 個}}, a_1 + 2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_4 - 1\text{ 個}}, \ldots, a_{2m-1} + 2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_{2m} - 1\text{ 個}}\,) \tag{1.9}$$

となり，$m = 1$ のとき

$$(c_1, \ldots, c_l) = (a_1 + 1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_2 - 1\text{ 個}})$$

となる。

注意 1-13 負連分数から正則連分数への変換式は以下で与えられる。

(1) c'_i $(i=0,1,\ldots,2m-1)$ を次のように定義する。

$$c'_i = \begin{cases} c_1 & (i=0\ \text{のとき}) \\ \left(\begin{array}{l} c_2,\ldots,c_l\ \text{において，第}\ \frac{i-1}{2}\ \text{番} \\ \text{目に現れる 2 よりも大きな数} \end{array}\right) & (i>0\ \text{が偶数のとき}) \\ \left(\begin{array}{l} c_2,\ldots,c_l\ \text{において，第}\ \frac{i-2}{2}\ \text{番目に現れ} \\ \text{る 2 よりも大きな数と第}\ \frac{i}{2}\ \text{番目に現れ} \\ \text{る 2 よりも大きな数の間の 2 の個数} \end{array}\right) & (i\ \text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

すると，

$$c'_0 = c_1 = a_1 + 1,$$
$$c'_{2k} = a_{2k+1} + 2 \quad (k=1,\ldots,m-1),$$
$$c'_{2k-1} = a_{2k} - 1 \quad (k=1,\ldots,m).$$

(2) $c_2,\ldots,c_l$ の中で $c_i > 2$ となる i の個数を k とおくとき，$m=k+1$ である。

例 1-14

$$\frac{13}{4} = \frac{12+1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = [3,4]$$

である一方，

$$\frac{13}{4} = \frac{16-3}{4} = 4 - \frac{3}{4} = 4 - \cfrac{1}{2-\cfrac{2}{3}} = 4 - \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}} = [4,2,2,2]^-$$

と表わすこともできる。$(4,2,2,2)$ は $(3,4)$ に (1.9) を適用して得られる有限列に一致している。

演習 1-5 $\dfrac{22}{17}$ の正則連分数展開と負連分数展開を求めよ。

[44; Theorem 1, §2] に沿った命題 1-12 の組み合わせ論的な証明を与えるために，次の行列を用いる。

整数 a に対して

(1.10)
$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^-(a) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定め，一般に，整数の有限列 $(a_1,\ldots,a_n)$ に対して

(1.11)
$$M(a_1,\ldots,a_n) = M(a_1)\cdots M(a_n), \quad M^-(a_1,\ldots,a_n) = M^-(a_1)\cdots M^-(a_n)$$

と定める。$M^-(a) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ であるから，$M^-(a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ である。一方，$\det M(a) = -1$ なので $M(a) \notin \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ であるが，n が偶数ならば，$M(a_1,\ldots,a_n) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ となる。

命題 1-15 ([43; Proposition 2.1]) 有理数 $\alpha\ (>1)$ を $\alpha=\dfrac{r}{s}\ (r,s\in\mathbb{N})$ と既約分数で表わし，(1.8) のように連分数展開する。このとき，

$$M^-(c_1,\ldots,c_l)=\begin{pmatrix} r & -r' \\ s & -s' \end{pmatrix},\quad M(a_1,\ldots,a_{2m})=\begin{pmatrix} r & r'' \\ s & s'' \end{pmatrix}$$

となる。但し，$\dfrac{r'}{s'}=[c_1,\ldots,c_{l-1}]^-$，$\dfrac{r''}{s''}=[a_1,\ldots,a_{2m-1}]$ であり，$l=1$ に対しては $\dfrac{r'}{s'}=\dfrac{1}{0}$ と考える。

(**証明**)

- M に関する等式を m に関する帰納法で示す。

I. $m=1$ のとき
$\alpha=a_1+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{a_1a_2+1}{a_2}$ より，$r=a_1a_2+1,\ s=a_2,\ r''=a_1,\ s''=1$ である。

$$M(a_1,a_2)=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+1 & a_1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & r'' \\ s & s'' \end{pmatrix}$$

と表わされるから，$m=1$ のとき，M に関する等式は成り立つ。

II. $m>1$ とし，$m-1$ のとき M に関する等式は成り立つと仮定する。行列 A の転置行列を A^{T} で表わす。このとき，

$$M(a_1,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}}=M(a_3,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}}M(a_2)M(a_1)$$

と書くことができる。

$$[a_3,\ldots,a_{2m}]=\frac{x}{y},\quad [a_3,\ldots,a_{2m-1}]=\frac{x''}{y''}$$

のように既約分数で表わすと，帰納法の仮定より

$$M(a_3,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}$$

となるから，

$$\begin{aligned} M(a_1,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2x+a_1y+x & a_2x+y \\ a_1a_2x''+a_1y''+x'' & a_2x''+y'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。一方，

$$[a_1,\ldots,a_{2m}]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\frac{x}{y}}}=\frac{a_1a_2x+a_1y+x}{a_2x+y},$$

$$[a_1,\ldots,a_{2m-1}]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\frac{x''}{y''}}}=\frac{a_1a_2x''+a_1y''+x''}{a_2x''+y''}$$

であるから，

$$r=a_1a_2x+a_1y+x,\qquad s=a_2x+y,$$

$$r''=a_1a_2x''+a_1y''+x'',\qquad s''=a_2x''+y''$$

となる。したがって，

$$M(a_1,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} r & s \\ r'' & s'' \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad M(a_1,\ldots,a_{2m})=\begin{pmatrix} r & r'' \\ s & s'' \end{pmatrix}$$

と表わされる。こうして，m のときにも M に関する等式が成り立つことが示された。

• M^- に関する等式も以下のように l に関する帰納法で示すことができる。

I. $l=1$ のとき，$\alpha=c_1$ であり，$M^-(c_1)=\begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるから，$l=1$ のとき M^- に関する等式は成り立つ。

II. $l>1$ とし，$l-1$ のとき M^- に関する等式は成り立つと仮定すると

$$M^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}}=M(c_2,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}}M^-(c_1)^{\mathrm{T}}$$

となる。

$$[c_2,\ldots,c_l]^-=\frac{p}{q},\quad [c_2,\ldots,c_{l-1}]^-=\frac{p'}{q'}$$

のように既約分数で表わすと (但し，$l=2$ のときには $p'=1,\ q'=0$ とする)，帰納法の仮定より

$$M^-(c_2,\ldots,c_l)=\begin{pmatrix} p & q \\ -p' & -q' \end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$M^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} p & q \\ -p' & -q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pc_1-q & p \\ -p'c_1+q' & -p' \end{pmatrix}$$

となる。一方，

$$[c_1,\ldots,c_l]^-=c_1-\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{c_1p-q}{p},$$
$$[c_1,\ldots,c_{l-1}]^-=c_1-\frac{1}{\frac{p'}{q'}}=\frac{c_1p'-q'}{p'}$$

であるから

$$r=c_1p-q,\quad s=p,\quad r'=c_1p'-q',\quad s'=p'$$

となる。故に，

$$M^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} r & s \\ -r' & -s' \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので，l のときにも M^- に関する等式が成り立つ。 □

補題 1-16 ([43; Lemma 2.6]) $R=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。0 以上の整数 a に対して

$$R^a=-M^-(a+1,1,1),\qquad L^a=-M^-(1,\overbrace{2,\ldots 2}^{a\text{ 個}},1,1).$$

(証明)

Ⅰ. $a=0$ のとき

$$-M^-(a+1,1,1)=-M^-(1)M^-(1)M^-(1)=-\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2 \quad (I_2 \text{ は単位行列})$$

であるから，$-M^-(a+1,1,1)=-R^0=-R^a$ であり

$$-M^-(1,\overbrace{2,\dots 2}^{a\text{ 個}},1,1)=-M^-(1,1,1)=I_2=L^0=L^a$$

となる。

Ⅱ. $a>0$ とし，$a-1$ のときに補題の等式は成り立つと仮定する。

$$M^-(a,1,1)=\begin{pmatrix}a&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-a+1\\0&-1\end{pmatrix}$$

となるので，帰納法の仮定より

$$R^a=-M^-(a,1,1)R=-\begin{pmatrix}-1&-a+1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1&-a\\0&-1\end{pmatrix}=-M^-(a+1,1,1)$$

となる。また，$M^-(1)M^-(1)L=M^-(2)M^-(1)M^-(1)$ であることが直接計算により確かめられるから，帰納法の仮定より

$$L^a=-M^-(1,\overbrace{2,\dots 2}^{a-1\text{ 個}},1,1)L=-M^-(1)\bigl(M^-(2)\bigr)^{a-1}M^-(1)M^-(1)L$$

$$=-M^-(1)\bigl(M^-(2)\bigr)^{a-1}M^-(2)M^-(1)M^-(1)=-M^-(1,\overbrace{2,\dots 2}^{a\text{ 個}},1,1)$$

を得る。よって，a のときにも補題の等式は成り立つ。 □

命題 1-17 ([43; Proposition 2.4]) $R=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とおく。

(1) 1 以上の整数 $a_1,\dots,a_{2m}$ に対して

$$M(a_1,\dots,a_{2m})=R^{a_1}L^{a_2}\cdots R^{a_{2m-1}}L^{a_{2m}}. \tag{1.12}$$

(2) 2 以上の整数 $c_1,\dots,c_l$ に対して

$$M^-(c_1,\dots,c_l)=R^{c_1}SR^{c_2}S\cdots R^{c_l}S. \tag{1.13}$$

(**証明**)

(1) (1.12) は，各 i に対して

$$M(a_i)M(a_{i+1})=\begin{pmatrix}a_i&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i+1}&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_ia_{i+1}+1&a_i\\a_{i+1}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a_i\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\a_{i+1}&1\end{pmatrix}=R^{a_i}L^{a_{i+1}}$$

と書き換えられることから従う。

(2) (1.13) は，各 j に対して

$$M^-(c_j)=\begin{pmatrix}c_j&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&c_j\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=R^{c_j}S$$

と書き換えられることから従う。 □

命題 1-18 ([43; Proposition 2.5]) 1 以上の整数 $a_1,\dots,a_{2m}$ に対して，$m\geq 2$ ならば

$$M(a_1,\dots,a_{2m})=-M^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2-1\text{ 個}},a_3+2,\overbrace{2,\dots,2}^{a_4-1\text{ 個}},\dots,a_{2m-1}+2,\overbrace{2,\dots,2}^{a_{2m}\text{ 個}},1,1). \tag{1.14}$$

$m=1$ のとき

$$M(a_1,a_2)=-M^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2\text{ 個}},1,1).$$

(**証明**)

補題 1-16 より，各 i に対して

$$\begin{aligned}
R^{a_i}L^{a_{i+1}}&=M^-(a_i+1,1,1)M^-(1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_{i+1}\text{ 個}},1,1)\\
&=M^-(a_i+1)M^-(1)M^-(1)M^-(1)M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_{i+1}\text{ 個}},1,1)\\
&=-M^-(a_i+1)M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_{i+1}\text{ 個}},1,1)\quad(\because\ M^-(1)M^-(1)M^-(1)=-I_2)\\
&=-M^-(a_i+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_{i+1}\text{ 個}},1,1)
\end{aligned}$$

となる。この等式と命題 1-17(1) を合わせて，$m\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
&M(a_1,\dots,a_{2m})\\
&=(-1)^mM^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2\text{ 個}},1,1)M^-(a_3+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_4\text{ 個}},1,1)\cdots M^-(a_{2m-1}+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_{2m}\text{ 個}},1,1)\\
&=(-1)^mM^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2-1\text{ 個}})M^-(2,1,1,a_3+1)\\
&\quad\cdot M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_4-1\text{ 個}})M^-(2,1,1,a_5+1)\cdots M^-(2,1,1,a_{2m-1}+1)M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_{2m}\text{ 個}},1,1)
\end{aligned}$$

を得る。ここで，$a\in\mathbb{Z}$ に対して

$$M^-(2,1,1,a)=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&-1\\1&0\end{pmatrix}=-M^-(a+1)$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&M(a_1,\dots,a_{2m})\\
&\quad=-M^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2-1\text{ 個}})M^-(a_3+2)\\
&\qquad\cdot M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_4-1\text{ 個}})M^-(a_5+2)\cdots M^-(a_{2m-1}+2)M^-(\overbrace{2,\dots,2}^{a_{2m}\text{ 個}},1,1)\\
&\quad=-M^-(a_1+1,\overbrace{2,\dots,2}^{a_2-1\text{ 個}},a_3+2,\overbrace{2,\dots,2}^{a_4-1\text{ 個}},a_5+2,\dots,a_{2m-1}+2,\overbrace{2,\dots,2}^{a_{2m}\text{ 個}},1,1)
\end{aligned}$$

と表わされることがわかる。

$m=1$ のときには

$$M(a_1,a_2)=-M^{-}(a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2\text{ 個}},1,1)$$

となる。 □

(**命題 1-12 の証明**)

$M^{-}(2,1,1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-R$ と表わすことができるから，命題1-18 における等式 (1.14) は，$m\geq 2$ ならば

$$M(a_1,\ldots,a_{2m})=M^{-}(a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2-1\text{ 個}},a_3+2,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_4-1\text{ 個}},a_5+2,\ldots,a_{2m-1}+2,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a_{2m}-1\text{ 個}}\ )R$$

と書き換えられる。この両辺の第 1 列を比較して，命題1-15 を適用することにより

$$[a_1,\ldots,a_{2m}]=[a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2-1\text{ 個}},a_3+2,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_4-1\text{ 個}},a_5+2,\ldots,a_{2m-1}+2,\ \overbrace{2,\ldots,2}^{a_{2m}-1\text{ 個}}\ ]^{-}$$

を得る (R を左から掛けても第 1 列は変化しないことに注意)。この等式と α の負連分数表示の一意性から，(1.9) が導かれる。

$m=1$ のときは，命題1-18 により

$$M(a_1,\ldots,a_{2m})=-M^{-}(a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2-1\text{ 個}})M^{-}(2,1,1)=M^{-}(a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2-1\text{ 個}})R$$

と書き換えられる。この両辺の第 1 列を比較して，命題1-15 を適用することにより

$$[a_1,a_2]=[a_1+1,\overbrace{2,\ldots,2}^{a_2-1\text{ 個}}\ ]^{-}$$

を得る。 □

● 1-5：負連分数展開と Farey 和，祖先三角形

補題1-6 の公式の負連分数展開版は次のようになる。

補題 1-19 $\alpha=[c_1,c_2,\ldots,c_l]^{-}$ $(l\geq 2,\ c_j\in\mathbb{N},\ c_j\geq 2\ (j=1,2,\ldots,l))$ に対して，

(1) $c_l>2$ のとき

$$\beta=[c_1,\ldots,c_{l-1},c_l-1]^{-},\quad \gamma=[c_1,\ldots,c_{l-1}]^{-}$$

とおくと，β,γ は Farey 隣数であり，$\alpha=\beta\oplus\gamma$ が成り立つ。

(2) $c_l=2$ のとき

$$\beta=\begin{cases}[c_1,\ldots,c_{l-1}-1]^{-} & (l>2\text{ のとき}),\\ [c_{l-1}-1]^{-} & (l=2\text{ のとき}),\end{cases}\qquad \gamma=[c_1,\ldots,c_{l-1}]^{-}$$

とおくと，β,γ は Farey 隣数であり，$\alpha=\beta\oplus\gamma$ が成り立つ。

注意. $\beta=1$ もあり得る。実際，$c_1=\cdots=c_l=2$ のとき，$\beta=[2,\dots,2,1]^-=1$ となる。

(**補題 1-19 の証明**)

I. $l=2$ のとき，$c_2>2$ と $c_2=2$ の場合に分けて考察することにより，補題の成立を確かめることができる。

II. $l>2$ とし，$l-1$ のとき補題は成り立つと仮定する。

● $c_l>2$ のとき

$$\alpha'=[c_2,\dots,c_l]^-$$

とおくと，帰納法の仮定より

$$\beta':=[c_2,\dots,c_l-1]^-,\qquad \gamma':=[c_2,\dots,c_{l-1}]^-$$

は Farey 隣数であり $\alpha'=\beta'\oplus\gamma'$ が成り立つ。$\beta=c_1-\dfrac{1}{\beta'}$, $\gamma=c_1-\dfrac{1}{\gamma'}$ であるから

$$\beta'=\frac{x}{y},\qquad \gamma'=\frac{z}{w}$$

とおくと，$zy-xw=1$ であり，

$$\beta=\frac{c_1x-y}{x},\qquad \gamma=\frac{c_1z-w}{z}$$

となる。$(c_1z-w)x-(c_1x-y)z=1$ なので，β,γ は Farey 隣数であり

$$\beta\oplus\gamma=\frac{(c_1x-y)+(c_1z-w)}{x+z}=c_1-\frac{y+w}{x+z}=c_1-\frac{1}{\beta'\oplus\gamma'}=c_1-\frac{1}{\alpha'}=\alpha$$

となる。$\beta'\geq 2$ より $\beta=c_1-\dfrac{1}{\beta'}\geq c_1-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{3}{2}$ であり，$\gamma'\geq 2$ より $\gamma=c_1-\dfrac{1}{\gamma'}\geq c_1-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{3}{2}$ であるから，$\beta\geq 2,\ \gamma\geq 2$ である。

● $c_l=2$ のとき

$$\alpha'=[c_2,\dots,c_l]^-$$

とおくと，帰納法の仮定より

$$\beta':=\begin{cases}[c_2,\dots,c_{l-1}-1]^- & (l-1>2\ \text{のとき}),\\ [c_{l-1}-1]^- & (l-1=2\ \text{のとき}),\end{cases}\qquad \gamma':=[c_2,\dots,c_{l-1}]^-$$

は Farey 隣数であり，$\alpha'=\beta'\oplus\gamma'$ が成り立つ。先ほどと同様に

$$\beta'=\frac{x}{y},\qquad \gamma'=\frac{z}{w}$$

とおくと，$zy-xw=1$ であり

$$\gamma=\frac{c_1z-w}{z}$$

となる。また，$l>2$ なので，β の定義より

$$\beta=\begin{cases}[c_1,c_2,\dots,c_{l-1}-1]^-=c_1-\dfrac{1}{[c_2,\dots,c_{l-1}-1]^-} & (l>3\ \text{のとき}),\\ [c_1,c_2-1]^-=c_1-\dfrac{1}{c_2-1}=c_1-\dfrac{1}{[c_2-1]^-} & (l=3\ \text{のとき})\end{cases}$$

となる。よって，いずれにしても

$$\beta=c_1-\frac{1}{\beta'}=\frac{c_1x-y}{x}$$

となる。$(c_1z-w)x-(c_1x-y)z=1$ なので，β,γ は Farey 隣数であり

$$\beta\oplus\gamma=\frac{(c_1x-y)+(c_1z-w)}{x+z}=c_1-\frac{y+w}{x+z}=c_1-\frac{1}{\beta'\oplus\gamma'}=c_1-\frac{1}{\alpha'}=\alpha$$

となる。なお，$l>3$ ならば，$\beta'\geq 2$ であるから，$c_l>2$ のときと同様にして $\beta\geq 2$ が示され，$l=3$ かつ $c_2>2$ ならば，$\beta'\geq 2$ であるから，同様に $\beta\geq 2$ である。$l=3$ かつ $c_2=2$ のとき，$\beta'=1$ となるが，$\beta=c_1-\dfrac{1}{\beta'}=c_1-1\geq 1$ となる。

また，$l>2$ ならば，$\gamma'\geq 2$ であるから，$c_l>2$ のときと同様にして $\gamma\geq 2$ が示される。 □

<u>**例 1-20**</u> $\dfrac{13}{5}=3-\dfrac{2}{5}=3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2}}=[3,3,2]^-$ であるから

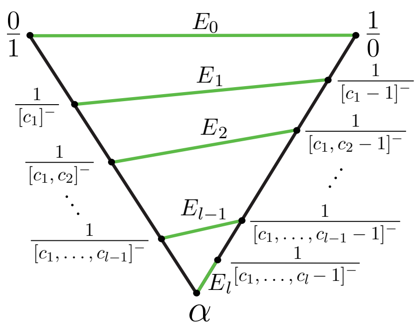
$$\frac{13}{5}=[3,3,1]^-\oplus[3,3]^-=[3,2]^-\oplus[3,3]^-=\frac{5}{2}\oplus\frac{8}{3}.$$

補題 1-19 の内容を祖先三角形で表わすと，次の命題になる。

命題 1-21 有理数 α $(0<\alpha<1)$ に対して $\dfrac{1}{\alpha}$ の負連分数展開を $\dfrac{1}{\alpha}=[c_1,\ldots,c_l]^-$ $(c_1,\ldots,c_l\in\mathbb{N},\ c_j\geq 2\ (j=1,\ldots,l))$ とする。

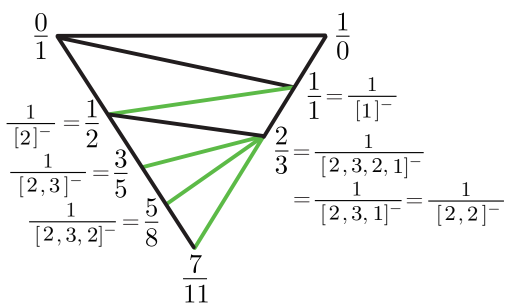
$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{[c_1]^-},\ \frac{1}{[c_1,c_2]^-},\ \cdots,\ \frac{1}{[c_1,\ldots,c_l]^-}=\alpha$$

は，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ において左斜辺上に上から順番に並ぶ頂点である。各 $j=1,\ldots,l$ に対して，$\dfrac{1}{[c_1,\ldots,c_j]^-},\dfrac{1}{[c_1,\ldots,c_j-1]^-}$ を端点とする辺を E_j とおく。また，E_0 を $\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{0}$ を端点とする辺とする。このとき，$j=1,\ldots,l-1,l$ に対して，E_{j-1},E_j および左斜辺，右斜辺により囲まれる領域内の基本三角形の個数は，$j=1$ のとき c_1 個であり，それ以外のときは (c_j-1) 個である。 □



注意. $c_l=2$ のときには，$[c_1,\ldots,c_l-1]^-=[c_1,\ldots,c_{l-1}-1]^-$ であるから E_{l-1} と E_l の端点が一致する。

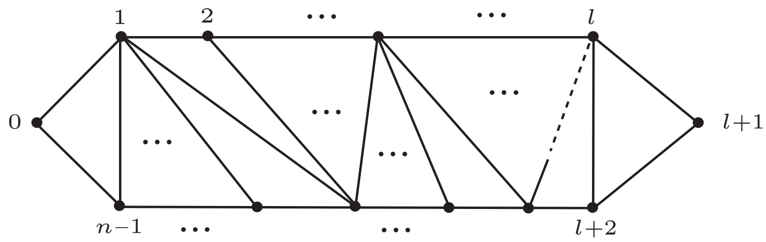
<u>**例 1-22**</u> $\alpha=\dfrac{7}{11}$ のとき，$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{11}{7}=[2,3,2,2]^-$ であり，$\mathrm{YAT}\left(\dfrac{7}{11}\right)$，$\dfrac{1}{[2]^-}$，$\dfrac{1}{[2,3]^-}$，$\dfrac{1}{[2,3,2]^-}$ は右図のようになる。



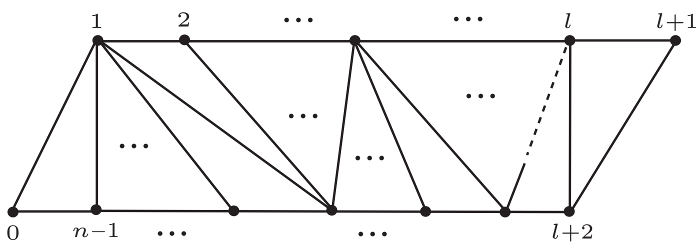
● 1 - 6 : Farey ボート

祖先三角形における基本三角形が**内部三角形** (internal triangle) であるとは，その 3 辺がいずれも祖先三角形の周上にないときをいう。内部三角形がない祖先三角形は，Morier-Genoud と Ovsienko [43; Section 1] により導入された “Farey ボート”を用いると便利なことが多い。なお，“Farey ボート”という呼び名は，彼らの論文のタイトルには記されているものの，本文には一切登場しない。数学の専門用語として用いるには，やや抵抗があって控えたのかもしれないが，このノートでは使わせていただくことにしょう。

Farey ボート (Farey boat) とは，正 n 角形の内部三角形を持たない三角形分割を，次の形に描いたもののことをいう。



頂点の番号は，時計回りに，上図のようにつける。両端の 2 つの三角形 ($0, 1, n-1$ を頂点とする三角形と $l, l+1, l+2$ を頂点とする三角形) を**外部三角形** (exterior triangle) という。Farey ボートは，左側の外部三角形の頂点 0 と右側の外部三角形の頂点 $l+1$ を次図のように置き直したものを指すことが多い。

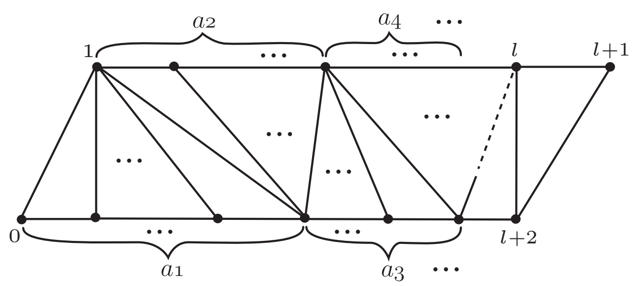


頂点が n 個の Farey ボート FBT に対して，次のように c_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ を定める：

(1.15) $$c_j := (\text{頂点 } j \text{ を頂点に持つ FBT の辺の個数}) - 1.$$

$c_j \geq 2$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ である。$c_n := c_0$ とおく。

次に，$a_1, a_2, \cdots, a_{2m}$ を，順次，次図のように FBT の三角形を数えることにより得られる自然数の有限列とする。



このとき，

$$
\begin{gathered}
c_1 = a_1 + 1,\ c_2 = 2,\ \cdots,\ c_{a_2} = 2, \\
c_{a_2+1} = a_3 + 2,\ c_{a_2+2} = 2,\ \cdots,\ c_{a_2+a_4} = 2, \\
c_{a_2+a_4+1} = a_5 + 2,\ c_{a_2+a_4+2} = 2,\ \cdots,\ c_{a_2+a_4+a_6} = 2, \\
\cdots\cdots \\
c_{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}+1} = a_{2m-1} + 2,\ c_{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}+2} = 2,\ \cdots,\ c_{a_2+a_4+\cdots+a_{2m}} = 2
\end{gathered}
$$

となる。したがって，命題 1-12 により

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{2m}] = [c_1, \ldots, c_l]^-$$

が成り立つ。このように，Farey ボートを用いることで，正則連分数展開と負連分数展開の間の一見不思議に思える変換公式を視覚的に理解することができる。

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m}$ は三角形分割における総数であり，n 角形を三角形分割に分割したときには，ちょうど $(n-2)$ 個の三角形に分割されるから，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m} = n - 2 \tag{1.16}$$

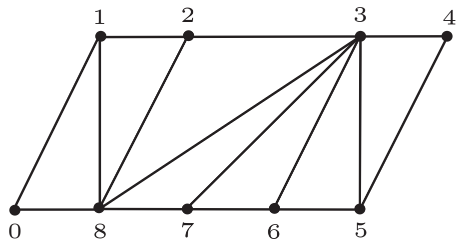
が成り立つ。

写像 $\Phi : \{$ 頂点が n 個の Farey ボートの全体 $\} \longrightarrow \mathbb{Q}_{>1} = \{\ r \in \mathbb{Q}\ \mid r > 1\ \}$ が

$$\mathrm{FBT} \longmapsto [a_1, \ldots, a_{2m}]$$

により定まる。自然数からなる有限列 $(a_1, \ldots, a_{2m})$ が与えられれば，これをもとに 頂点が n 個の Farey ボート FBT を作ることができ，$\Phi(\mathrm{FBT}) = [a_1, \ldots, a_{2m}]$ となる。よって，Φ は全射である。さらに，頂点が n 個の Farey ボートはデータ $(a_1, \ldots, a_{2m})$ により一意的に決まるから，Φ は全単射である。$\alpha \in \mathbb{Q}_{>1}$ に対して $\mathrm{FBT}(\alpha) := \Phi^{-1}(\alpha)$ と書き，1 より大きい有理数 α に対応する，n 角形の Farey ボートと呼ぶ。

例 1-23　$\dfrac{13}{9} = [1,2,4] = [1,2,3,1]$ に対して $\mathrm{FBT}\left(\dfrac{13}{9}\right)$ は次のような 9 角形の Farey ボートである。



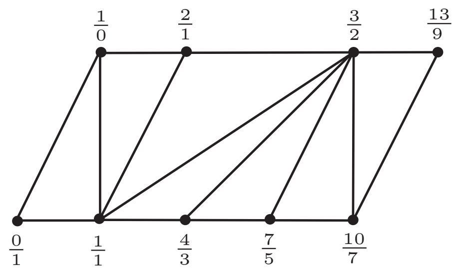
頂点が n 個の Farey ボート FBT が与えられたとき，祖先三角形のときと同様にして，その頂点に次の規則で ($\dfrac{1}{0}$ を含む) 有理数を置いていく。

(i) 頂点 0 と頂点 1 にはそれぞれ $\dfrac{0}{1}$ と $\dfrac{1}{0}$ を配置する。

(ii) FBT の三角形の頂点のうちの 2 つに，$\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{r}{s}$ が配置されているとき，残りの頂点には Farey 和 $\dfrac{p}{q} \oplus \dfrac{r}{s}$ を配置する。

このように各頂点が配置された Farey ボートもまた **Farey ボート**と呼ぶ。

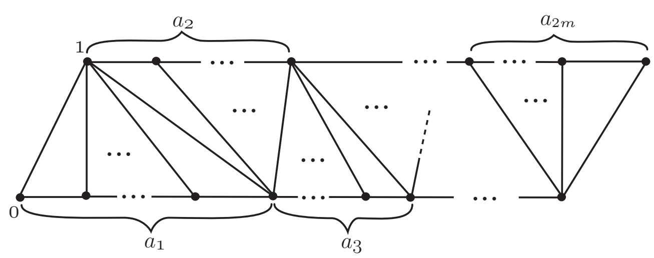
例 1-23 の Farey ボート $\mathrm{FBT}\left(\dfrac{13}{9}\right)$ の場合，次のようになる。



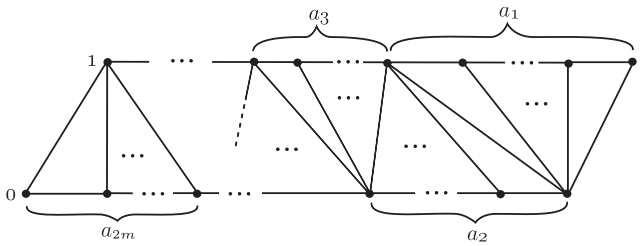
もし，頂点が n 個の Farey ボート FBT が，1 より大きい有理数 α に対応する Farey ボート $\mathrm{FBT}(\alpha)$ ならば，一番右に位置する頂点 $l+1$ に，上述の規則で配置される有理数は α になる。したがって，各頂点に有理数が配置された三角形分割として $\mathrm{FBT}(\alpha) = \mathrm{YAT}(\alpha)$ とみなすことができる。

最後に，Farey ボートの 180° 回転と祖先三角形との関係を説明する。有理数 $\alpha\ (>1)$ に対応する Farey ボート $\mathrm{FBT}(\alpha)$ を 180° 回転させたものを考える。これは，$\alpha = [a_1, \ldots, a_{2m}]$ と表わしたとき，$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) := [a_{2m}, a_{2m-1}, \ldots, a_2, a_1]$ に対応する Farey ボート $\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha))$ になる。

$\mathrm{FBT}(\alpha)\ =$



$\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)) \ =$



演習 1-6　$\alpha = \dfrac{17}{13}$ として $\mathrm{FBT}(\alpha)$ と $\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha))$ を描き，$\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha))$ が $\mathrm{FBT}(\alpha)$ を 180° 回転したものであることを確認せよ。

§2. 数の繰り返し模様（フリーズパターン）と正多角形の三角形分割

前節に登場した祖先三角形は正多角形の三角形分割を定めた。ここでは，一旦祖先三角形から離れて，純粋に正多角形の三角形分割を考察する。但し，正多角形の三角形分割は，(このノート全体を通じて，) 頂点集合が正多角形の頂点全体と一致するようなものとする。

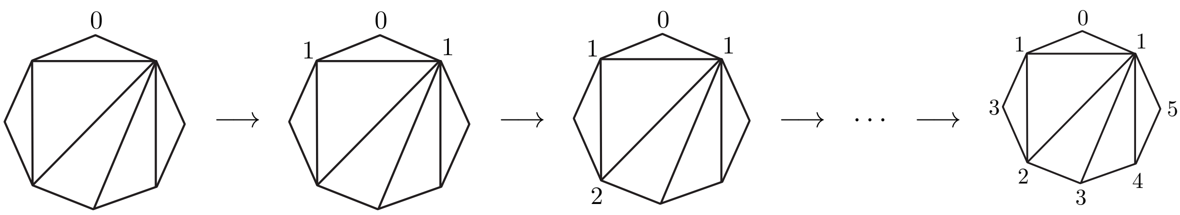
正多角形の三角形分割が与えられると，単純な規則に基づいて各頂点に非負整数を割り当てることができ，その数字を並べることにより，数の繰り返し模様（フリーズパターン）を作ることができる。その数の繰り返し模様は，1970 年代前半に Conway と Coxter により導入され，現在では Conway-Coxeter フリーズと呼ばれている。この節では，Conway-Coxeter フリーズの初等的な性質を証明する。特に，1 で囲まれた基本領域を持つ Conway-Coxeter フリーズが有理数の 4 組と 1 対 1 に対応することや祖先三角形との対応関係などを調べる。

この節以降，習慣上，正多角形という用語をたびたび用いるが，「正」の性質は使わないので，単に多角形と読み替えて問題ない。

● 2 - 1 : 正多角形の三角形分割と離散 Strum-Liuville 方程式

Coxeter と Rigby の記事 [8] に従い，次のルールに基づいて，正 n 角形の各頂点に非負整数を割り当てよう。

規則 1　頂点を 1 つ選び，0 を割り当てる。
規則 2　0 を割り当てた頂点と辺で結ばれるすべての頂点に 1 を割り当てる。
規則 3　三角形の 3 つの頂点のうち，2 つの頂点に非負整数 a, b が割り当てられているとき，残りの頂点には $a+b$ を割り当てる。

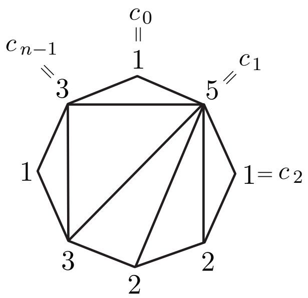


正 n 角形の各頂点について，

$$(\text{その頂点を端点にもつ辺の個数}) - 1 \tag{2.1}$$

を考える。今，正 n 角形の各頂点に先の 3 つの規則に基づいて非負整数を割り当てておき，0 が割り当てられた頂点に対する (2.1) の値を c_0 とおき，その頂点から時計回りに数えて i 番目

の頂点に対する (2.1) の値を c_i とおく。



定理 2-1 (**Conway and Coxeter**)　三角形に分割された凸 n 角形において，0 が割り当てられた頂点から時計回りに数えて i 番目の頂点に，規則 1，2，3 に基づいて割り当てられる非負整数を f_i とする。$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n-1} = 1,\ f_n = 0$ とすると， 離散 Strum-Liuville 方程式

(2.2)
$$f_{i+1} = c_i f_i - f_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

を満たす。

(**証明**)

n に関する帰納法で示す。$n = 3$ のとき，$f_0 = 0,\ f_1 = f_2 = 1$ であり，$c_0 = c_1 = c_2 = 1$ であるから，(2.2) は成立する。

$n \geq 4$ とする。三角形分割された凸 n 角形 K を考える。K の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが 2 つ以上存在する。

$\because$)

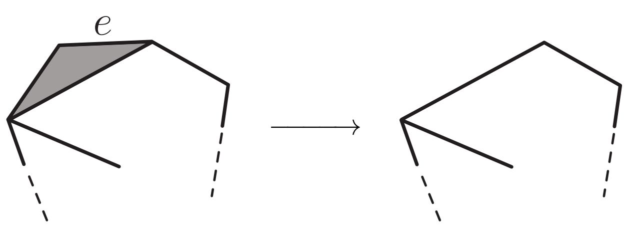
n に関する帰納法で証明する。

$n = 4$ のときは明らかである。$n \geq 5$ とし，与えられた凸 n 角形 K の外周上の辺 e を 1 つとる。次の 2 つの場合が考えられる。

(i) 辺 e を含む三角形の他の 2 辺のうち，一方は外周上にあり，他方は K の内部に含まれている場合。

(ii) 辺 e を含む三角形の他の 2 辺とも K の内部に含まれている場合。

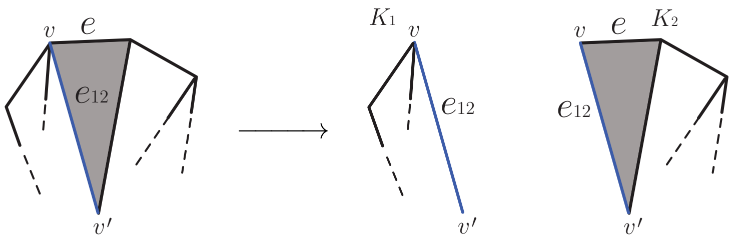
(i) の場合，辺 e を含む三角形を取り除いて，三角形分割された凸 $(n-1)$ 角形 K_0 を作る。



帰納法の仮定より， K_0 の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが 2 つ以上存在する。K_0 の頂点の個数は 4 以上であるから，その 2 つの頂点が両方とも，取り除いた三角形の頂点となることはない。したがって，少なくとも一方は取り除いた三

角形以外の頂点であり，その頂点を含む K_0 における唯一の三角形は，K における三角形でもある。よって，取り除いた三角形と合わせて K の頂点の中には，その頂点を含む三角形が唯一であるものが少なくとも 2 つ存在する。

(ii) の場合，e の端点の一方をとり，その端点を含む内部辺で，K を 2 つの凸多角形 K_1, K_2 に分割する。K_1, K_2 の頂点数は K の頂点数よりも少ないので，K_1, K_2 に対して帰納法の仮定を適用することができる。分割したときの内部辺を e_{12} とおき，その端点を v, v' とおく。



各 $i = 1, 2$ に対して，K_i の v, v' 以外の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが存在する。実際，帰納法の仮定より，K_i の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが 2 つ以上存在する。もし，K_1 において，v, v' の両方がこの条件を満たす頂点であったとすると，K_1 は v, v' にもう 1 つ頂点を付け加えた三角形の形をしている。その v, v' 以外の頂点を v_1 とおくと，v_1 を含む K_1 の三角形は唯一である。K_2 についても同様のことが言える。よって，K_i の v, v' 以外の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが存在する。

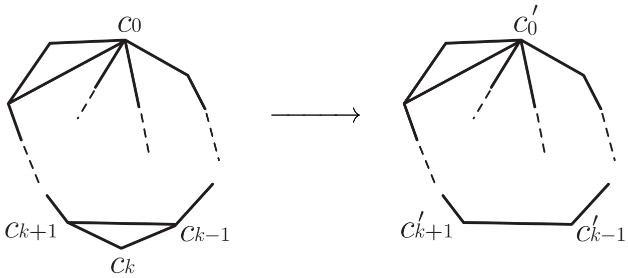
そこで，各 K_i においてそのような頂点をそれぞれ 1 つずつ選び，v_i とおくと，v_i を含む K 内の三角形は唯一である。こうして，(ii) の場合にも K の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが 2 つ以上存在することが示された。 □

K の頂点の中に，その頂点を含む三角形が唯一であるものが 2 つ以上存在するから，そのような頂点の中に，最初に選んで 0 を割り当てた頂点以外の頂点が存在する。その 1 つを選ぶ。その頂点は k $(1 \leq k \leq n-1)$ 番目の頂点であったとすると，$f_k = f_{k-1} + f_{k+1}$ が成り立つ。

∵)

割当規則 1，2，3 により，k 番目の頂点に割り当てられる数 f_k は，それに隣接する $(k-1)$ 番目の頂点と $(k+1)$ 番目の頂点に割り当てられる数 f_{k-1}, f_{k+1} が決まらないと，決まらない。そして，それらの数が決まれば，割当規則 1，2，3 により，和 $f_{k-1} + f_{k+1}$ が k 番目の頂点に割り当てられる数 f_k になる。 □

最初に与えられた凸 n 角形の分割 K から k 番目の頂点およびそれを含む三角形と辺を取り除くことにより，凸 $(n-1)$ 角形の分割 K' を作る。



このとき，K' における i 番目の頂点に対する f_i, c_i をそれぞれ f'_i, c'_i と書くと，次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
f'_i &= f_i, & c'_i &= c_i \quad (0 \le i \le k-2),\\
f'_{k-1} &= f_{k-1}, & c'_{k-1} &= c_{k-1} - 1,\\
f'_k &= f_{k+1}, & c'_k &= c_{k+1} - 1,\\
f'_i &= f_{i+1}, & c'_i &= c_{i+1}, \quad (k+1 \le i \le n-1)
\end{aligned}$$

帰納法の仮定より，

$$f'_{i+1} = c'_i f'_i - f'_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

が成り立つ。これを用いて次の等式を得る。

- $1 \le i \le k-2$ に対して

$$c_i f_i - f_{i-1} = c'_i f'_i - f'_{i-1} = f'_{i+1} = f_{i+1}$$

となる。

- $i = k-1$ に対して

$$c_i f_i - f_{i-1} = (c'_{k-1} + 1) f'_{k-1} - f'_{k-2} = f'_k + f'_{k-1} = f_{k+1} + f_{k-1} = f_k$$

となる。

- $i = k$ に対して，$c_k = 1$ であるから

$$c_i f_i - f_{i-1} = 1(f_{k-1} + f_{k+1}) - f_{k-1} = f_{k+1}$$

となる。

- $i = k+1$ に対して

$$c_i f_i - f_{i-1} = (c'_k + 1) f'_k - (f_{k-1} + f_{k+1}) = c'_k f'_k - f'_{k-1} = f'_{k+1} = f_{k+2}$$

となる。

- $k+2 \le i \le n-1$ に対して

$$c_i f_i - f_{i-1} = c'_{i-1} f'_{i-1} - f'_{i-2} = f'_i = f_{i+1}$$

となる。

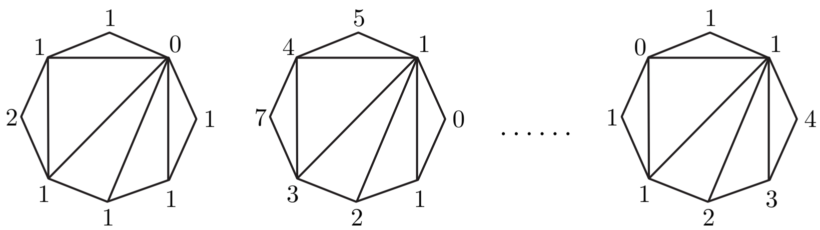
以上より，凸 n 角形の三角形分割 K に対しても離散 Strum-Liuville 方程式は成立する。 □

● 2-2： 正多角形の分割から数の繰り返し模様へ

正 n 角形の各頂点に先の 3 つの規則に基づいて非負整数を割り当てる。0 が割り当てられた頂点から出発して，時計回りに 1 周して，頂点に割り当てられた数を順番に取り出し，0 を除いて左上から右下に向かって斜めに配置する (最上段の 1 のすぐ下と，最下段の 1 のすぐ上に線を引いているのは見やすくするためのもの)。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & \\
\hline
\cdots & & 5 & & & & & & \cdots \\
 & & & 4 & & & & & \\
\cdots & & & & 3 & & & & \cdots \\
 & & & & & 2 & & & \\
\cdots & & & & & & 3 & & \cdots \\
\hline
 & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$

次に，0 の位置を時計回りに 1 つずらして，上記と同じルールで各頂点に非負整数を割り当てる。



そして，割り当てられた数を時計回りに順番に取り出し，0 を除いて先ほど並べた数の列の右隣に配置する。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & & & & & & \\
\hline
\cdots & & 5 & & 1 & & & & & & \cdots \\
 & & & 4 & & 1 & & & & & \\
\cdots & & & & 3 & & 1 & & & & \cdots \\
 & & & & & 2 & & 2 & & & \\
\cdots & & & & & & 3 & & 1 & & \cdots \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

これを 0 の位置が最初に選んだ位置に戻るまで繰り返す。すると，互い違いに並んだ数の表が得られる。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
\hline
\cdots & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & & & & & \cdots \\
 & & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & & & & \\
\cdots & & & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & & & \cdots \\
 & & & & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & & \\
\cdots & & & & & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & \cdots \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

右と左に同じパターンをコピーしていけば，帯状に並んだ数の繰り返し模様ができ上がる。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
\cdots & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
 & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & \\
\cdots & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & \cdots \\
 & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
\cdots & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

このような数の配置は Conway-Coxeter フリーズ（パターン）と呼ばれている [7]。

一般に，**Conway-Coxeter フリーズ** (略して CCF と記す) とは，以下の 3 条件を満たすように正の整数を「帯状に」配置した表のことをいう。

(CCF1) 行は有限であり，各行は左右に無限に延びている。

(CCF2) 最初と最後の行は 1 が並ぶ。

(CCF3) 各隣接する 4 つの要素 a, b, c, d は次図のようにダイヤモンドの形を成し，ユニモジュラー規則 $ad - bc = 1$ を満たす。

$$
\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & d \\
 & c &
\end{array}
$$

Conway-Coxeter フリーズにおいて，最初と最後の行に並ぶ 1 を除いた行数を**幅**と呼ぶ。Conway-Coxeter フリーズは次の性質を持つ。

定理 2-2 (**Coxeter [6]**)　(1) 幅 m の Conway-Coxeter フリーズは $(m+3)$ を周期に持つ。特に，各行に並ぶ数字の列は周期 $(m+3)$ を持つ。$(m+3)$ はその Conway-Coxeter フリーズの**位数** (order) と呼ばれる。

(2) Conway-Coxeter フリーズは水平中央線に関して映進対称性を持つ。言い換えると，Conway-Coxeter フリーズは水平方向の移動と鏡映に関して基本領域を持つ。

(3) Conway-Coxeter フリーズにおいて，第 2 行には少なくとも 1 つ「1」が現れる。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{12}{c}{\longleftarrow m+3 \longrightarrow} \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\cdots & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
m & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 1 & 3 & 5 & \cdots \\
\cdots & 2 & 1 & 7 & 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 7 & 3 \\
 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & \cdots \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

定理 2- 3 (**Conway and Coxeter [7; (17)–(24)]**) Conway-Coxeter フリーズ Γ において，第 2 行に並ぶ数を順次取り出して数列 $\{c_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を作る。Γ の幅を $(n-3)$ $(n \geq 4)$ としておく。さらに，Γ の "対角線"(= 左上から右下に並ぶ数字上に引いた直線) の中で c_1 を通るものを考えて，その線上に並ぶ数字を順次取り出して有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ を作る。但し，$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n-1} = 1,\ f_n = 0$ である。さらに，$g_0 = -1$ とし，g_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を f_{j-1} の右隣りに並ぶ数字とする。

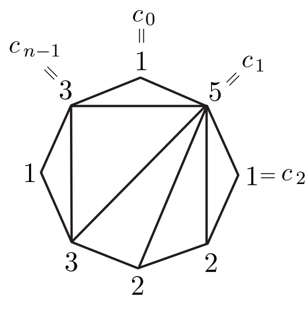
$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots \\
\hline
\cdots & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5 & & \cdots \\
 & \cdots & & f_3 & & g_4 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & f_4 & & g_5 & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \cdots & & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
 & & \cdots & & \cdots & & f_{n-2} & & g_{n-1} & & \cdots & & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots
\end{array}
$$

このとき，有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ は離散 Sturm-Liouville 方程式

$$
f_{i+1} = c_i f_i - f_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.3}
$$

を満たす。

注意 2- 4 今，正 n 角形の各頂点に先の 3 つの規則に基づいて非負整数を割り当てておき，0 が割り当てられた頂点に対する (2.1) の値を c_0 とおき，その頂点から時計回りに数えて i 番目の頂点に対する (2.1) の値を c_i とおく。



$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ は，対応する CCF の第 2 行目に現れることが観察される。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
\cdots & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
 & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & \\
\cdots & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & \cdots \\
 & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & \\
\cdots & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

定理 2-1 を CCF を用いて解釈すると，定理 2-3 になる。

Conway-Coxeter フリーズは，多角形の三角形分割との関わりのみにとどまらず，様々な数学と関連している。このノートの中で取り上げられなかった他の数学との関連については，西山享により書かれた，Conway-Coxeter フリーズに関する初等的な結果から最新の話題までを扱ったユニークな入門書かつ専門書 [55] を参照して欲しい。現代数学へのつながりについては，中島啓 [53]，黒木玄 [36] による解説記事も有用である。

● 2-3： 定理 2-2 と定理 2-3 の証明

定理 2-2 および定理 2-3 を [17; Proosition 5], [71; Theorem 3.10] に沿って証明する。まず，定理 2-3 を証明するために，補題を一つ用意する。

補題 2-5 (**Coxeter** [6]) 幅が $n-3$ の Conway-Coxeter フリーズにおいて，定理 2-3 のように定義される有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^n$, $\{g_i\}_{i=0}^n$ を用いて，

$$(r,s) := \begin{vmatrix} f_r & f_s \\ g_r & g_s \end{vmatrix} = f_r g_s - g_r f_s \quad (0 \leq r, s \leq n)$$

と定める。次の等式が成り立つ。

(1) 任意の $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して $(r,r) = 0$.

(2) 任意の $r, s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して $(r,s) = -(s,r)$.

(3) 任意の $s \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $(s-1, s) = 1$.

(4) 任意の $x, y, z, w \in \{0, \ldots, n\}$ に対して $(x,y)(z,w) + (x,z)(w,y) + (x,w)(y,z) = 0$.

(5) 任意の $r \in \{1, \ldots, n\}$, $s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して $\begin{vmatrix} (r-1,s) & (r,s) \\ (r-1,s+1) & (r,s+1) \end{vmatrix} = 1$.

(**証明**)

(1) $(r,r) = f_r g_r - g_r f_r = 0$.

(2) $(r,s) = f_r g_s - g_r f_s = -(f_s g_r - g_s f_r) = -(s,r)$.

(3) ユニモジュラー規則により，$(s-1,s) = f_{s-1} g_s - g_{s-1} f_s = 1$.

(4)

$$
\begin{aligned}
&(x,y)(z,w)+(x,z)(w,y)+(x,w)(y,z)\\
&=(f_xg_y-g_xf_y)(f_zg_w-g_zf_w)+(f_xg_z-g_xf_z)(f_wg_y-g_wf_y)+(f_xg_w-g_xf_w)(f_yg_z-g_yf_z)\\
&=0
\end{aligned}
$$

(5) (4) より

$$(*1)\qquad (r-1,s)(r,s+1)+(r-1,r)(s+1,s)+(r-1,s+1)(s,r)=0$$

が成り立つ。(2), (3) より $(r-1,r)(s+1,s)=1\cdot(-1)=-1$ であるから，上の等式は次に同値である。

$$(*2)\qquad (r-1,s)(r,s+1)+(r-1,s+1)(s,r)=1$$

(2) より $(s,r)=-(r,s)$ であるから，上式は (5) に同値である。 □

(定理 2-3 の証明)

[71; Theorem 3.10] に従う。

まず，任意の $s\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ に対して次が成り立つ：

$$(2.4)\qquad \begin{cases}(0,s)=f_s,\\ (1,s)=g_s.\end{cases}$$

任意の $s\in\{1,\ldots,n\}$ に対して，補題 2-5(3) より

$$(s-1,s)=1$$

である。

与えられた CCF Γ において c_i を通る対角線上の数字を第 0 行から順に $f_{i-1,i-1}=0$，$f_{i-1,i}=1$，$f_{i-1,i+1}=c_i$，$f_{i-1,i+2},\ldots,f_{i-1,i+n-3}$，$f_{i-1,i+n-2}=1$，$f_{i-1,i+n-1}=0$ と名付ける。

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
\hline
 & & f_{r-1,r+1} & & f_{r,r+2} & & & & & \\
 & & & f_{r-1,r+2} & & f_{r,r+3} & & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & f_{r,s} & & \\
 & & & & & & f_{r-1,s} & & f_{r,s+1} & \\
 & & & & & & & f_{r-1,s+1} & & \ddots \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & f_{r-1,r+n-3} \\
\hline
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

任意の $r, s \in \{0, 1, \dots, n\}$, $r \leq s$ に対して

$$f_{r,s} = (r, s) \tag{2.5}$$

が成り立つ。

$\because$)

r に関する帰納法で示す。(2.4) により $r = 0, 1$ のときには正しい。

$r \in \{1, \dots, n-1\}$ とし，任意の $k \in \{r-1, \dots, n\}$ に対して $f_{r-1,k} = (r-1, k)$ であると仮定する。

$f_{r,r} = 0 = (r, r)$ である。$s \in \{r, \dots, n-1\}$ とし，$f_{r,s} = (r, s)$ であると仮定すると，ユニモジュラー規則により，

$$f_{r-1,s} f_{r,s+1} - f_{r,s} f_{r-1,s+1} = 1$$

であるから，

$$(r-1, s) f_{r,s+1} - (r, s)(r-1, s+1) = 1$$

となる。補題 2-5(5) より

$$(r-1, s)(r, s+1) - (r, s)(r-1, s+1) = 1$$

であるから，$(r-1, s) f_{r,s+1} = (r-1, s)(r, s+1)$ を得る。$(r-1, s) = f_{r-1,s} \neq 0$ であるから，$f_{r,s+1} = (r, s+1)$ である。よって，任意の $k \in \{r+1, \dots, n\}$ に対して $f_{r,k} = (r, k)$ である $\square$

特に，任意の $s \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$c_s = (s-1, s+1) \tag{2.6}$$

である。補題 2-5(4) において $x=s-1,\ y=s+1,\ z=0,\ w=s$ とおくことにより

$$c_s=(s-1,s+1)=\frac{-(s-1,0)(s,s+1)-(s-1,s)(s+1,0)}{(0,s)}=\frac{(0,s-1)+(0,s+1)}{(0,s)}$$

を得る (最後の等号では補題 2-5(2),(3) を使った)。上式の右辺は (2.4) により

$$\frac{f_{s-1}+f_{s+1}}{f_s}$$

に等しいから，

$$a_s f_s = f_{s-1}+f_{s+1}$$

であること，すなわち，離散 Sturm-Liouville 方程式が導かれた。 □

次に，定理 2-2 を証明する。

(定理 2-2(3) の証明)

与えられた CCF の幅は $(n-3)\ (\geq 1)$ であるとし，その第 2 行に並ぶ数を順次取り出して数列 $\{c_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を作る。さらに，有限数列 $\{f_i\}_{i=1}^{n-1}$ を $f_2=c_1$ から始めて c_1 を通る対角線上の数を右下に向かって順次取り出して作ったものとする。$f_0=0,\ f_1=1,\ f_{n-1}=1,\ f_n=0$ とすると，定理 2-3 より，

$$f_{i+1}=c_i f_i - f_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

が成り立つ。任意の i に対して $c_i\geq 2$ であると仮定する。このとき，

$$f_{i+1}\geq 2f_i - f_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

であるから，

$$f_{i+1}-f_i\geq f_i - f_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

となる。これを繰り返し用いて，

$$-1=f_n-f_{n-1}\geq f_1-f_0=1$$

を得る。これは矛盾した式である。よって，$c_i=1$ となる i が存在する。 □

注意. 第 2 行に並ぶ数字の 1 の前後の数字は 1 より真に大きい。

(証明)

$(n-3)\ (\geq 4)$ を CCF の幅とする。もし，1 が連続して並んだとし，$c_s=c_{s+1}=1$ であるとする。ユニモジュラー条件から，r をある正の整数として $c_s c_{s+1}-1\cdot r=1$ となる。これから $r=0$ が得られてしまうので，矛盾である。よって，$c_s=1$ ならば $c_{s-1}>1,\ c_{s+1}>1$ である。 □

幅が $(n-3)\ (\geq 1)$ の（正の整数が配置された）CCF において，$f_{i,j}\ (i\in\mathbb{Z},\ i\leq j\leq i+n)$ を定理 2-3 の証明の中のように決める。また，便宜上 $f_{i,i-1}=-1\ (i\in\mathbb{Z})$ と約束しておく。

補題 2-6 $x \le z \le y \le w \le x+n$ を満たす任意の $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ に対して次の等式が成り立つ：

$$f_{x,y}f_{z,w} - f_{x,z}f_{y,w} - f_{x,w}f_{z,y} = 0. \tag{2.7}$$

(証明)

$x \le z \le y \le w \le x+n$ という前提のもとで，(2.7) の左辺に現れる $f_{x,y}$，$\ldots, f_{z,y}$ はすべて意味を持つことに注意する。

与えられた CCF の第 2 行に並ぶ数を順次取り出して作られる数列 $\{c_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ の番号を

$$c'_i := c_{x+i} \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

のようにずらして数列 $\{c'_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を作る。この数列に基づいて定理 2-3 のように作られる有限数列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$，$\{g_i\}_{i=0}^{n}$ をそれぞれ $\{f'_i\}_{i=0}^{n}$，$\{g'_i\}_{i=0}^{n}$ と記し，さらに，数列 $\{c'_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ に基づいて定理 2-3 の証明のように定義される $f_{i,j}$ $(i \in \mathbb{Z},\ i \le j \le i+n)$ を $f'_{i,j}$ と記すことにする。このとき，

$$\begin{aligned} f'_i &= f_{x,x+i} \qquad (0 \le i \le n), \\ g'_i &= f_{x,x+i} \qquad (0 \le i \le n), \\ f'_{i,j} &= f_{x+i,x+j} \qquad (i \in \mathbb{Z},\ i \le j \le i+n) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$x \le z \le y \le w \le x+n$ のとき

- $0 \le y-x \le n$ より $f_{x,y} = f'_{0,y-x}$.
- $z-x \le w-x \le z-x+n$ より $f_{z,w} = f'_{z-x,w-x}$.
- $0 \le z-x \le n$ より $f_{x,z} = f'_{0,z-x}$.
- $y-x \le w-x \le y-x+n$ より $f_{y,w} = f'_{y-x,w-x}$.
- $0 \le w-x \le n$ より $f_{x,w} = f'_{0,w-x}$.
- $z-x \le y-x \le z-x+n$ より $f_{z,y} = f'_{z-x,y-x}$.

であるから，(2.7) が成り立つことを示すためには

$$f'_{0,y-x}f'_{z-x,w-x} - f'_{0,z-x}f'_{y-x,w-x} - f'_{0,w-x}f'_{z-x,y-x} = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つことを示せばよい。

$r, s \in \{0, \ldots, n\}$ に対して $(r,s)'$ を

$$(r,s)' := f'_r g'_s - g'_r f'_s$$

と定める。$0, y-x, z-x, w-x \in \{0, \ldots, n\}$ であるから補題 2-5(4),(2) より，

$$\begin{aligned} &(0, y-x)'(z-x, w-x)' \\ &- (0, z-x)'(y-x, w-x)' \\ &- (0, w-x)'(z-x, y-x)' = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

が成り立つ。さらに定理 2-3 の証明より，

$$(0, y-x)' = f'_{0,y-x}, \qquad (z-x, w-x)' = f'_{z-x,w-x},$$
$$(0, z-x)' = f'_{0,z-x}, \qquad (y-x, w-x)' = f'_{y-x,w-x},$$
$$(0, w-x)' = f'_{0,w-x}, \qquad (z-x, y-x)' = f'_{z-x,y-x}$$

が成り立つ。これらを (2.9) に代入すれば (2.8) が得られるから，(2.7) は示された。 □

(定理 2- 2(1) の証明)

証明は [71; Corollary 3.11] に従う。

$f_{i,j}$ $(i \in \mathbb{Z},\ i \leq j \leq i+n)$ を定理 2-3 の証明の中のように決める。

$$f_{r,s} = f_{s,r+n} \qquad (r \leq s \leq r+n) \tag{2.10}$$

を示す。

$s = r$ のとき $f_{r,s} = f_{r,r} = 0,\ f_{s,r+n} = f_{r,r+n} = 0$ であるから (2.10) が成り立つ。

$r < s \leq r+n$ のときを考える。補題 2-6 において $x = r,\ y = s,\ z = r+1,\ w = r+n$ を代入すると，

$$f_{r,s} f_{r+1,r+n} - f_{r,r+1} f_{s,r+n} - f_{r,r+n} f_{r+1,s} = 0$$

となる。$f_{r,r+1} = 1,\ f_{r,r+n} = 0,\ f_{r+1,r+n} = 1$ であるから，上式は

$$f_{r,s} - f_{s,r+n} = 0$$

に同値である。よって，(2.10) が成り立つ。

(2.10) をもう一度適用して

$$f_{s,r+n} = f_{r+n,s+n} \qquad (s \leq r+n \leq s+n)$$

を得る。(2.10) と合わせて

$$f_{r,s} = f_{r+n,s+n} \qquad (r \leq s \leq r+n) \tag{2.11}$$

となることがわかる。与えられた Conway-Coxeter フリーズの第 $(i+1)$ 行の数字は

$$\ldots\ldots, f_{-1,i},\ f_{0,i+1},\ f_{1,i+2}, \ldots,\ f_{k,i+k+1},\ \ldots\ldots\ f_{k+n,i+k+n+1},\ \ldots\ldots$$

のように並んでいるから，(2.11) によりこの数列には n を周期として同じ数が繰り返し表われることがわかる。 □

(定理 2- 2(2) の証明)

上の証明中の (2.10) から従う。 □

定理 2-3 より，CCF において 1 つの対角線上に並ぶ数の列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ は $\dfrac{f_{i-1} + f_{i+1}}{f_i} \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を満たすことがわかる。逆に，この性質を満たす有限列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ (但し，$f_0 = f_n = 0,\ f_1 = f_{n-1} = 1$) が与えられると，これによって CCF が定まる。すなわち，

定理 2-7 $n \geq 4$ とする。有限列 $\{f_i\}_{i=0}^n$ は次を満たしているとする。

① $f_0 = f_n = 0,\ f_1 = f_{n-1} = 1,$

② 任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して $f_i \in \mathbb{N},$

③ 任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して $\dfrac{f_{i-1}+f_{i+1}}{f_i} \in \mathbb{N}.$

このとき，対角線上に連続して並ぶ有限列が $f_1 = 1, f_2, \ldots, f_{n-2}, f_{n-1} = 1$ であるような位数 n の Conway-Coxeter フリーズが定まる。

(**証明**)

● g_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ を以下のように帰納的に定義する：まず，$g_1 := 0,\ g_2 := 1$ と定義する。g_{i-1} が定義されたとき，g_i を $f_{i-1}g_i - f_i g_{i-1} = 1$ を満たすように定義する (注：この時点では $g_i \in \mathbb{Q}$ までしかわからない)。これにより，$g_3, \ldots, g_n$ が定まる。g_{n+1} については $g_{n+1} := 0$ と定義する。有限列 $\{g_{i+1}\}_{i=0}^n$ は再び①,②,③を満たすことを示す。

$$g_n = \frac{1 + f_n g_{n-1}}{f_{n-1}} = \frac{1+0}{1} = 1$$

であるから，①は満たされる。

②,③が満たされることを示す。任意の $i \in \{1, \ldots, n-2\}$ に対して，ユニモジュラー規則により

$$\frac{g_i + g_{i+2}}{g_{i+1}} = \frac{g_i + \dfrac{1 + f_{i+2}g_{i+1}}{f_{i+1}}}{g_{i+1}} = \frac{f_{i+1}g_i + 1 + f_{i+2}g_{i+1}}{f_{i+1}g_{i+1}} = \frac{\dfrac{f_{i+1}g_i + 1}{g_{i+1}} + f_{i+2}}{f_{i+1}}$$

$$(*1) \qquad = \frac{f_i + f_{i+2}}{f_{i+1}}$$

となるから，$\dfrac{g_i + g_{i+2}}{g_{i+1}} \in \mathbb{N}$ である。$i = n-1$ のときには

$$\frac{g_{n-1} + g_{n+1}}{g_n} = \frac{g_{n-1} + 0}{1} = g_{n-1}$$

となるので，②が満たされることを示せば③も満たされることがわかる。

$$\frac{g_i + g_{i+2}}{g_{i+1}} =: c_{i+1} \qquad (i \in \{1, \ldots, n-2\})$$

とおくと $(*1)$ より，$a_{i+1} \in \mathbb{Z}$ であり，

$$g_{i+2} = c_{i+1}g_{i+1} - g_i \qquad (i \in \{1, \ldots, n-2\})$$

と書ける。$g_2, g_1 \in \mathbb{Z}$ であるから，帰納法を用いて $g_3, \ldots, g_n$ はすべて整数であることがわかる。

$i \in \{2, \ldots, n\}$ に対して $f_{i-1}, f_i > 0$ であり

$$g_i = \frac{1 + f_i g_{i-1}}{f_{i-1}}$$

と表わされるから，帰納法を用いて $g_2, g_3, \ldots, g_n$ はすべて正であることがわかる。これで，$g_2, g_3, \ldots, g_n \in \mathbb{N}$ が示された。

以上より，$\{g_{i+1}\}_{i=0}^n$ は①,②,③を満たすことが示された。

• h_i $(i=-1,0,\dots,n-1)$ を以下のように帰納的に定義する：まず，$h_{n-1}:=0$, $h_{n-2}:=1$ と定義する。h_{i+1} が定義されたとき，h_i を $h_i f_{i+1} - h_{i+1} f_i = 1$ を満たすように定義する。これにより，$h_{n-3}, h_{n-4}, \dots, h_0$ が定まる。h_{-1} については $h_{-1}:=0$ と定義する。有限列 $\{h_{i-1}\}_{i=0}^{n}$ は再び①,②,③を満たすことを示す。

$$h_0 = \frac{1+f_0h_1}{f_1} = \frac{1+0}{1} = 1$$

であるから，①は満たされる。

任意の $i \in \{2,\dots,n\}$ に対して，ユニモジュラー規則により

$$\frac{h_{i-2}+h_i}{h_{i-1}} = \frac{\dfrac{1+f_{i-2}h_{i-1}}{f_{i-1}}+h_i}{h_{i-1}} = \frac{1+f_{i-2}h_{i-1}+f_{i-1}h_i}{f_{i-1}h_{i-1}} = \frac{f_{i-2}+\dfrac{1+f_{i-1}h_i}{h_{i-1}}}{f_{i-1}}$$

$$(*2) \qquad = \frac{f_{i-2}+f_i}{f_{i-1}}$$

となるから，$\dfrac{h_{i-2}+h_i}{h_{i-1}} \in \mathbb{N}$ である。$i=1$ のときには

$$\frac{h_{-1}+h_1}{h_0} = \frac{0+h_1}{1} = h_1$$

となるので，②が満たされることを示せば③も満たされることがわかる。

$$\frac{h_{i-2}+h_i}{h_{i-1}} =: b_{i-1} \qquad (i \in \{2,\dots,n\})$$

とおくと $(*2)$ より，$b_{i-1} \in \mathbb{Z}$ であり

$$h_{i-2} = b_{i-1}h_{i-1} - h_i \qquad (i \in \{2,\dots,n\})$$

と書ける。$h_{n-1}, h_{n-2} \in \mathbb{Z}$ であるから，帰納法を用いて $h_{n-3}, h_{n-4}, \dots, h_0$ はすべて整数であることがわかる。

$i \in \{1,\dots,n-2\}$ に対して $f_{i+1}, f_i > 0$ であり，$h_{n-2} = 1 > 0$ であり，

$$h_i = \frac{1+f_ih_{i+1}}{f_{i+1}}$$

と表わされるから，帰納法を用いて $h_{n-3}, h_{n-4}, \dots, h_1$ はすべて正であることがわかる。これで，$h_0, h_1, \dots, h_{n-2} \in \mathbb{N}$ が示された。

以上より，$\{h_{i-1}\}_{i=0}^{n}$ は①,②,③を満たすことが示された。

以上より，有限列 $\{f_i\}_{i=0}^{n}$ を対角線上に配置すると，その両隣りの対角線上にユニモジュラー規則を満たすように整数が定まり，それらは左上から右下へ 0,1 から始まって 1,0 で終わり，その途中はすべて正の数になっていることがわかる。これを繰り返すことですべての場所の数が埋まり，できあがったフリーズは CCF であるための条件を満たしていることがわかる。 □

● 2-4：CCF から正多角形の分割へ

さて，正 n 角形の三角形分割から幅が $(n-3)$ の CCF が構成されたが，逆に，幅が $(n-3)$ の CCF から，正 n 角形の三角形分割を読み取ることができる。次に，その方法を説明しよう [32,33]。

例 2-8

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
···		2		4		1		2		3		2		2		1		6		1		2		···
	1		7		3		1		5		5		3		1		5		5		1		7	
···		3		5		2		2		8		7		1		4		4		4		3		···
	11		2		3		3		3		11		2		3		3		3		11		2	
···		7		1		4		4		4		3		5		2		2		8		7		···
	5		3		1		5		5		1		7		3		1		5		5		3	
		2		2		1		6		1		2		4		1		2		3		2		···
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

このCCFに現れる数字の中の最大数である 11 に着目し，その数を通る左上から右下に伸びる直線を引く。さらに，その左隣りに直線を引き，それらの 2 直線から分数列を取り出す。

11 を通る直線の選び方は 2 通りある。

①

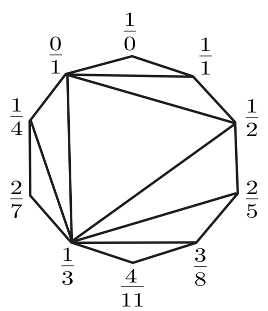
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
···		2		4		1		2		3		2		2		1		6		1		2		···
	1		7		3		1		5		5		3		1		5		5		1		7	
···		3		5		2		2		8		7		1		4		4		4		3		···
	11		2		3		3		3		11		2		3		3		3		11		2	
···		7		1		4		4		4		3		5		2		2		8		7		···
	5		3		1		5		5		1		7		3		1		5		5		3	
		2		2		1		6		1		2		4		1		2		3		2		···
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

の場合，対応する分数列は次のようになる：

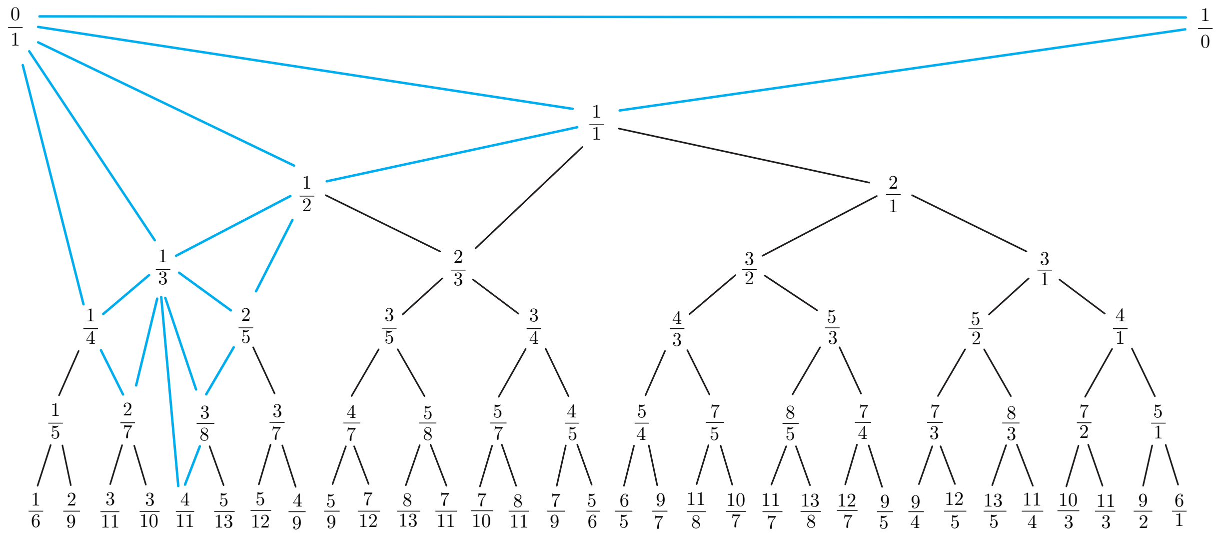
$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{4},\ \frac{0}{1}$$

この分数列をもとに，正 10 角形の三角形分割を作ると次のようになる。

(⋆)



分母が極大 (あるいは分子が極大と言っても同じ) となる値は 11 と 7 であり，分数列からその部分を取り出すと $\frac{4}{11}$ と $\frac{2}{7}$ となる。上の正 10 角形の三角形分割は $\mathrm{YAT}\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{11}\right)$ に一致している：



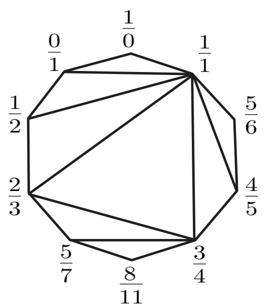
②

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
⋯		2		4		1		2		3		2		2		1		6		1		2		⋯
	1		7		3		1		5		5		3		1		5		5		1		7	
⋯		3		5		2		2		8		7		1		4		4		4		3		⋯
	11		2		3		3		3		11		2		3		3		3		11		2	
⋯		7		1		4		4		4		3		5		2		2		8		7		⋯
	5		3		1		5		5		1		7		3		1		5		5		3	
		2		2		1		6		1		2		4		1		2		3		2		⋯
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

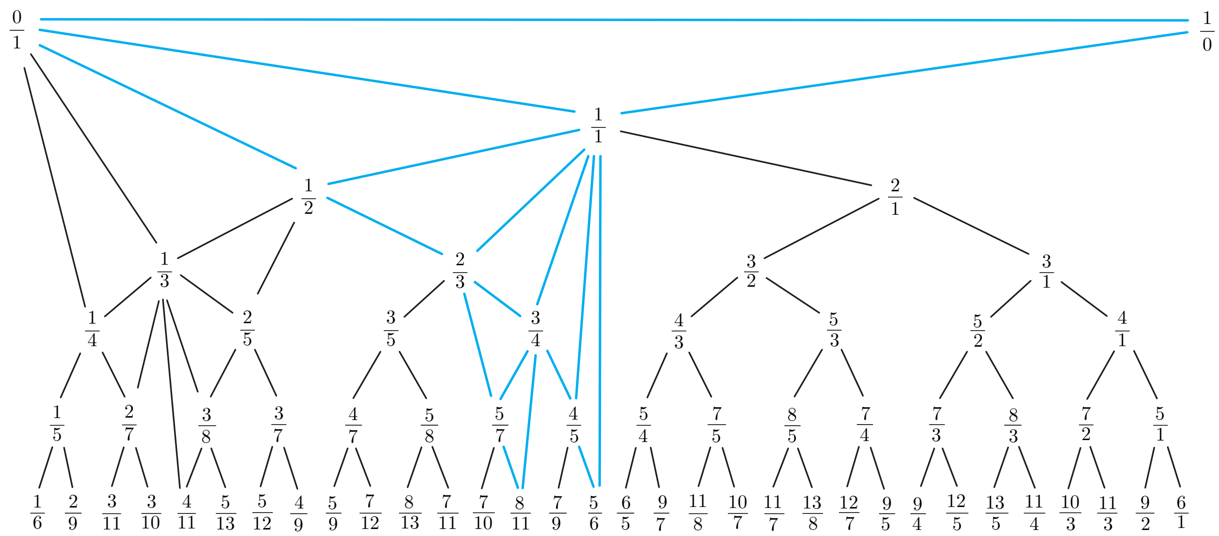
の場合，対応する分数列は次のようになる：

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{8}{11},\ \frac{5}{7},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{1}$$

この分数列をもとに，正 10 角形の三角形分割を作ると次のようになる。



分母が極大となる値は 6 と 11 であり，分数列からその部分を取り出すと $\frac{5}{6}$ と $\frac{8}{11}$ となる。上の正 10 角形の三角形分割は $\mathrm{YAT}\left(\frac{8}{11}, \frac{5}{6}\right)$ に一致している：



①と②の両方とも，最大数を分母にしているため，現れる分数は $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{0}$ を除いて 1 より小さくなることに注意。

なお，②で取り出した分数列は①で注目した「11」からも取り出すことができる。この場合，11 を通る直線を右上から左下に伸びるようにとり，その直線とその左隣の直線上の整数で分数を構成すればよい。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
…		2		4		1		2		3		2		2		1		6		1		2		…
	1		7		3		1		5		5		3		1		5		5		1		7	
…		3		5		2		2		8		7		1		4		4		4		3		…
	11		2		3		3		3		11		2		3		3		3		11		2	
…		7		1		4		4		4		3		5		2		2		8		7		…
	5		3		1		5		5		1		7		3		1		5		5		3	
		2		2		1		6		1		2		4		1		2		3		2		…
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

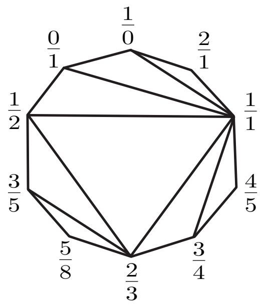
注意 2-9　最大数 11 を通らない直線上から数を取り出しても祖先三角形が得られる。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
…		2		4		1		2		3		2		2		1		6		1		2		…
	1		7		3		1		5		5		3		1		5		5		1		7	
…		3		5		2		2		8		7		1		4		4		4		3		…
	11		2		3		3		3		11		2		3		3		3		11		2	
…		7		1		4		4		4		3		5		2		2		8		7		…
	5		3		1		5		5		1		7		3		1		5		5		3	
		2		2		1		6		1		2		4		1		2		3		2		…
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

上記の 2 直線から得られる分数列は次のようになる。

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{1}$$

この分数列をもとに，正 10 角形の三角形分割を作ると次のようになる。

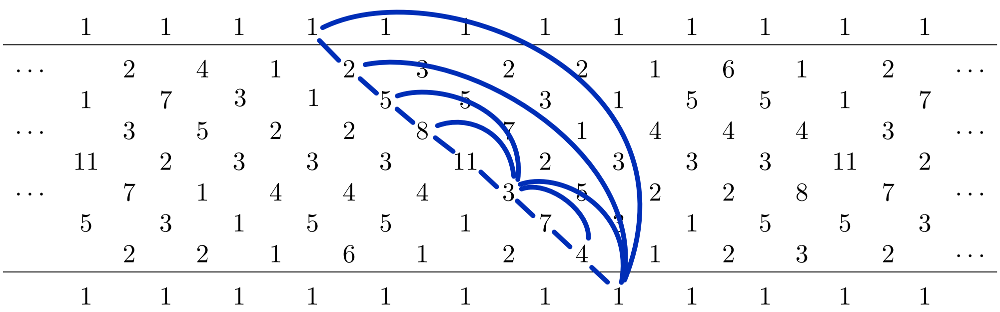


分子が極大となる値は（左から 2 番目の）2 と 4 と 5 であり，分数列からその部分を取り出すと $\frac{2}{1}$ と $\frac{4}{5}$ と $\frac{5}{8}$ となる。上の正 10 角形の三角形分割は $\mathrm{YAT}\left(\frac{5}{8},\frac{4}{5},\frac{2}{1}\right)$ に一致している。

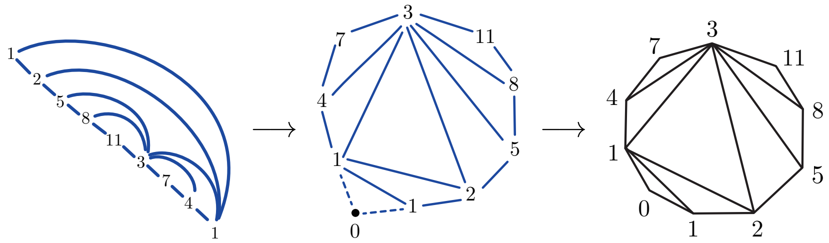
①の $\mathrm{YAT}\left(\frac{3}{7},\frac{4}{11}\right)$, ②の $\mathrm{YAT}\left(\frac{8}{11},\frac{5}{6}\right)$ と $\mathrm{YAT}\left(\frac{5}{8},\frac{4}{5},\frac{2}{1}\right)$ は回転により移り合う。実際，どの隣り合う 2 直線を選んでも正 10 角形の同じ三角形分割が得られる。これは，正多角形の三角形分割から CCF を構成する方法を思い出すとからわかる。 □

(⋆) は次のように直接作ることができる。

CCF において，左上から右下に伸びる斜めの直線で最大の数を含むものを選ぶ。その直線上に並ぶ数字で，最大の数の両隣の数を弧で結ぶ。次に，両隣の数のうち，大きな数の方について，直線上に並ぶ数字のうち和がその数になる 2 数を弧で結ぶ。この操作を次々に繰り返すと，CCF の上に次のような線で結ばれた図形を描くことができる。



この図形を多角形の形に整形し，0 の番号を持つ頂点を 1 と 1 の間に付け加えることで，8 角形の三角形分割が得られる。



これは，最初に与えた 10 角形の三角形分割 $(\star)$ と同じであり，番号の付け方のルールとぴったり合っている。このように，幅 $(n-3)$ の CCF が与えられると，それに応じて正 n 角形の三角形分割を得ることができる。定理としてまとめておくと，次の結果が成り立つ。

定理 2-10 (Conway and Coxeter) 正 n 角形の三角形分割の全体と幅 $(n-3)$ の Conway-Coxeter フリーズの全体との間に 1 対 1 対応が存在する。ここで，正 n 角形の三角形分割については，回転で移り合うものは同一視し，幅 $(n-3)$ の Conway-Coxeter フリーズについては，平行移動で同じ配列となるものは同一視して扱う。 □

与えられた CCF から，幅が 1 少ない CCF を作ることができる。

補題 2-11 $n \geq 4$ とし，位数が $(n+1)$ の Conway-Coxeter フリーズ $\mathit{\Gamma}$ が与えられているとする。その第 2 行から連続する $(n+1)$ 項の数を選び，$c_0, c_1, \ldots, c_n$ と名付ける。定理 2-2(3) より $c_0 = c_n$ であり，$c_0, c_1, \ldots, c_n$ の中に 1 が必ず存在する。$c_s = 1$ $(s \in \{1, \ldots, n-1\})$ であるとする。このとき，位数が n の Conway-Coxeter フリーズであって，第 2 行に連続する n 個の数が $c_0, \ldots, c_{s-2}, c_{s-1} - 1, c_{s+1} - 1, c_{s+2}, \ldots, c_n$ となるものが定まる。

(証明)

証明は [17; §4] に従う。

いつものように，c_1 を通る対角線 (= 左上から右下に引いた線) 上に並ぶ数字を取り出して有限列 $\{f_i\}_{i=0}^n$ を作る。但し，$f_2 = c_1$ である。すると，定理 2-3 より

$$f_{i+1} = c_i f_i - f_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

が成り立つから，$\{f_i\}_{i=0}^n$ は定理 2-7 の①, ②, ③を満たす。今，有限列 $\{f'_i\}_{i=0}^n$ を次で定義する：

$$f'_i = \begin{cases} f_i & (0 \leq i \leq s-1), \\ f_{i+1} & (s \leq i \leq n). \end{cases}$$

$\{f'_i\}_{i=0}^n$ もまた定理 2-7 の 3 条件を満たす。これを確かめる。

①, ②は明らかに満たされる。

③を満たしていることを確かめる。

$1 \leq i < s-1$ の場合，$\dfrac{f'_{i-1} + f'_{i+1}}{f'_i} = \dfrac{f_{i-1} + f_{i+1}}{f_i} = c_i \in \mathbb{N}$ である。

$i = s-1$ の場合，$c_s = 1$ であるから

$$f_{s+1} = c_s f_s - f_{s-1} = f_s - f_{s-1}$$

である。よって，

$$\frac{f'_{s-2} + f'_s}{f'_{s-1}} = \frac{f_{s-2} + f_{s+1}}{f_{s-1}} = \frac{f_{s-2} + f_s - f_{s-1}}{f_{s-1}} - 1 + \frac{f_{s-2} + f_s}{f_{s-1}} = -1 + c_{s-1}$$

である。$c_s = 1$ なので，ユニモジュラー規則より $c_{s-1} \geq 2$ でなければならない。よって，

$$\frac{f'_{s-2} + f'_s}{f'_{s-1}} = -1 + c_{s-1} \in \mathbb{N}$$

である。

$i = s$ の場合，上と同様に，$f_{s+1} = f_s - f_{s-1}$ と $c_{s+1} \geq 2$ でなければならないことを用いて

$$\frac{f'_{s-1} + f'_{s+1}}{f'_s} = -1 + c_{s+1} \in \mathbb{N}$$

を得る。

$s+1 \leq i \leq n-1$ の場合，

$$\frac{f'_{i-1} + f'_{i+1}}{f'_i} = \frac{f_i + f_{i+2}}{f_{i+1}} = c_{i+1} \in \mathbb{N}$$

である。

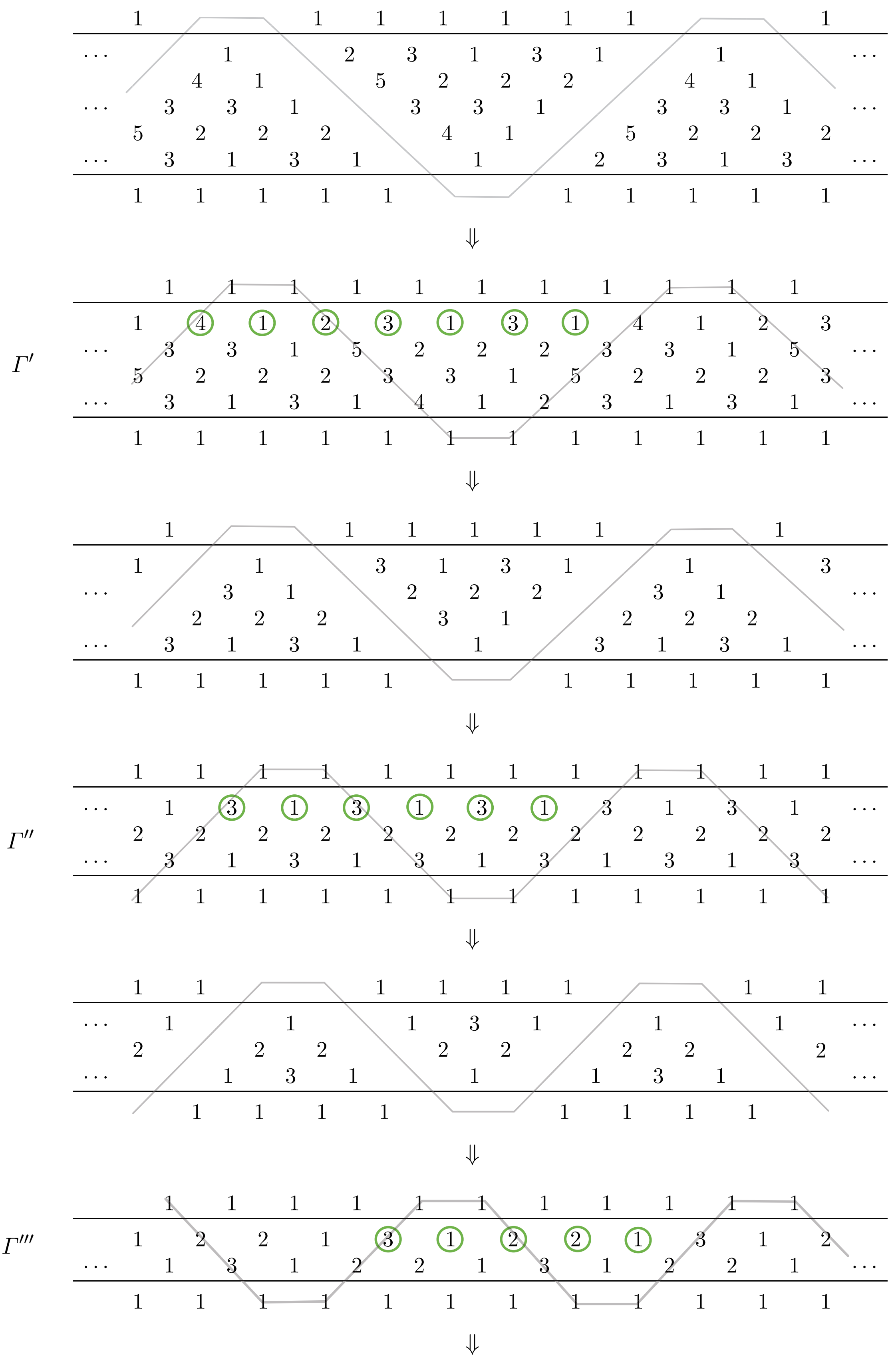
以上より，$\{f'_i\}_{i=0}^n$ は定理 2-7 の 3 条件を満たすことが確かめられた。したがって，対角線上に連続して並ぶ有限列が $f'_1 = 1, f'_2, \ldots, f'_{n-2}, f'_{n-1} = 1$ であるような位数 n の Conway-Coxeter フリーズ $\varGamma'$ が定まる。この Conway-Coxeter フリーズ $\varGamma'$ は，③を満たしていることの確認の結果および定理 2-3 より，第 2 行に連続する n 個の数が $c_0, \ldots, c_{s-2}, c_{s-1}-1, c_{s+1}-1, c_{s+2}, \ldots, c_n$ となるものになっている。 □

例 2-12 Conway-Coxeter フリーズ $\varGamma$ から補題 2-11 の操作で得られる Conway-Coxeter フリーズを $\varGamma'$ とおく。このとき，$\varGamma$ から $\varGamma'$ を得る操作は，$\varGamma$ における「正弦曲線」を取り除く操作として実現される [29, 32, 33]。

下の図の Conway-Coxeter フリーズ $\varGamma$ では，$n = 5 + 3 = 8$ である。緑の円で囲んだ数字を左から順に $c_0, c_1, \ldots, c_7$ とおく。$c_1 = 1$ であるので，$s = 1$ として，補題 2-11 の操作を適用し，Conway-Coxeter フリーズを $\varGamma'$ を作る。すると，2 行目に並ぶ数字は $4(= 5 - 1), 1(= 2 - 1), 2, 3, 1, 3, 1$ の繰り返しとなる。

$$\varGamma\quad
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
\hline
\cdots & & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & & \cdots \\
 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & \\
\cdots & & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & 7 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \cdots \\
 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & 4 & & 4 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 2 & & \\
\cdots & & & 3 & & 1 & & 3 & & 1 & & 5 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 3 & & & \cdots \\
\hline
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

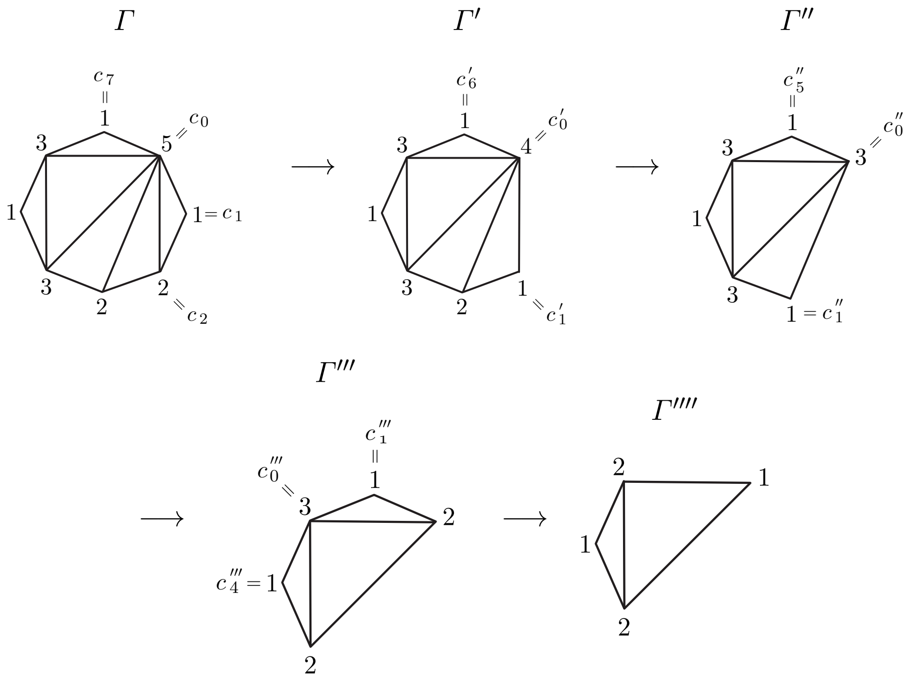

Γ'
Γ''
Γ'''

				1		1		1						1		1		1						
	1				2		1				1				2		1				1			
$\cdots$		1				1				2		1				1				2		1		$\cdots$
	1		1						1		1		1						1		1		1	

$$\Downarrow$$

		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	
Γ''''	$\cdots$		1		2		1		2		1		2		1		2		1		2		1		$\cdots$
		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1	

CCF に対する上記の操作は，凸多角形に対して以下の操作を行うことに対応している。



● 2-5：ジグザグ型 CCF と LR 語と開区間 $(0,1)$ 内の有理数

定義 2-13 Conway-Coxeter フリーズにおいて，第 2 行から第 $(n-2)$ 行まで 1 が連続して繋がった列が存在するとき，その Conway-Coxeter フリーズは**ジグザグ型** (zigzag-type) と呼ばれる。

例 2-14 次の CCF はジグザグ型である。

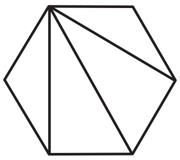
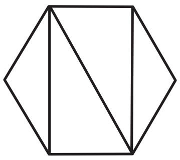
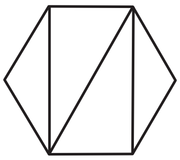
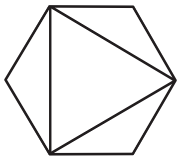
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1
$\cdots$		3		1		2		5		1		2		2		2		3	
	5		2		1		9		4		1		3		3		5		$\cdots$
$\cdots$		3		1		4		7		3		1		4		7		3	
	4		1		3		3		5		2		1		9		4		$\cdots$
$\cdots$		1		2		2		2		3		1		2		5		1	
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1

この場合，第 2 行に並ぶ 1 と 1 で挟まれた有限列 “2, 5” は $[2,5]^- = \dfrac{9}{5}$ と関連づけられ，有限列 “2, 2, 2, 3” は $[2,,2,2,3]^- = \dfrac{9}{7}$ と関連づけられる。

一方，次の CCF はジグザグ型でない。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
\cdots & & 4 & & 1 & & 2 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 6 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
 & 7 & & 3 & & 1 & & 5 & & 5 & & 3 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & 7 & \\
\cdots & & 5 & & 2 & & 2 & & 8 & & 7 & & 1 & & 4 & & 4 & & 4 & & 3 & & \cdots \\
 & 2 & & 3 & & 3 & & 3 & & 11 & & 2 & & 3 & & 3 & & 3 & & 11 & & 2 & \\
\cdots & & 1 & & 4 & & 4 & & 4 & & 3 & & 5 & & 2 & & 2 & & 8 & & 7 & & \cdots \\
 & 3 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & 5 & & 5 & & 3 & \\
\cdots & & 2 & & 1 & & 6 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 3 & & 2 & & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}
$$

演習 2-1 次の正 6 角形の各三角形分割に対して，対応する CCF を作れ。そのうち，ジグザグ型となるものはどれか？

①  ②  ③  ④ 

ジグザグ型における，第 2 行から第 $(n-2)$ 行までの 1 が連続して繋がった列は LR 語 [33] を用いて記述すると便利である。

LR 語とは文字 L と R から作られる有限列のことである。幅 $(n-3)$ のジグザグ型 CCF $\varGamma$ から，第 2 行から第 $(n-2)$ 行までの 1 が連続して繋がった列を見たときに，第 i 行の 1 の左下に第 $(i+1)$ 行の 1 があるとき L を，右下に第 $(i+1)$ 行の 1 があるとき R を対応させることにより，長さ $(n-4)$ の LR 語 w が定まる。但し，CCF の映進対称性により，w ともう一つの LR 語（L と R を置き換えて，順番を逆にした列）も対応する。これを $\underline{\mathtt{ir}}(w)$ により表わす。このように，ジグザグ型 CCF $\varGamma$ から LR 語の組 $\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}$ が定まる。

例 2-15 次の CCF に対応する LR 語は $w = \mathrm{LLLR}$ と $\underline{\mathtt{ir}}(w) = \mathrm{LRRR}$ である。

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
\hline
\cdots & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & \cdots \\
 & 3 & & 1 & & 4 & & 9 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 3 & & 1 & & 4 & & \\
\cdots & & 1 & & 3 & & 7 & & 4 & & 1 & & 3 & & 7 & & 4 & & 1 & & 3 & & 7 & \cdots \\
 & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 3 & & 1 & & 4 & & 9 & & 1 & & 2 & & 5 & & \\
\cdots & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 5 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

逆に，LR 語 w からジグザグ型 CCF CCF(w) が次のように定まる。$w = \mathrm{LLLR}$ の場合を考える。CCF(w) の幅は語の長さより 1 つ多い 5 である。まず，1 を 2 つの水平線の間に次のルールで配置していく。上の水平線のすぐ下の行適当な位置に 1 を置く。次に，語 w に並んでいる L と R の順番に従って下の行に順次 1 を置いていく。L の場合は左下に，R の場合は右下に 1 を置く。$w = \mathrm{LLLR}$ の場合は次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\cdots & & & & 1 & & & & & & & & & & \cdots \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
\cdots & & 1 & & & & & & & & & & & & \cdots \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & & 1 & & & & & & & & & & & & \cdots \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

あとは，ダイヤモンド型に位置する隣接する 4 つの数がユニモジュラー規則を満たすように数を埋めていくと，Conway-Coxeter フリーズ $\mathrm{CCF}(w)$ が得られる。この CCF は先ほどの例で与えた Γ に一致する。また，すぐにわかるように，$\underline{\mathtt{ir}}(w) = \mathrm{LRRR}$ を用いても同じ CCF が得られる。

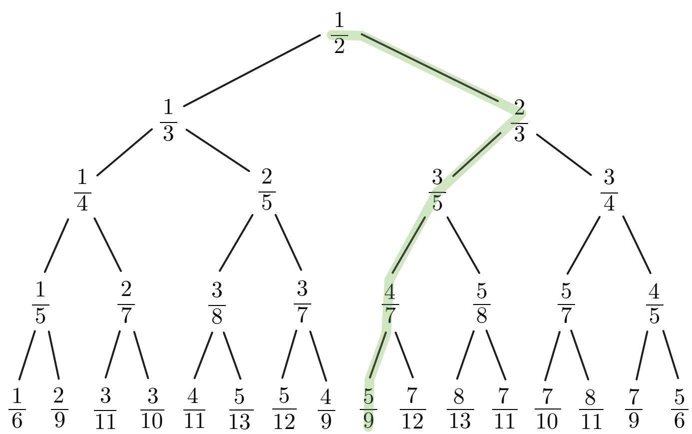
LR 語から 1 未満の正の有理数が構成され，逆も成り立つ。つまり，LR 語の全体と開区間 $(0,1)$ 内の有理数の全体とは 1 対 1 に対応する [32,33]。その対応を説明しよう。

$(0,1)$ 内の有理数 α に対応する LR 語 $w(\alpha)$ は次のように定義される。$\dfrac{1}{2}$ から出発し α へ至る Stern-Brocot 木上の道を考えると，左へ進む場合に L を対応させて，右へ進む場合に R を対応させることにより LR 語が定まる。この語の順番を右から左に向かって並べ直したものを $w(\alpha)$ と定める。

例 2-16 $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = \emptyset$, $w\left(\dfrac{1}{5}\right) = \mathrm{LLL} = \mathrm{L}^3$, $w\left(\dfrac{2}{7}\right) = \mathrm{RLL} = \mathrm{RL}^2$, $w\left(\dfrac{3}{8}\right) = \mathrm{LRL}$, $w\left(\dfrac{3}{7}\right) = \mathrm{RRL}$.

逆に，LR 語 w から開区間 $(0,1)$ 内の有理数を求めるには，まず w の逆語を作り，その逆語における L, R の並びに沿って Stern-Brocot 木の $\dfrac{1}{2}$ から出発して道を辿っていき，どの有理数に行き着くのかを調べればよい。こうして，LR 語の全体と $(0,1)$ 内の有理数の全体とは 1 対 1 に対応することがわかる。

例 2-17
$w = \mathrm{LLLR}$ に対応する有理数は，Stern-Brocot 木において $\dfrac{1}{2}$ から $\mathrm{R} \to \mathrm{L} \to \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ の順でたどって行くことで，$\dfrac{5}{9}$ である。なお，この道が通った有理数を並べて道



$$
\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{4}{7} \longrightarrow \frac{5}{9} \tag{2.12}
$$

を作り，これに $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}$ を付け加えることで祖先三角形が得られる ($\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ の数字が祖先三角形の 2 つある斜辺の左側と右側のどちらにあるのかが，Stern-Brocot 木において $\frac{5}{9}$ から $\frac{1}{1}$ までに至る際に左と右に進のどちらに進むのかと対応していることに注意)。

また，$\underline{\mathtt{ir}}(w) = \mathrm{LRRR}$ に対応する有理数は，$\frac{4}{9}$ である。

注意. 正の有理数を LR 語で表わす方法は Kauffman と Lambropoulou [27; §13.1] によっても考えられている。但し，彼らの LR 語は $\frac{1}{1}$ から α へ至る道に対応させている。同様の LR 語は，富田の修士論文 [69] の中でも与えられている。$\frac{1}{1}$ から $\alpha \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ へ至る下降道から定まる LR 語を $w^*(\alpha)$ と書くと，$\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ の場合には $w^*(\alpha) = w(\alpha)\mathrm{L}$ となる。このノートにおける LR 語の定義は，[32] において，Conway-Coxeter フリーズとの対応関係を与える目的のために導入されたものである。

LR 語 w に対して，その語の長さを $\ell(w)$ により表わす。$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ に対して $\ell\big(w([0, a_1, \ldots, a_n])\big) > \ell\big(w([0, a_1, \ldots, a_{n-1}])\big)$ であることが，連分数の長さ n と連分数における最後の整数 a_n に関する二重帰納法で証明される。

$(0, 1)$ 内の有理数に対応する LR 語は，Farey 和を使って次のように帰納的に求めることができる：$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ を Farey 隣数とし，それぞれに対応する LR 語を w, w' とする。このとき，

$$w\Big(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}\Big) = \begin{cases} \mathrm{L}w' & (\ell(w) < \ell(w') \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}w & (\ell(w) > \ell(w') \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.13}$$

となる。

補題 2-18 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ とし，$\alpha := [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とおく。

(1) n が偶数のとき

$$\beta = \begin{cases} [0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2 \text{ のとき}), \\ [0, a_1, \ldots, a_{n-2}] & (a_n = 1 \text{ のとき}), \end{cases} \qquad \gamma = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]$$

とおくと

$$w(\alpha) = \begin{cases} \mathrm{L}w(\gamma) & (a_n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}w(\beta) & (a_n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(2) n が奇数のとき

$$\beta = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}], \qquad \gamma = \begin{cases} [0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1] & (a_n \geq 2 \text{ のとき}), \\ 0, a_1, \ldots, a_{n-2}] & (a_n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと

$$w(\alpha) = \begin{cases} \mathrm{L}w(\gamma) & (a_n \geq 2 \text{ のとき}) \\ \mathrm{R}w(\beta) & (a_n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。 □

注意 2-19　上の補題より，$\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ と表わすと，$w(\alpha)$ は次で与えられることがわかる：

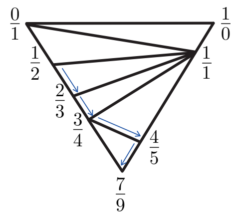
$$w(\alpha) = \begin{cases} \mathrm{R}^{a_n - 1}\mathrm{L}^{a_{n-1}}\mathrm{R}^{a_{n-2}} \cdots \mathrm{R}^{a_2}\mathrm{L}^{a_1 - 1} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \mathrm{L}^{a_n - 1}\mathrm{R}^{a_{n-1}}\mathrm{L}^{a_{n-2}} \cdots \mathrm{R}^{a_2}\mathrm{L}^{a_1 - 1} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

定理 2-20　$\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ を頂点とする祖先三角形 YAT(α) から，規則 1，2，3 に基づいて定まる Conway-Coxeter フリーズを $\mathit{\Gamma}_\alpha$ により表わす。$\mathit{\Gamma}_\alpha$ の幅は $(n-3)$ (≥ 5) であるとする。$\mathit{\Gamma}_\alpha$ を構成する際に規則 1 に基づいて最初に配置する左上から右下の直線を f とおき，f 上の α の分母が置かれた点を通り，左下から右上に伸ばした直線を g とおく。このとき，

① g の右隣の直線の第 2 行目に置かれた数字は 1 であり，
② そこから第 $(n-3)$ 行目まで 1 が連続して連なる。その連なり方はちょうど有理数 α に対応する LR 語 $w(\alpha)$ になる。

したがって，$\mathit{\Gamma}_\alpha = \mathrm{CCF}(w(\alpha))$ が成立する。

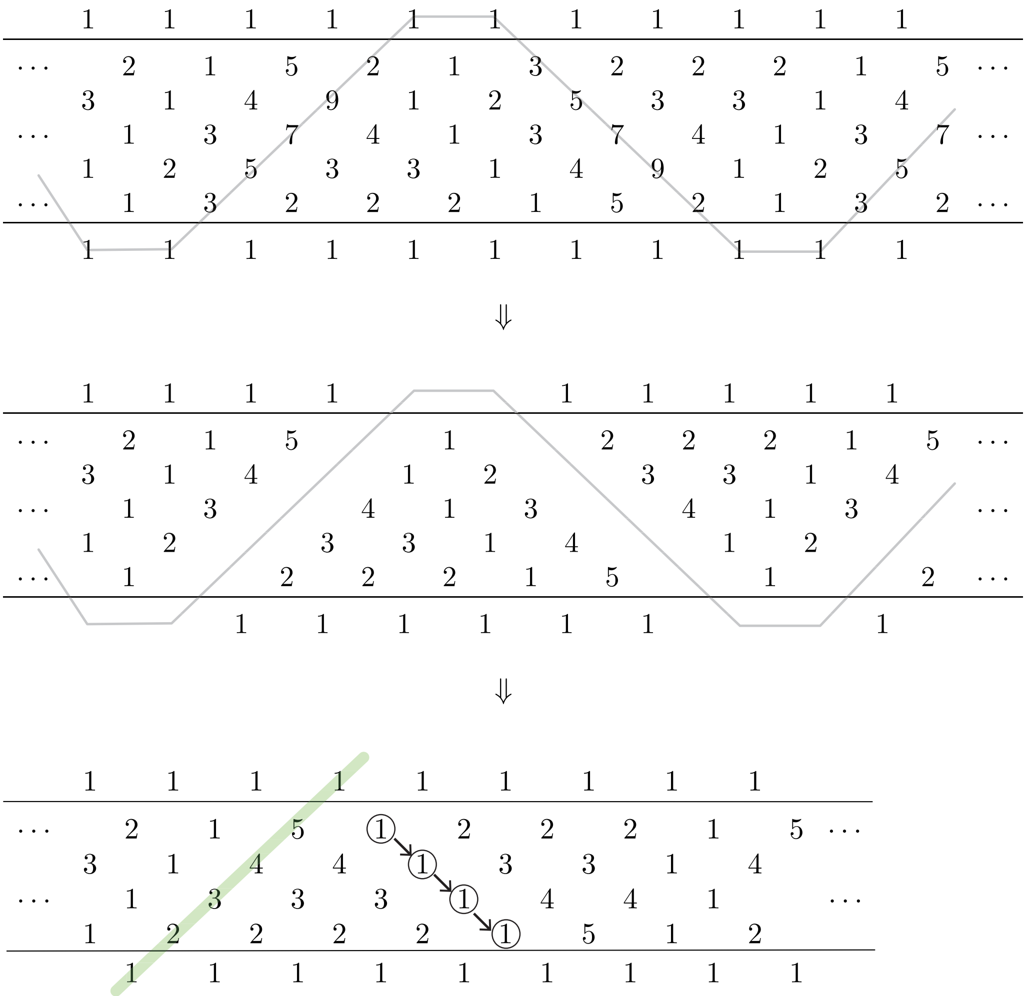
例 2-21　$\alpha = \dfrac{7}{9}$ の場合

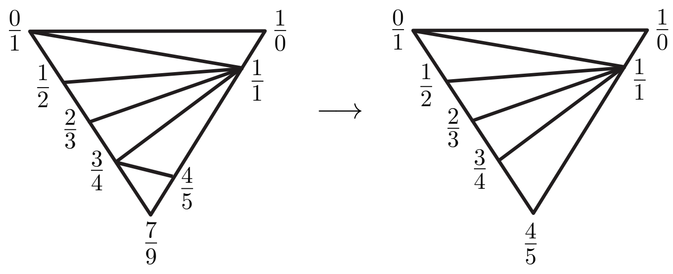
$\mathrm{YAT}\left(\dfrac{7}{9}\right) =$ 

となるから，$\mathit{\Gamma}_\alpha$ は下表のようになり，また，$w(\alpha) = \mathrm{LRRR}$ である。

				f						g													
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		
···		2		1		5		2		1		3		2		2		2		1		5	···
	3		1		4		9		1		2		5		3		3		1		4		
···		1		3		7		4		1		3		7		4		1		3		7	···
	1		2		5		3		3		1		4		9		1		2		5		
···		1		3		2		2		2		1		5		2		1		3		2	···
	1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		1		

　ここから，g 上の数字を含む「正弦曲線」を取り除くと，次図のように $\mathit{\Gamma}_{\frac{4}{5}}$ が得られる。この操作は YAT(α) から頂点 $\dfrac{7}{9}$ を取り除くことに対応しており，LR 語 $w(\alpha)$ の言葉では先頭の文字 L を取り除くことに対応している。





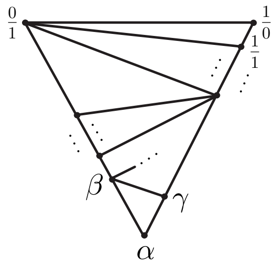
(定理 2-20 の証明)

Farey 和を施す回数に関する帰納法で示す。$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ に対しては定理の主張は自明である。

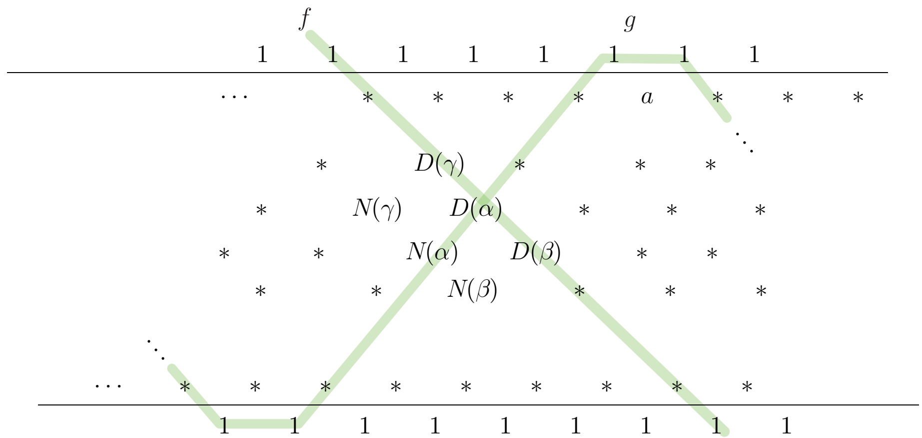
$\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ が $\alpha = \beta \oplus \gamma$ のように表わされているとし，β, γ に対しては定理の①, ②が成り立っていると仮定する。

YAT(α) が下図のように与えられている状況のときを考える。

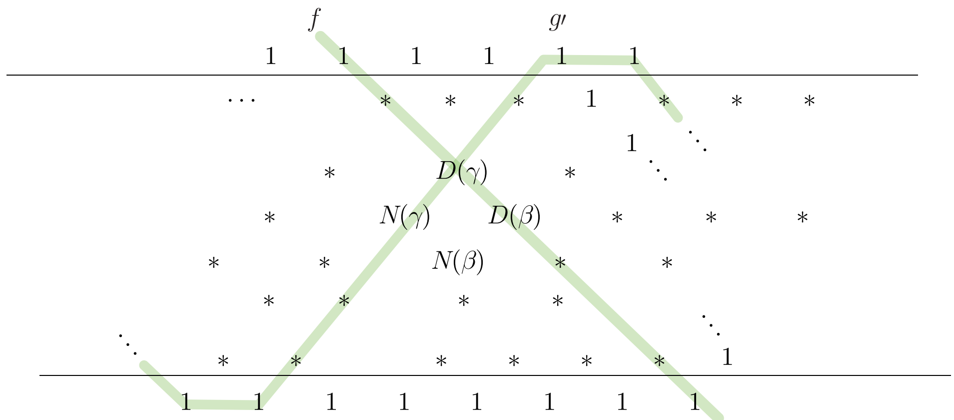
(♯) $\mathrm{YAT}(\alpha) \;=$



有理数 ρ の分母と分子をそれぞれ $D(\rho)$, $N(\rho)$ により表わす。Γ_α は下図のような CCF である。但し，f 上の整数は $\mathrm{YAT}(\alpha)$ の周を時計周りに $\dfrac{1}{1}$ から $\dfrac{0}{1}$ まで移動したときの，各頂点に置かれた有理数の分母を左上から右下に並べたものである。g は f 上における $D(\alpha)$ を通り，左下から右上へ伸ばした直線であり，$*$ は正の整数を表わし，a は g の第 2 行の数の右隣の数字である。



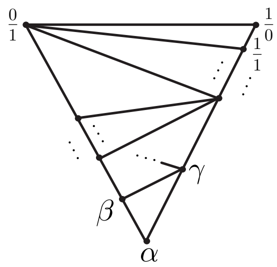
Γ_α から g 上の数字を含む「正弦曲線」を取り除いて隙間を詰めると，$\mathrm{YAT}(\gamma)$ から CCF を構成するときの作り方により，Γ_γ が得られる。隙間を詰めると，a は Γ_γ の第 1 行に移動するから，1 であることがわかる。さらに，帰納法の仮定より，Γ_γ において，f 上における $D(\gamma)$ を通り，左下から右上へ伸ばした直線を g' とおき，g' の第 2 行目の整数の右隣の整数を a' とおくと，$a' = 1$ であり，そこから第 $(n-4)$ 行目まで 1 が連続して連なる。さらに，その連なり方はちょうど有理数 γ に対応する LR 語 $w(\gamma)$ になる。



$\varGamma_\gamma$ における $a' = 1$ は，$\varGamma_\alpha$ において a の左下の第 3 行目の位置にあるから，$\varGamma_\alpha$ においても a から第 $(n-3)$ 行目まで 1 が連続して連なることがわかり，それを LR 語で表わすと，$\mathrm{L}w(\gamma)$ となる。最初に与えた YAT(α) の形から，γ から α へは左へ移動するから，$w(\alpha) = \mathrm{L}w(\gamma)$ が成り立つことがわかる。こうして，YAT(α) が ($\sharp$) の形であるような α は定理の①, ②を満たすことが示された。

同様にして，YAT(α) が次図のように与えられている状況のときにも，α は定理の①, ②を満たすことが示される。

YAT(α) =



□

系 2-22　LR 語 w によって定まる $(0,1)$ 内の有理数を α_w と書くと，$\mathrm{CCF}(w) = \varGamma_{\alpha_w}$ となる。

(証明)

α_w を頂点に持つ祖先三角形 YAT(α_w) から，規則 1，２，３に基づいて CCF $\varGamma_{\alpha_w}$ を作ると，定理 2-20 より $\varGamma_{\alpha_w} = \mathrm{CCF}(w(\alpha_w))$ が成り立つ。$w(\alpha_w) = w$ であるから，系の等式を得る。 □

定理 2-23

(1) 有理数 α の祖先三角形 YAT(α) は，内部三角形を持たない正多角形の三角形分割を与える。

(2) 任意の内部三角形を持たない正多角形の三角形分割は，ある $\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ の祖先三角形 YAT(α) として与えることができる。

(3) 定理 2-10 における正 n 角形の三角形分割と Conway-Coxeter フリーズとの 1 対 1 対応の下で，内部三角形を持たない三角形分割の全体と幅 $(n-3)$ のジグザグ型 Conway-Coxeter フリーズの全体が対応する。

(証明)

(1) は祖先三角形の構成方法から自明である。

(2) 内部三角形を持たない正 n 角形の三角形分割は，2 辺が周上にあるような三角形をちょうど 2 個もつことが，辺の個数に関する帰納法で証明される (Farey ボートで考えると自明であろう)。そのような一方の三角形の頂点を時計回りに a_0, a_1, a_2 とおいて，順に有理数 $\dfrac{0}{1}, \dfrac{1}{0}, \dfrac{1}{1}$ を対応させる。2 辺が周上にあるような三角形の選ばなかった方の三角形の頂点の中で，周上の 2 辺の共通の端点となっている頂点を a_* とおき，規則 1，規則 2，規則 3 にしたがって a_* に割

り当てられる有理数を α とすると，$0<\alpha<1$ であり，正 n 角形のその三角形分割は $\mathrm{YAT}(\alpha)$ と同じとなる。このことも辺の個数に関する帰納法で証明される。

2 辺が周上にあるような三角形は 2 つあるが，一方の三角形に a_0, a_1, a_2 とおいて，順に有理数 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}$ を対応させたときに $\mathrm{YAT}(\alpha)$ が得られたとすると，残りの三角形に a_0, a_1, a_2 とおいて，順に有理数 $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}$ を対応させたときに得られる祖先三角形の有理数は $\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)=1-\alpha$ となる。

(3) $n \geq 5$ とする。幅 $(n-3)$ のジグザグ型 CCF の全体は，長さ $(n-4)$ の LR 語の組 $\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}$ の全体と 1 対 1 に対応する。そこで，長さ $(n-4)$ の LR 語の組 $\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}$ の全体を $\mathscr{A}$ とおく。

内部三角形を持たない正 n 角形の三角形分割は，(2) の証明より，$(0,1)$ 内の有理数 α の祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ とみなすことができる。$\alpha, \alpha' \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ に対して，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ と $\mathrm{YAT}(\alpha')$ が回転合同 (回転移動によって写り合う) であるための必要十分条件は，$\alpha' = \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ となることである。この事実に注意して，$(0,1)$ 内の有理数 α の祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ の全体を $\mathscr{B}$ とおく。

w を長さ $(n-4)$ の LR 語とし，α_w を LR 語 w から定まる $(0,1)$ 内の有理数とする。このとき，α_w を頂点とする祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha_w)$ が定義される。w の代わりに $\underline{\mathtt{ir}}(w)$ を用いたとき，$\mathrm{YAT}(\alpha_{\underline{\mathtt{ir}}(w)})$ は $\mathrm{YAT}(\alpha_w)$ を回転したものになっている (Farey ボートで考えるとわかりやすい) ので，同じ三角形分割となる。よって，祖先三角形を内部三角形を持たない正 n 角形の三角形分割とみなすことで，写像

$$\Phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}, \quad \Phi(\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}) = \mathrm{YAT}(\alpha_w)$$

が定まる。

逆に，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ $(\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q})$ に対して，α によって定まる LR 語 $w(\alpha)$ を考える。$\mathrm{YAT}(\alpha)$ と回転合同な祖先三角形は $\mathrm{YAT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha))$ のみであるから，写像

$$\Psi : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}, \quad \Psi(\mathrm{YAT}(\alpha)) = \{w(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(w(\alpha))\}$$

が矛盾なく定義される。

Φ と Ψ は互いに逆写像であることを示す。

任意の LR 語 w に対して，

$$(\Psi \circ \Phi)(\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}) = \Psi(\mathrm{YAT}(\alpha_w)) = \big\{w(\alpha_w), \underline{\mathtt{ir}}\big(w(\alpha_w)\big)\big\}$$

となる。ここで，$w(\alpha_w) = w$ であるから，$(\Psi \circ \Phi)(\{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}) = \{w, \underline{\mathtt{ir}}(w)\}$，すなわち，$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$ である。

次に，任意の $\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ に対して，

$$(\Phi \circ \Psi)(\mathrm{YAT}(\alpha)) = \Phi\big(\{w(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(w(\alpha))\}\big) = \mathrm{YAT}\big(\alpha_{w(\alpha)}\big)$$

である。$\alpha_{w(\alpha)} = \alpha$ であるから $(\Phi \circ \Psi)(\mathrm{YAT}(\alpha)) = \mathrm{YAT}(\alpha)$，すなわち，$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ である。以上より，Φ と Ψ は全単射であり，互いに逆写像であることが示された。 □

● 2-6：開区間 $(0,1)$ 内の有理数に対する 3 つの作用素 $\underline{\mathtt{i}}, \underline{\mathtt{r}}, \underline{\mathtt{ir}}$

ジグザグ型 CCF は，最大の整数とその周囲にある 4 つの整数によって決定される [33,34] その正確な内容は次節で説明する。その 4 つの整数は次の定理のように与えることができる。

定理 2-24 $\alpha = \dfrac{p}{q}$ を $0 < \alpha < 1$ を満たす有理数とし，$\left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{s}\right)$ を α の両親とする。このとき，祖先三角形 YAT(α) から作られるジグザグ型 Conway-Coxeter フリーズにおいて q は最大の整数であり，その周囲にある整数は次の既約分数の分子として与えられる。

$$\alpha = \frac{p}{q}, \quad \underline{\mathtt{i}}(\alpha) = \frac{q-p}{q}, \quad \underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \frac{r}{q}, \quad \underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \frac{s}{q}. \tag{2.14}$$

さらに，$pp' \equiv 1 \pmod q$ を満たす $p' \in \{1, \ldots, q-1\}$ をとると，$r = p'$, $s = q - p'$ となる。したがって，

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \frac{p'}{q}, \qquad \underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \frac{q-p'}{q} \tag{2.15}$$

によって与えられる。

注意. 定理 2-24 における，開区間 $(0,1)$ における有理数に対する 3 つの作用素 $\underline{\mathtt{i}}, \underline{\mathtt{r}}, \underline{\mathtt{ir}}$ は，ジグザグ型 CCF の LR 語に基づく研究を行う中で小木曽岳義によって考え出され，論文 [33] において導入された。これらの作用素はジグザグ型 CCF の研究において重要な役割を果たす。また，定理 2-24 における (2.15) は，Morier-Genoud と Ovsineko により導入された有理数の q-変形に関するある予想 (第 5 節で説明する) への任氏と柳川氏のアプローチに触発されて著者により考え出され，論文 [35] で導入された。

(2.14) は YAT(α) から作られるジグザグ型 CCF の構成方法から従うが，(2.15) を証明するには次の連分数に対する次の回文定理が必要である。

定理 2-25 (連分数の回文定理) $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\frac{p}{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n], \qquad \frac{p'}{a'} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$$

とおく (既約分数表示とする)。$p > 0$, $p' > 0$ のとき，$p = p'$ かつ $aa' \equiv (-1)^{n+1} \pmod p$ となる。 □

上の定理の証明は例えば [72; 定理 7-3] を参照。

$\underline{\mathtt{i}}, \underline{\mathtt{ir}}$ は連分数を用いると次の命題のように与えることができる。

命題 2-26 有理数 $\alpha = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ に対して，

(1) $\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \begin{cases} [0, a_n, \ldots, a_2, a_1] & (n \text{ が偶数のとき}), \\ [0, 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$

(2) $\underline{\mathtt{i}}(\alpha) = [0, 1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n]$.

(3) $\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \begin{cases} [0, 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] & (n \text{ が偶数のとき}), \\ [0, a_n, \ldots, a_2, a_1] & (n \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$

(**証明**)

まず，(2) を示す。$\beta := [0, 1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n]$ とおく。このとき，

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{[a_2, \ldots, a_n]}} = \frac{[a_2, \ldots, a_n]}{a_1[a_2, \ldots, a_n] + 1},$$

$$\beta = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_1 - 1 + \cfrac{1}{[a_2, \ldots, a_n]}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{[a_2, \ldots, a_n]}{(a_1 - 1)[a_2, \ldots, a_n] + 1}} = \frac{(a_1 - 1)[a_2, \ldots, a_n] + 1}{a_1[a_2, \ldots, a_n] + 1}$$

となるから，$\alpha + \beta = 1$ である。よって，$\alpha = \dfrac{p}{q}$ と書けば，$\beta = \dfrac{q - p}{q}$ であることがわかる。故に，$\beta = \underline{\mathtt{i}}(\alpha)$ である。

(1) において n が偶数の場合の等式を, 回文定理 (定理 2-25) を用いて示す。$\alpha = \dfrac{p}{q}$ $(0 < p < q)$ のように既約分数で表わすと，$[a_1, \ldots, a_n] = \dfrac{q}{p}$ となる。定理 2-25 より，$pp' \equiv -1 \pmod q$ を満たす $p' \in \mathbb{Z}$ を用いて，$[a_n, \ldots, a_1] = \dfrac{q}{p'}$ と表わされる。$pp' \equiv -1 \pmod q$ より $pp' + 1 = xq$ を満たす $x \in \mathbb{Z}$ が存在する。$n \geq 2$ であり，$a_n \geq 1$ であるから，$\dfrac{q}{p'} = [a_n, \ldots, a_1] > 1$ である。よって，$q > p' > 0$ である。これより，$pp' + 1 = xq > xp'$ となるから $1 > p'(x - p)$ を得る。この不等式は $0 \leq p'(x - p)$ と同値であり，これは $0 \leq x - p$ に同値である。故に，$p \leq x$ である。さらに，

$$x(q - p') - p'(p - x) = xq - pp' = 1$$

であるから，$\left(\dfrac{p - x}{q - p'}, \dfrac{x}{p'}\right)$ は $\alpha = \dfrac{p}{q}$ の両親である。したがって，

$$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \frac{p'}{q} = \frac{1}{[a_n, \ldots, a_1]} = [0, a_n, \ldots, a_1]$$

を得る。

(3) において n が偶数の場合の等式を示す。これは n が偶数のときの (1) と (2) から次のようにして導かれる。

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \underline{\mathtt{i}}\big(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)\big) = \underline{\mathtt{i}}\big([0, a_n, \ldots, a_2, a_1]\big) = [0, 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1].$$

(3) において n が奇数の場合の等式を示す。

● $a_n > 1$ の場合，$\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n] = [0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$ と表わされる。n が偶数の場合の (3) の結果より

$$\begin{aligned}
\underline{\mathtt{r}}(\alpha) &= [0, 1, 1 - 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] \\
&= [0, 1, 0, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] \\
&= \frac{1}{1 + [a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]} \\
&= \frac{1}{[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]} \\
&= [0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]
\end{aligned}$$

となる。

• $a_n = 1$ の場合，$\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n] = [0, a_1, \ldots, a_{n-1} + 1]$ と表わされる。n が偶数の場合の (3) の結果より

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = [0, 1, (a_{n-1} + 1) - 1, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1] = [0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]$$

となる。

(1) における n が奇数の場合の等式は，(3) において n が奇数の場合の等式と (2) を合わせれば得られる。 □

注意. 上の補題において，n が奇数のときの $\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ と n が偶数のときの $\underline{\mathtt{r}}(\alpha)$ の右辺には $a_n - 1$ が現れるので，$a_n = 1$ の場合には連分数表示の中に 0 が含まれることになる。この場合，

$$[0, 1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = [0, 1, 0, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = [0, 1 + a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1]$$

のように解釈すればよい。

定理 2-24 の最初の主張「祖先三角形 YAT(α) から作られるジグザグ型 CCF において q が最大の整数である」を示すために準備が必要である。以下，定理 2-24 の証明の終わりまで，CCF Γ は上下に 0 が並んだ状態のものを扱う。

幅が $(n-3)$ $(n \geq 4)$ の (ジグザグ型とは限らない)CCF Γ において，1 つの “対角線”(= 左上から右下に並ぶ数字上に引いた直線) をとり，その線上に並ぶ数字を上から順次取り出して有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ を作る。$x_{-1} = 0,\ x_0 = 1,\ x_{n-2} = 1,\ x_{n-1} = 0$ である。さらに，$y_{-1} = -1$ とし，y_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ を x_{j-1} の右隣りに並ぶ数字とする。次表は n が奇数の場合の様子である。

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\
& 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\hline
\cdots & & x_1 & & y_2 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
& \cdots & & x_2 & & y_3 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & x_3 & & \ddots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
& \cdots & & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
& & \cdots & & \cdots & & \ddots & & y_{n-3} & & \cdots & & \cdots & \\
& & & \cdots & & \cdots & & x_{n-3} & & y_{n-2} & & \cdots & & \cdots \\
\hline
1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots \\
& 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots
\end{array}$$

ユニモジュラー規則により

(2.16) $$x_{i-1} y_i - y_{i-1} x_i = 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

が成り立つ。

補題 2- 27 Conway-Coxeter フリーズにおいて，上記のように隣り合う有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}, \{y_i\}_{i=0}^{n}$ を考える。$y_{-1} = -1$ と定める。各 $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

(1) $x_{i-1} < x_i$ ならば $y_{i-1} < y_i$ である。

(2) $x_{i-1} = x_i$ ならば $x_{i-1} = x_i = 1$ かつ $y_i - y_{i-1} = 1$ である。したがって，特に，$y_i > y_{i-1}$ である。

(3) $i = 0, 1$ のとき，$y_{i-1} < y_i$ であり，$i = 2, \ldots, n-1$ のとき，$x_{i-1} > x_i$ ならば $y_{i-1} \geq y_i$ である。より詳しく

- $x_{i-1} - x_i \geq 2$ または $y_{i-1} \geq 2$ ならば $y_{i-1} > y_i$ であり，
- $x_{i-1} - x_i = 1$ かつ $y_{i-1} = 1$ ならば $y_{i-1} = y_i = 1$ である。

(**証明**)

(1) $i = 0$ のときは $y_{i-1} = -1 < 0 = y_i$ であるから，成立する。

$i = 1, 2, \ldots, n-1$ のときは $x_{i-1} \geq 1$ である。さらに，(2.16) より

$$y_i = \frac{1 + y_{i-1}x_i}{x_{i-1}}$$

であるから，

$$y_i - y_{i-1} = \frac{1 + y_{i-1}x_i}{x_{i-1}} - y_{i-1} = \frac{1 + y_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{x_{i-1}} > 0.$$

(2) $x_{i-1} = x_i$ ならば (2.16) より $x_i(y_i - y_{i-1}) = 1$ である。よって，$x_i = 1$ かつ $y_i - y_{i-1} = 1$ である。

(3) $i = 0$ のとき $y_{i-1} = -1 < 0 = y_i$ であり，$i = 1$ のとき $y_{i-1} = 0 < 1 = y_i$ である。以下，$i = 2, \ldots, n-1$ のときを考える。(1) と同様に，

$$y_{i-1} - y_i = y_{i-1} - \frac{1 + y_{i-1}x_i}{x_{i-1}} = \frac{y_{i-1}(x_{i-1} - x_i) - 1}{x_{i-1}}$$

となる。ここで，$i = 2, \ldots, n-1$ より $y_{i-1} \geq 1$ であるから，$y_{i-1} - y_i \geq 0$ を得る。さらに，上式から $x_{i-1} - f_i \geq 2$ または $y_{i-1} \geq 2$ ならば $y_{i-1} - y_i > 0$ であり，$x_{i-1} - x_i = 1$ かつ $y_{i-1} = 1$ ならば $y_{i-1} - y_i = 0$ である。 □

系 2- 28　Conway-Coxeter フリーズにおいて，補題 2- 27 のように定義される有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}, \{y_i\}_{i=0}^{n}$ を考える。$n \geq 4$ とし，各 $i = 1, 2, \ldots, n-2$ とする。

(1) 「$x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} \leq x_i$」と「$x_{i-1} \leq x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$」の少なくとも一方が成立するならば，$x_{i+1} < x_i$ であり，「$y_{i-1} < y_i$ かつ $y_{i+1} \leq y_i$」が成立する。

(2) 「$y_{i-1} < y_i$ かつ $y_{i+1} \leq y_i$」と「$y_{i-1} \leq y_i$ かつ $y_{i+1} < y_i$」の少なくとも一方が成立するならば，$y_{i-1} < y_i$ であり，「$x_{i-1} \leq x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$」が成立する。

(**証明の方針**)

(1) 以下の場合分けによる考察を行うことで，主張の成立を確認することができる。

- $i = 1$ のとき，$x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$ の場合と $x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} = x_i$ の場合。
- $i = n-2$ のとき，$x_{i-1} < x_i$ の場合と $x_{i-1} = x_i$ の場合。
- $2 \leq i \leq n-3$ のとき，$x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$ の場合と $x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} = x_i$ の場合と $x_{i-1} = x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$ の場合

(2) は y_i に関する場合分けにより (1) と同様に示される。 $\square$

定義 2-29 幅 $(n-3)$ $(n \geq 4)$ の Conway-Coxeter フリーズにおいて，左上から右下へ伸びる直線をとり，その上に配置された整数を左上から順番に取り出して作られる有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ を考える。但し，取り出す整数は 0 から始めて 0 で終わるようにとる (したがって，$x_{-1} = x_{n-1} = 0$)。$i = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ とする。次の条件が満たされるとき，有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ は x_i において**極大**であると呼ぶ。

(1) $i = 1, 2, \ldots, n-3$ の場合，「$x_{i-1} < x_i$ かつ $x_{i+1} \leq x_i$」と「$x_{i-1} \leq x_i$ かつ $x_{i+1} < x_i$」の少なくとも一方が成立する。

(2) $i = -1$ の場合，x_{-1} の真下の数を $x_{-1}[\downarrow]$ とおくとき，$x_{-1}[\downarrow] = 1$

(3) $i = 0$ の場合，$x_1 = 1$ が成立する。

(4) $i = n-2$ の場合，$x_{n-3} = 1$ が成立する。

(5) $i = n-1$ の場合，x_{n-1} の真上の数を $x_{n-1}[\uparrow]$ とおくとき，$x_{n-1}[\uparrow] = 1$ が成立する。

補題 2-30 幅が $(n-3)$ $(n \geq 4)$ の Conway-Coxeter フリーズにおいて，左上から右下へ伸びる直線上に配置された有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ をとり，その右隣の直線上に配置された有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ を補題 2-27 の上のようにとる。このとき，

(1) $i = 1, \ldots, n-2$ について有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_i で極大となることと有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_i で極大となることとは同値である。

(2) 次の 3 つは互いに同値である。
- 有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_0 で極大である。
- 有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_0 で極大である。
- 有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_n で極大である。

(3) 次の 3 つは互いに同値である。
- 有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_{-1} で極大である。
- 有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_{n-1} で極大である。
- 有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_{n-1} で極大である。

(**証明**)

CCF Γ において，第 2 行に並ぶ数を順次取り出して数列 $\{c_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を作る。但し，第 0 項 c_0 が x_1 となるように番号付けをしておく。さらに，Γ の “対角線”(= 左上から右下に並ぶ数字上に引いた直線) の中で c_0 を通るものを考えて，その線上に並ぶ数字を順次取り出して有限数列 $\{f_i\}_{i=-1}^{n-1}$ を作る。但し，$f_{-1} = 0$, $f_0 = 1$, $f_{n-2} = 1$, $f_{n-1} = 0$ である。さらに，$g_{-1} = -1$ とし，g_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ を f_{j-1} の右隣りに並ぶ数字とする。$x_i = f_{-1,i}$ $(-1 \leq i \leq$

$n-1)$, $y_i = f_{0,i}$ $(0 \leq i \leq n)$ となる。次表は n が奇数の場合の様子である。

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & -1 & & -1 & & -1 & & \cdots & & -1 & & -1 & & \cdots \\
0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & \cdots \\
\hline
\cdots & & c_0 & & c_1 & & \cdots & & c_{\frac{n-3}{2}} & & c_{\frac{n-1}{2}} & & \cdots & \\
 & \cdots & & f_2 & & g_3 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & f_3 & & \ddots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \cdots & & \cdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \ddots & & g_{n-3} & & \cdots & & \cdots & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & f_{n-3} & & g_{n-2} & & \cdots & & \cdots \\
\hline
1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & 1 & & 1 & & 1 & \cdots \\
 & 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
-1 & & -1 & & -1 & & \cdots & & -1 & & -1 & & -1 & \cdots
\end{array}
$$

(1) は系 2-28 による。

(2) 有限数列 $\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_0 で極大となると仮定する。定義より $x_1 = 1$ である。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & 1\ (= f_{-1,0}) & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\hline
 & & 1\ (= f_{-1,1}) & & f_{0,2} & & & & & & \\
 & & & f_{-1,2} & & f_{0,3} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \ddots & & f_{0,n-3} & & & \\
 & & & & & & f_{-1,n-3} & & f_{0,n-2} & & 1\ (= f_{1,n-1}) \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

このとき，y_0 の真下の整数は $x_1 = 1$ であるから，有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_0 で極大となる。また，(2.10) より $f_{1,n-1} = f_{-1,1} = x_1 = 1$ である。これは y_n の真上の数であるから，有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_n で極大となる。

逆に，有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_0 で極大であると仮定する。極大の定義より，y_0 の真下の整数 x_1 は 1 となる。これは 極大の定義より，$\{x_i\}_{i=-1}^{n-1}$ において x_0 が極大であることを意味する。また，(2.10) より，y_0 の真下の整数 $x_1 = f_{-1,1}$ と y_n の真上の数 $f_{1,n-1}$ は同じなので，有限数列 $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ において y_n で極大となる。

(3) は (2) と同様に示される。 □

(定理 2-24 の証明)

まず，祖先三角形 YAT(α) から作られるジグザグ型 CCF において q が最大の整数であることを示す。

Γ の第 2 行に並ぶ数列を $\{c_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ とおく。c_i を通る対角線上の数字を第 0 行から順に $f_{i-1,i-1}=0$, $f_{i-1,i}=1$, $f_{i-1,i+1}=c_i$, $f_{i-1,i+2},\ldots,f_{i-1,i+n-3}$, $f_{i-1,i+n-2}=1$, $f_{i-1,i+n-1}=0$ と名付ける。

Γ に現れる最大の数を p とおき，p を通る対角線の一つをとる。$f_{r,s}=p$ であるとすると，(2.10) より $f_{s,r+n}=f_{r,s}=p$ である。よって，有限数列 $\{f_{s,i}\}_{i=s}^{s+n}$ において $f_{s,r+n}$ で極大となる。補題 2-30 より，有限数列 $\{f_{r+1,i}\}_{i=r+1}^{r+1+n}$ において $f_{r+1,r+n}=1$ で極大であり，有限数列 $\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において $f_{r,r+n}=0$ で極大である。極大の定義から $f_{r+1,r+n-1}=1$ である。ユニモジュラー規則より $f_{r,r+n-2}>1$ である。したがって，$\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において $f_{r,r+n-1}=1$ で極大でない。

$f_{r+1,r+n-1}=1$ と (2.10) より $f_{r-1,r+1}=f_{r+1,r+n-1}=1$ となる。極大の定義から $\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において $f_{r,r}=0$ で極大である。また，$f_{r-1,r+1}=1$ とユニモジュラー規則より $f_{r,r+2}>1$ である。このことから $\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において $f_{r,r+1}=1$ で極大でないことがわかる。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0\ (=f_{r,r}) & & & 0 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
& 1\ (=f_{r,r+1}) & & 1 & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
\hline
& & f_{r,r+2} & & & & & & & & & \\
& & & \ddots & f_{r+1,s} & & & & & & & \\
& & & f_{r,s} & & \ddots & & & & & & f_{s,r+n} \\
& & & & \ddots & & & & & & & \\
& & & & & f_{r,r+n-2} & & 1\ (=f_{r+1,r+n-1}) & & & \iddots & \\
\hline
& 1 & & 1 & 1 & & 1\ (=f_{r,r+n-1}) & & 1\ (=f_{r+1,r+n}) & & 1 & \\
0 & & & 0 & 0 & & 0 & 0\ (=f_{r,r+n}) & & 0 & &
\end{array}
$$

Γ はジグザグ型なので，$\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において $0,1$ 以外の極大値は p のみであり，それは唯一である。よって，$f_{r,r}=0, f_{r,r+1}=1, f_{r,n+2}\ (>1),\ldots,f_{r,s}=p$ は狭義単調増加列であり，$f_{r,s}=p, f_{r,s+1},\ldots,f_{r,r+n-2}\ (>1), f_{r,r+n-1}=1, f_{r,r+n}=0$ は狭義単調減少列である。さらに，先程行った考察により，$\{f_{r,i}\}_{i=r}^{r+n}$ において極大となるのは $f_{r,r}=0$, $f_{r,s}, f_{r,r+n}=0$ の 3 項においてのみとなる。よって，YAT(α) から作られるジグザグ型 CCF における最大の整数は q である。

次に，その周囲にある整数は (2.14) の既約分数の分子として与えられることを示す。YAT(α) から作られるジグザグ型 CCF において，p と q の CCF における位置関係が次のようになっている部分がある。ここで，a,b,c,u,v,w はある正の整数である。

$$
\begin{array}{ccccc}
& & u & & \\
& p & & a & \\
v & & q & & w \\
& b & & c &
\end{array}
$$

CCF の構成方法から，$\left(\dfrac{u}{a},\dfrac{v}{b}\right)$ は $\dfrac{p}{q}$ の両親であり，$\left(\dfrac{u}{p},\dfrac{w}{c}\right)$ は $\dfrac{a}{q}$ の両親である。したがって，$r=a$, $s=b$ であり，$\dfrac{a}{q}=\dfrac{u}{p}\oplus\dfrac{w}{c}$ より $q=p+c$ である。よって，q の周囲にある

4 つの整数 p, a, b, c は (2.14) の分子によって与えられる。

次に，(2.15) を示す。n を偶数として，$\alpha = \dfrac{p}{q} = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ と表わし，$\beta :=$ $[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ とおく。このとき，$\beta = \dfrac{q}{p}$ となる。連分数に対する回文定理 (定理 2-25) により，$\beta^{\mathrm{pal}} := [1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1]$ とおくと，$\beta^{\mathrm{pal}} = \dfrac{q}{p'}$ となることがわかる。

$$[1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1] = 1 + \cfrac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{[a_{n-1}, \ldots, a_1]}}$$

であるから，

$$a_n - 1 + \frac{1}{[a_{n-1}, \ldots, a_1]} = \frac{1}{\frac{q}{p'} - 1} = \frac{p'}{q - p'}.$$

よって，$[0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = \dfrac{q - p'}{q}$ を得る。

一方，命題 2-26(1) の n が偶数の場合より，$[0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ となる。こうして，$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \dfrac{q - p'}{q}$ が示された。 □

ジグザグ型 CCF において，そのフリーズ・パターンに現れる最大の整数は CCF の不変量である。ジグザグ型でない CCF に対しては，「極大な」整数の組が CCF の不変量を与える。例えば，例 2-14 におけるジグザグ型でない CCF において，$6, 7, 11$ は，左上から右下へ伸びる直線上の数値における極大値であり，かつ，右上から左下へ伸びる直線上の数値における極大値である (7 については一部例外があるが，そうなっている箇所がある)。この数値 $6, 7, 11$ の組は CCF の不変量である。

問 2-31 ジグザグ型でない CCF を含めて，2 斜線から見て極大な整数を分母に，その周囲にある 4 つの整数を分子にして有理数を作ると，それらは何か意味のある有理数になっているか？

CCF は映進対称性を持つから，CCF $\mathit{\Gamma}$ が与えられたとき，上下を逆にしても (すなわち，水平方向に関する鏡映をとっても) 同じ CCF のままである (すなわち，水平方向の平行移動でもとの CCF に重ねることができる)。一方，左右を逆にする (すなわち，垂直方向に関する鏡映をとる) ことにより新しい CCF を作ることができる。このようにして得られる CCF を $\perp(\mathit{\Gamma})$ と記す。

2 つの Conway-Coxeter フリーズ $\mathit{\Gamma}_1$, $\mathit{\Gamma}_2$ が**同値**であるとは，$\mathit{\Gamma}_1$ を平行移動して $\mathit{\Gamma}_2$ と同じ配列になるか，$\perp(\mathit{\Gamma}_1)$ を平行移動して $\mathit{\Gamma}_2$ と同じ配列になるかのいずれかが成り立つときをいう。

$\mathit{\Gamma}$ がジグザグ型の場合，定理 2-23 により内部三角形を持たない正 n 角形の三角形分割と対応し，それはある $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ に対して $\mathrm{YAT}(\alpha)$ の形で与えられる。この α は，定理 2-24 により，ジグザグ型 CCF $\mathit{\Gamma}$ における最大の整数 q と，q の左上に位置する整数 p $(< q)$ から $\dfrac{p}{q}$ によって与えることができる。したがって，定理 2-24 により次が導かれる。

定理 2-32 ジグザグ型 Conway-Coxeter フリーズ $\mathit{\Gamma}$ は，高々 4 個の有理数 $\alpha, \underline{\mathtt{i}}(\alpha), \underline{\mathtt{r}}(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ からなる組によって決まる。

$\underline{\mathtt{i}}, \underline{\mathtt{r}}, \underline{\mathtt{ir}}$ の LR 語による解釈を与えておこう [33]。

LR 語 w に対して，L と R を入れ換えることにより得られる語を $\underline{\mathtt{i}}(w)$ と書き，語の並び順を左右逆にすることにより得られる語を $\underline{\mathtt{r}}(w)$ と書く。また，$\underline{\mathtt{ir}}$ を $\underline{\mathtt{i}}$ と $\underline{\mathtt{r}}$ の合成とする。$\underline{\mathtt{i}}$ と $\underline{\mathtt{r}}$ は可換であるから，$\underline{\mathtt{ir}} = \underline{\mathtt{i}} \circ \underline{\mathtt{r}} = \underline{\mathtt{r}} \circ \underline{\mathtt{i}}$ が成り立つ。また，$\underline{\mathtt{ir}}(w)$ は，w から語の並び順を左右逆にして L と R を入れ換えることにより得られる LR 語である。

この定義は $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ 上の作用素 $\underline{\mathtt{i}}, \underline{\mathtt{r}}, \underline{\mathtt{ir}}$ に対応している。

命題 2-33 (1) 既約分数 $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ に対して，$w = w\left(\dfrac{p}{q}\right)$ とおく。このとき，

$$i(w) = w\left(\frac{q-p}{q}\right).$$

(2) 既約分数 $\alpha = \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ に対して，$\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ を α の親とする。$w = w\left(\dfrac{x}{y}\right)$ とおく。このとき，

$$r(w) = w\left(\frac{q}{y}\right), \qquad \underline{\mathtt{ir}}(w) = w\left(\frac{s}{y}\right).$$

(**証明**)

(2.13) の右辺を $w \vee w'$ で表わす。

(1) LR 語の長さに関する数学的帰納法で同時に示す。

I. 長さ $0,1$ に LR 語に対して補題が成り立つことを示す。

長さ 0 の LR 語は $w_1 := w\left(\dfrac{1}{2}\right) = \emptyset$ であり，長さ 1 の LR 語は $w_2 := w\left(\dfrac{1}{3}\right) = \mathrm{L}, w_3 := w\left(\dfrac{2}{3}\right) = \mathrm{R}$ である。

$$\underline{\mathtt{i}}(w_1) = \emptyset = w\left(\frac{1}{2}\right) = w\left(\frac{2-1}{2}\right),$$
$$\underline{\mathtt{i}}(w_2) = \mathrm{R} = w\left(\frac{2}{3}\right) = w\left(\frac{3-1}{3}\right),$$
$$\underline{\mathtt{i}}(w_3) = \mathrm{L} = w\left(\frac{1}{3}\right) = w\left(\frac{3-2}{3}\right)$$

であるから，長さ $0,1$ に LR 語に対して (1) は成り立つ。さらに，w_2, w_1 に対応する既約分数 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}$ は Farey 隣数であり

$$\underline{\mathtt{i}}(w_2 \vee w_1) = \underline{\mathtt{i}}(\mathrm{L}) = \mathrm{R} = \underline{\mathtt{i}}(w_1) \vee \underline{\mathtt{i}}(w_2)$$

が満たされる。同様に，w_1, w_3 に対応する既約分数 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}$ は Farey 隣数であり

$$\underline{\mathtt{i}}(w_1 \vee w_3) = \underline{\mathtt{i}}(\mathrm{R}) = \mathrm{L} = \underline{\mathtt{i}}(w_3) \vee \underline{\mathtt{i}}(w_1)$$

が満たされる。よって，長さ 1 以下の LR 語 w, w' であって，対応する既約分数が Farey 隣数であるものに対して (1) が成り立つ。

II. 長さ d 未満の LR 語に対して補題の (1) は成り立つと仮定する。w を長さ d の LR 語とし，$w = w\left(\dfrac{x}{y}\right)$ とする。$\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ を $\dfrac{x}{y}$ の親とする。$w_1 = w\left(\dfrac{p}{q}\right)$, $w_2 = w\left(\dfrac{r}{s}\right)$ とおくと，$\ell(w_1) < d$, $\ell(w_2) < d$ であるから，帰納法の仮定により

$$\underline{\mathtt{i}}(w_1) = w\left(\frac{q-p}{q}\right), \quad \underline{\mathtt{i}}(w_2) = w\left(\frac{s-r}{s}\right)$$

となる。$s(q-p)-q(s-r)=-sp+rq=1$ であるから，$\dfrac{s-r}{s},\dfrac{q-p}{q}$ は Farey 隣数である。定義より

$$w=w_1\vee w_2=\begin{cases}\mathrm{L}w_2 & (\ell(w_1)<\ell(w_2)\text{ のとき}),\\ \mathrm{R}w_1 & (\ell(w_1)>\ell(w_2)\text{ のとき})\end{cases}$$

であるから

$$\underline{\mathtt{i}}(w)=\underline{\mathtt{i}}(w_1\vee w_2)=\begin{cases}\mathrm{R}\underline{\mathtt{i}}(w_2) & (\ell(w_1)<\ell(w_2)\text{ のとき}),\\ \mathrm{L}\underline{\mathtt{i}}(w_1) & (\ell(w_1)>\ell(w_2)\text{ のとき})\end{cases}$$

となる。一方，

$$\underline{\mathtt{i}}(w_2)\vee\underline{\mathtt{i}}(w_1)=\begin{cases}\mathrm{L}\underline{\mathtt{i}}(w_1) & \big(\ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_2)\big)<\ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_1)\big)\text{ のとき}\big),\\ \mathrm{R}\underline{\mathtt{i}}(w_2) & \big(\ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_2)\big)>\ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_1)\big)\text{ のとき}\big)\end{cases}$$

である。$\ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_1)\big)=\ell(w_1),\ \ell\big(\underline{\mathtt{i}}(w_2)\big)=\ell(w_2)$ であるから

$$\underline{\mathtt{i}}(w_2)\vee\underline{\mathtt{i}}(w_1)=\underline{\mathtt{i}}(w_1\vee w_2)$$

が成立する。さらに，

$$\underline{\mathtt{i}}(w_2)\vee\underline{\mathtt{i}}(w_1)=w\Big(\frac{s-r}{s}\oplus\frac{q-p}{q}\Big)=w\Big(\frac{s+q-r-p}{s+q}\Big)=w\Big(\frac{y-x}{y}\Big)$$

であるから

$$\underline{\mathtt{i}}(w)=\underline{\mathtt{i}}(w_1\vee w_2)=\underline{\mathtt{i}}(w_2)\vee\underline{\mathtt{i}}(w_1)=w\Big(\frac{y-x}{y}\Big)$$

である。よって，故に，長さ d の LR 語 w に対して (1) が成り立つ。

(2) LR 語の長さに関する帰納法で示す。

I. 長さ 1 以下の LR 語に対して補題の等式が成立すること：

長さ 1 以下の LR 語は $\emptyset,\ \mathrm{L},\mathrm{R}$ の 3 つである。それぞれについて対応する既約分数は $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$ である。

- $w=\emptyset$ のとき，$\dfrac{1}{2}$ の親は $\Big(\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1}\Big)$ であり，$\underline{\mathtt{r}}(w)=\emptyset=w\Big(\dfrac{1}{2}\Big),\ \underline{\mathtt{ir}}(w)=\emptyset=w\Big(\dfrac{1}{2}\Big).$
- $w=\mathrm{L}$ のとき，$\dfrac{1}{3}$ の親は $\Big(\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{2}\Big)$ であり，$\underline{\mathtt{r}}(w)=\mathrm{L}=w\Big(\dfrac{1}{3}\Big),\ \underline{\mathtt{ir}}(w)=\mathrm{R}=w\Big(\dfrac{2}{3}\Big).$
- $w=\mathrm{R}$ のとき，$\dfrac{2}{3}$ の親は $\Big(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1}\Big)$ であり，$\underline{\mathtt{r}}(w)=\mathrm{R}=w\Big(\dfrac{2}{3}\Big),\ \underline{\mathtt{ir}}(w)=\mathrm{L}=w\Big(\dfrac{1}{3}\Big).$

いずれの場合も補題の等式を満たしている。

Ⅱ. 長さ d 未満の LR 語に対して補題の等式が成立すると仮定する。w を長さ d の LR 語とする。$w_1=w\Big(\dfrac{p}{q}\Big),\ w_2=w\Big(\dfrac{r}{s}\Big)$ とおく。

① $\ell(w_1)>\ell(w_2)$ のとき，$w=\mathrm{R}w_1$ である。

$\ell(w_1)>\ell(w_2)$ より $p\geq r,\ q\geq s$, かつ，$\dfrac{p-r}{q-s},\dfrac{r}{s}$ は Farey 隣数であり，$\dfrac{p}{q}=\dfrac{p-r}{q-s}\oplus\dfrac{r}{s}$ を満たす。$\ell(w_1)=d-1<d$ であるから，帰納法の仮定より

$$\underline{\mathtt{r}}(w_1)=w\Big(\frac{q-s}{q}\Big),\qquad \underline{\mathtt{ir}}(w_1)=w\Big(\frac{s}{q}\Big)$$

が成り立つ。よって，

$$\underline{\mathtt{r}}(w)=\underline{\mathtt{r}}(w_1)\mathrm{R}=w\Big(\frac{q-s}{q}\Big)\mathrm{R}=w\Big(\frac{(q-s)+(q-(q-s))}{q+(q-(q-s))}\Big)=w\Big(\frac{q}{q+s}\Big)=w\Big(\frac{q}{y}\Big),$$
$$\underline{\mathtt{ir}}(w)=\underline{\mathtt{ir}}(w_1)\mathrm{L}=w\Big(\frac{s}{q}\Big)\mathrm{L}=w\Big(\frac{s}{s+q}\Big)=w\Big(\frac{s}{y}\Big)$$

を得る。

② $\ell(w_1)<\ell(w_2)$ のとき，$w=\mathrm{L}w_2$ である。

$\ell(w_1)<\ell(w_2)$ より $p\le r,\ q\le s,$ かつ，$\dfrac{p}{q},\dfrac{r-p}{s-q}$ は Farey 隣数であり，$\dfrac{r}{s}=\dfrac{p}{q}\oplus\dfrac{r-p}{s-q}$ を満たす。$\ell(w_2)=d-1<d$ であるから，帰納法の仮定より

$$\underline{\mathtt{r}}(w_2)=w\Big(\frac{q}{s}\Big),\qquad \underline{\mathtt{ir}}(w_1)=w\Big(\frac{s-q}{s}\Big)$$

が成り立つ。よって，

$$\underline{\mathtt{r}}(w)=\underline{\mathtt{r}}(w_2)\mathrm{L}=w\Big(\frac{q}{s}\Big)\mathrm{L}=w\Big(\frac{q}{q+s}\Big)=w\Big(\frac{q}{y}\Big)=w\Big(\frac{q}{y}\Big),$$
$$\underline{\mathtt{ir}}(w)=\underline{\mathtt{ir}}(w_2)\mathrm{L}=w\Big(\frac{s-q}{s}\Big)\mathrm{L}=w\Big(\frac{(s-q)+(s-(s-q))}{s+(s-(s-q))}\Big)=w\Big(\frac{s}{s+q}\Big)=w\Big(\frac{s}{y}\Big)$$

を得る。これで帰納法が完成し，補題の証明が終わった。 □

例 2-34 $w=\mathrm{LLRR}$ の場合

$$\underline{\mathtt{i}}(w)=\mathrm{RRLL},\quad \underline{\mathtt{r}}(w)=\mathrm{RRLL},\quad \underline{\mathtt{ir}}(w)=\mathrm{LLRR}$$

である。w は $\dfrac{7}{10}$ に対応しており，$\dfrac{7}{10}=\dfrac{2}{3}\oplus\dfrac{5}{7}$ であるから，これらはそれぞれ次の既約分数に対応している。

	w	$\underline{\mathtt{i}}(w)$	$\underline{\mathtt{r}}(w)$	$\underline{\mathtt{ir}}(w)$
LR 語	LLRR	RRLL	RRLL	LLRR
対応する既約分数	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

演習 2-2 $w=\mathrm{LRRLL}$ に対して，$\underline{\mathtt{i}}(w),\underline{\mathtt{r}}(w),\underline{\mathtt{ir}}(w)$ を求め，それぞれに対応する有理数を求めよ。

● 2-7：1 より大きい有理数に対する 3 つの作用素 $\underline{\mathtt{i}},\underline{\mathtt{r}},\underline{\mathtt{ir}}$

$\alpha=\dfrac{p}{q}>1$ を満たす有理数とし，その両親を $\Big(\dfrac{s}{y},\dfrac{r}{x}\Big)$ とおく。このとき，

(2.17) $$\underline{\mathtt{i}}(\alpha):=\frac{p}{p-q},\quad \underline{\mathtt{r}}(\alpha):=\frac{p}{r},\quad \underline{\mathtt{ir}}(\alpha):=\frac{p}{s}$$

と定める。

補題 2-35 $\alpha=[c_1,\dots,c_l]^-\in(1,\infty)\cap\mathbb{Q}\ (l\ge 2,\ c_j\in\mathbb{N},\ c_j\ge 2\ (j=1,2,\dots,l))$ に対して次が成り立つ。

(1) $\underline{\mathtt{i}}(\alpha)=\dfrac{1}{[1,c_1,\dots,c_l]^-}.$

(2) $\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = [c_l, \ldots, c_1]^-$.

(3) $\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \dfrac{1}{[1, c_l, \ldots, c_1]^-}$.

(**証明**)

(1) は次の式変形から得られる。

$$\frac{1}{[1, c_1, \ldots, c_l]^-} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{[c_1, \ldots, c_l]^-}} = \frac{[c_1, \ldots, c_l]^-}{[c_1, \ldots, c_l]^- - 1} = \frac{\dfrac{p}{q}}{\dfrac{p}{q} - 1} = \frac{p}{p-q} = \underline{\mathtt{i}}(\alpha).$$

(3) は (1) と (2) を合わせれば得られるから，(2) を示す。l に関する帰納法で示す。

● $l = 2$ のとき

$$\alpha = [c_1, c_2]^- = \frac{c_1 c_2 - 1}{c_2}$$

であり

$$\alpha = \frac{c_1 c_2 - 1 - c_1}{c_2 - 1} \oplus \frac{c_1}{1}$$

であるから，

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \frac{c_1 c_2 - 1}{c_1} = [c_2, c_1]^-$$

となる。よって，(2) の等式は成立する。

● $l \geq 3$ とし，$l-1$ のとき (2) の等式が成立していると仮定する。

$\alpha = [c_1, \ldots, c_l]^-$ に対して，

$$\beta = [c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1]^-, \quad \gamma = [c_1, \ldots, c_{l-1}]^-$$

とおくと，$l \geq 3$ であるから，補題 1-19 より，$\alpha = \beta \oplus \gamma$ となる。$\alpha = \dfrac{p}{q}$, $\gamma = \dfrac{r}{x}$ と表わす。帰納法の仮定を $\gamma = [c_1, \ldots, c_{l-1}]^-$ に適用すると

$$\underline{\mathtt{r}}(\gamma) = [c_{l-1}, \ldots, c_1]^-$$

となる。

▶ $l - 1 > 2$, すなわち，$l > 3$ のとき：

補題 1-19 より，

$$\gamma = [c_1, \ldots, c_{l-2}, c_{l-1} - 1]^- \oplus [c_1, \ldots, c_{l-2}]^-$$

と表わされる。よって，$\underline{\mathtt{r}}(\gamma)$ の定義より

$$\underline{\mathtt{r}}(\gamma) = \frac{r}{([c_1, \ldots, c_{l-2}]^- \text{ の分子})}$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
[c_l, c_{l-1}, \ldots, c_1]^- &= c_l - \frac{1}{[c_{l-1}, \ldots, c_1]^-} \\
&= c_l - \frac{1}{r(\gamma)} \\
&= \frac{c_l r - ([c_1, \ldots, c_{l-2}]^- \text{ の分子})}{r}
\end{aligned}$$

となる。これが $\underline{\mathtt{r}}(\alpha)=\dfrac{p}{r}$ に一致することを示すには

$$(*)\qquad p=c_l r-([c_1,\ldots,c_{l-2}]^- \text{ の分子})$$

となることを示せばよい。$k=1,2,\ldots,l$ に対して $r_k,s_k,t_k,u_k\in\mathbb{Z}$ を

$$M^-(c_1,\ldots,c_k)=\begin{pmatrix} r_k & t_k \\ s_k & u_k \end{pmatrix}$$

により定めると，命題 1-15 より

$$t_k=-r_{k-1},\quad u_k=-s_{k-1},\quad \frac{r_k}{s_k}=[c_1,\ldots,c_k]^-$$

が成り立つ。但し，$k=1$ のとき $r_{k-1}=1,\ s_{k-1}=0$ と考える。ここで，$M^-(c_1,\ldots,c_k)$ の行列式は 1 であるから r_k,s_k は互いに素，したがって，r_k は $[c_1,\ldots,c_{l-2}]^-$ の分子に一致することに注意する。

$M^-(c_1,\ldots,c_l)=M^-(c_1,\ldots,c_{l-1})M^-(c_l)$ の $(1,1)$-成分を比較して，$r_l=c_l r_{l-1}-r_{l-2}$ を得る。$r_l=p,\ r_{l-1}=r,\ r_{l-2}=([c_1,\ldots,c_{l-2}]^-$ の分子$)$ であるから，$(*)$ は成り立つ。

▶ $l-1=2$, すなわち，$l=3$ のとき：

直接計算により

$$[c_3,c_2,c_1]^-=\frac{c_1c_2c_3-c_1-c_3}{c_1c_2-1}$$

であり，一方，

$$\frac{r}{x}=\gamma=[c_1,c_2]^-=\frac{c_1c_2-1}{c_2}$$

より，$r=c_1c_2-1$ であり

$$\frac{p}{q}=\alpha=[c_1,c_2,c_3]^-=\frac{c_1c_2c_3-c_1-c_3}{c_2c_3-1}$$

であるから，$p=c_1c_2c_3-c_1-c_3$ である。よって，

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha)=\frac{p}{r}=\frac{c_1c_2c_3-c_1-c_3}{c_1c_2-1}=[c_3,c_2,c_1]^-$$

を得る。 □

次の補題は次節以降で必要になる。

補題 2-36 1 より大きい有理数 α,β が Farey 隣数であるとする。α,β の Farey 和 $\alpha\oplus\beta$ を負連分数展開する：$\alpha\oplus\beta=[c_1,c_2,\ldots,c_l]^-$. このとき，

$$(2.18)\qquad c_l=\left\lceil\frac{N(\alpha)}{N(\beta)}\right\rceil+1$$

である。ここで，$\lceil\alpha\rceil=\min\{\,n\in\mathbb{Z}\mid\alpha\le n\,\}$ (天井関数) であり，$N(\alpha),N(\beta)$ はそれぞれ α,β を既約分数で表わしたときの分子を表わす。さらに，

$$N(\alpha)<N(\beta)\iff c_l=2$$

が成り立つ。

(**証明**)

$\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{r}{s}$ とおくと，$\underline{\mathtt{r}}(\alpha \oplus \beta) = \frac{p+r}{r} = \frac{p}{r} + 1$ である。また，$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ $(l \geq 2,\ c_j \in \mathbb{N},\ c_j \geq 2\ (j = 1, 2, \ldots, l))$ のとき

$$\underline{\mathtt{r}}(\alpha \oplus \beta) = [c_l, \ldots, c_1]^- = c_l - \frac{1}{[c_{l-1}, \ldots, c_1]^-}$$

である。よって，

$$\frac{p}{r} + 1 = c_l - \frac{1}{[c_{l-1}, \ldots, c_1]^-}$$

を得る。両辺の整数部分を比較して

$$\left\lceil \frac{p}{r} \right\rceil + 1 = c_l$$

を得る。

後半の主張を示す。$a = N(\alpha)$, $b = N(\beta)$ とおく。先に示したように，$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = c_l - 1$ となる。これは $\min\{\ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{a}{b} \leq n\ \} = c_l - 1$ となることに同値であり，さらにこれは $\frac{a}{b} \leq c_l - 1$ かつ $\frac{a}{b} > c_l - 2$ となることに同値である。よって，$c_l = 2$ ならば $\frac{a}{b} \leq 1$ となる。$a = b$ のときは規約性から $a = b = 1$ のときであり，この場合，$\alpha = \dfrac{1}{1}$, $\beta = \dfrac{1}{0} = \infty$ となる。β は有理数でなくなるので，$a \neq b$ でなければならない。よって，$c_l = 2$ ならば $\frac{a}{b} < 1$ となる。

$c_l \geq 3$ ならば，$\frac{a}{b} > c_l - 2 \geq 1$ となる。つまり，$a > b$ である。 □

次は，α が 1 より大きい有理数の場合の命題 2-26 に相当する結果である。

命題 2-37 有理数 $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ に対して，

(1) $\underline{\mathtt{ir}}(\alpha) = \begin{cases} [1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1] & (n \text{ が奇数のとき}), \\ [a_n, \ldots, a_1] & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$

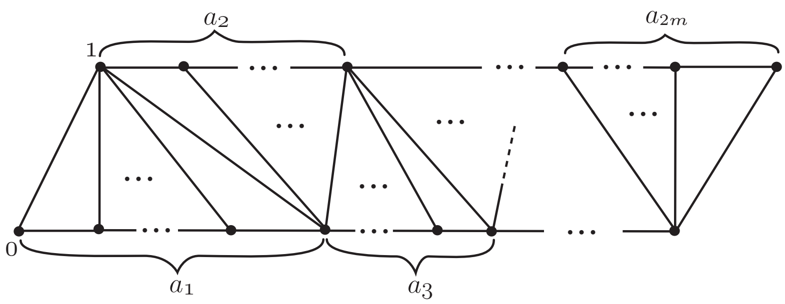
(2) $\underline{\mathtt{i}}(\alpha) = [1, a_1 - 1, a_2, \ldots, a_n]$.

(3) $\underline{\mathtt{r}}(\alpha) = \begin{cases} [a_n, \ldots, a_1] & (n \text{ が奇数のとき}), \\ [1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1] & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases}$

演習 2-3 上の命題を証明せよ。

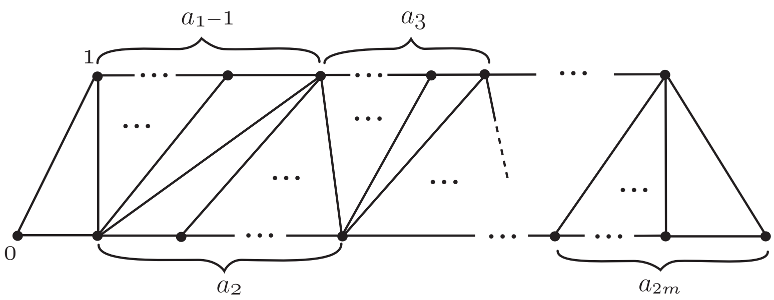
有理数 $\alpha > 1$ を $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]$ $(a_1, a_2, \ldots, a_{2m} \in \mathbb{N})$ のように表わす。このとき，対応する Farey ボートは次図のようになる：

FBT(α) =

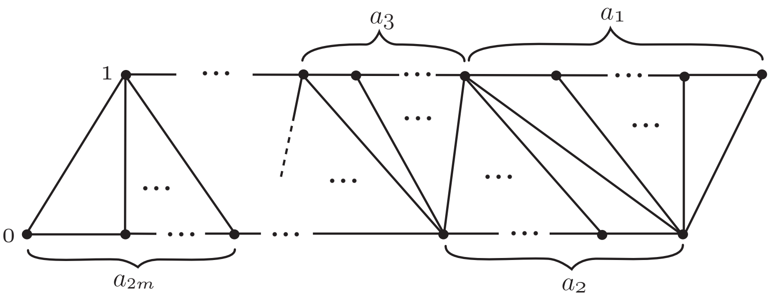


命題 2-37 により，$\underline{\mathtt{i}}(\alpha)$ に対応する Farey ボートは $\mathrm{FBT}(\alpha)$ から，左端の外部三角形は固定したまま，残りの三角形分割を水平線に関して鏡映すると得られ，$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ に対応する Farey ボートは $\mathrm{FBT}(\alpha)$ を 180° 回転したものになっていることがわかる。

$\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{i}}(\alpha)) =$

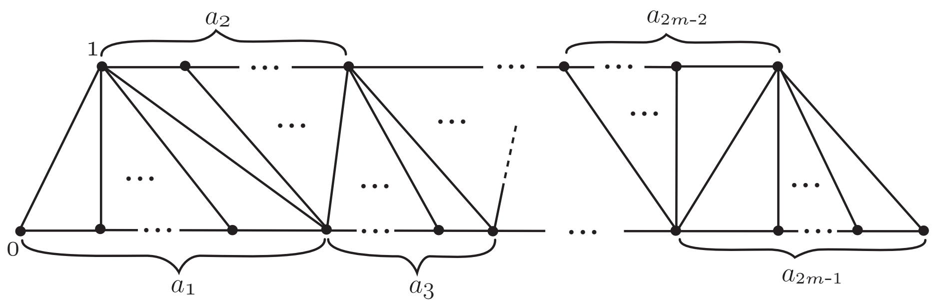


$\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)) =$



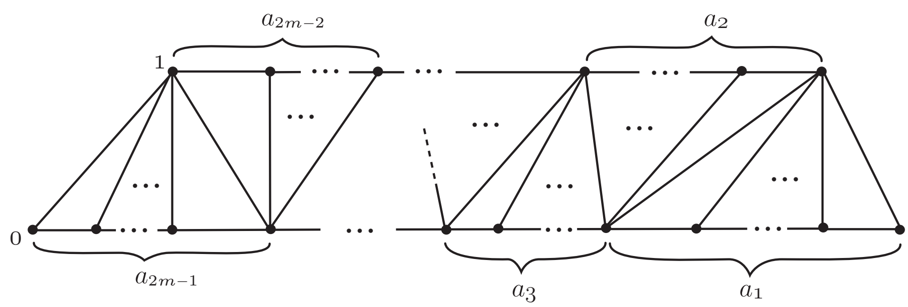
$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}]$ $(a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1} \in \mathbb{N})$ のように表わした場合も同様に Farey ボートは定義される：

$\mathrm{FBT}(\alpha) =$



命題 2-37 により，

$\mathrm{FBT}(\underline{\mathtt{r}}(\alpha)) =$



となる。

§3. フリーズパターン・結び目の分類から Jones 多項式へ

3 次元空間内の自己交差のない閉曲線を結び目といい，有限個の結び目が絡まっているものを絡み目という。絡み目の中に有理絡み目と呼ばれるクラスがあり，それは有理数の連分数展開を用いて定義される。2 つの有理絡み目がいつ同値になるか，すなわち，連続変形により互いに移り合うかという問題は Schubert により解かれている。この節の前半では，その結果を用いて，ジグザグ型 CCF は鏡像を無視した有理絡み目と 1 対 1 に対応することを証明する。

後半では，有向絡み目の代表的な不変量である Jones 多項式を導入する。定数項が 1 になるように，Jones 多項式をその最低次の項で割ることにより得られる正規化された Jones 多項式を扱う。正規化された Jones 多項式は，Lee と Schifler [39] による有理絡み目の Jones 多項式の研究に促され，Morier-Genoud と Ovsienko [44] において明示的に導入された。この節では，Thistlethwaite [68] によって導入された + adequate と呼ばれる概念を用いて，有理絡み目とは限らない，一般の絡み目の正規化された Jones 多項式を計算するための漸化式を導き，その漸化式から [44] における計算公式を導く。

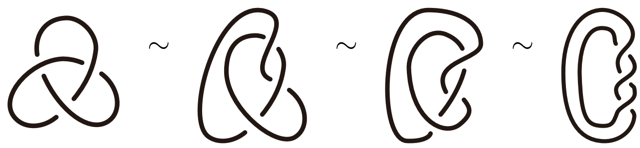
結び目に関する基本事項については，[1, 28, 48, 72] 等を参照されたい。

● 3 - 1 : 有理絡み目とその分類

結び目 (knot) とは，ひもの両端を繋げて輪の形にした，3 次元空間内の自己交差のない曲線のことであり，厳密には単位円周 $\mathbb{S}^1$ の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みのことをいう。互いに交わらない有限個の結び目は，その全体をひとまとめとして見るとき，**絡み目** (link) と呼ばれる。絡み目が r 個の結び目からできているとき，r-成分の絡み目と呼び，r を**成分数**という。

三葉結び目　8 の字結び目　ホップ絡み目　ボロミアン環

2 つの絡み目は途中で自己交叉が生じない連続変形の下で移り合うとき，**同値**と呼ばれる。例えば，次のような変形が可能である。

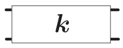


同値な絡み目は同じ絡み目とみなす。

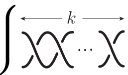
2 つの絡み目がいつ同値になるかという問題は結び目理論の基本問題であるが，これを解くことは難しい。

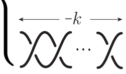
しかし，有理絡み目と呼ばれる有理数に付随して与えられる絡み目のクラスに対しては，後述するように分類結果が知られている。

有理絡み目は以下のように定義される。

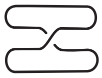
整数 k に対して 

 $=$ $\begin{cases} \text{} & (k \geq 0), \\ \text{} & (k < 0) \end{cases}$





とする。有理数 $\alpha > 0$ に対して，絡み目 $C(\alpha)$ を次の図で定め，**有理絡み目** (rational link) または **2 橋絡み目** (two-bridge link) と呼ぶ。

(1) $\alpha = 1$ のとき 

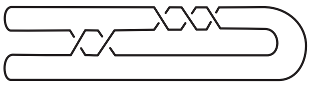
(2) $0 < \alpha < 1$ のとき $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ と表わし

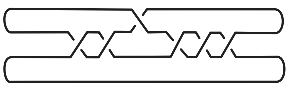
- n が偶数のとき 

- n が奇数のとき 

(3) $\alpha > 1$ のとき $\overline{C(\alpha^{-1})}$ ($\overline{}$ は鏡像 (= 各交差の上下を入れ替える操作) を表わす)

(4) $\alpha < 0$ のとき $\overline{C(\alpha)}$

例 3-1 (1) $\dfrac{3}{7} = [0, 2, 3]$ より $C\left(\dfrac{3}{7}\right) =$ 

(2) $\dfrac{4}{11} = [0, 2, 1, 3]$ より $C\left(\dfrac{4}{11}\right) =$ 

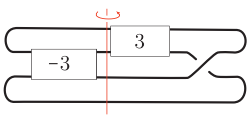
有理絡み目同士がいつ同値になるかという問題は，次の定理のように，すでに知られている。

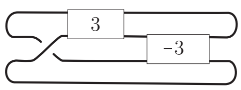
定理 3-2 (Schubert の有理絡み目の分類定理 [66]) 有理絡み目 $C\left(\dfrac{p}{q}\right)$, $C\left(\dfrac{p'}{q'}\right)$ が同値であるための必要十分条件は，次の 2 条件が成り立つことである。

① $q = q'$

② $pp' \equiv 1 \pmod{q}$ または $p \equiv p' \pmod{q}$.

例 3-3 $4 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{13}$ より，$C\left(\dfrac{4}{13}\right)$ と $C\left(\dfrac{10}{13}\right)$ は同値である。実際,

$C\left(\dfrac{4}{13}\right) =$ 

 $=$ 

 $= C\left(\dfrac{10}{13}\right)$

定理 3-2 はレンズ空間と呼ばれる 3 次元多様体の分類に帰着させて証明される。詳細は [28; 特講 S.2] を参照して欲しい。

Schubert の有理絡み目の分類定理から次の結果を導くことができる。

定理 3-4 (Kogiso and W. [34]) 有理数 $\alpha = \dfrac{p}{q}$ $(q > p > 0,\ q \geq 2)$ と $p' \in \{1, \ldots, q-1\}$ に対して，$C\left(\dfrac{p'}{q}\right)$ が $C(\alpha)$ または鏡像 $\overline{C(\alpha)}$ に同値であるための必要十分条件は，$\dfrac{p'}{q}$ が $\alpha, \underline{\mathtt{i}}(\alpha), \underline{\mathtt{r}}(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ のいずれかに一致することである。

(**証明**)

• $\beta=\underline{\mathtt{i}}(\alpha)$ のとき，$\beta=\dfrac{q-p}{q}$ である。このとき，

$$q-p\equiv -p \pmod q$$

であるから，Schubert の分類定理より，$C(\underline{\mathtt{i}}(\alpha))$ は $C\Big(\dfrac{-p}{q}\Big)=C(-\alpha)=\overline{C(\alpha)}$ と同値である。

• $\beta=\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ のとき，$\Big(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{s}\Big)$ を α の親とすると，$\beta=\dfrac{s}{q}$ となる。$\alpha=\dfrac{x}{r}\oplus\dfrac{y}{s}$ より

$$\begin{cases} q=r+s, \\ p=x+y, \\ ry-xs=1 \end{cases}$$

が成立する。$p=x+y$ は奇数であるから x,y の一方は偶数で，もう一方は奇数である。よって，

(i) $pr=(x+y)r=xr+1+xs=x(r+s)+1=qx+1\equiv 1 \pmod q$

(ii) $ps=(x+y)s=ry-1+ys=-1+(r+s)y=-1+qy\equiv -1 \pmod q$

となる。(ii) より，$(-p)s\equiv 1 \pmod q$ となるから，Schubert の分類定理より，$C\big(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)\big)$ は $C\Big(\dfrac{-p}{q}\Big)=C(-\alpha)=\overline{C(\alpha)}$ と同値である。

• $\beta=\underline{\mathtt{r}}(\alpha)$ のとき，$\Big(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{s}\Big)$ を α の親とすると，$\beta=\dfrac{r}{q}$ となる。(i) と Schubert の分類定理より，$C\big(\underline{\mathtt{r}}(\alpha)\big)$ は $C(\alpha)$ と同値である。

以上より，$C(\underline{\mathtt{i}}(\alpha))$ と $C\big(\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)\big)$ は $\overline{C(\alpha)}$ と同値であり，$C(\underline{\mathtt{r}}(\alpha))$ は $C(\alpha)$ と同値である。

逆に，$p'\in\{1,\dots,q-1\}$ が $pp'\equiv\pm 1 \pmod q$ または $p\equiv\pm p' \pmod q$ を満たしていると仮定する。

• $pp'\equiv 1 \pmod q$ のとき

$$pp'=xq+1 \quad (x\in\mathbb{Z})$$

と書くことができる。$pp'>0$ であるから $x\geq 0$ であり，$p'<q$ より $x<p$ である。さらに，

$$\frac{p}{q}=\frac{x}{p'}\oplus\frac{p-x}{q-p'}$$

と書けて，

$$p'(p-x)-x(q-p')=p'p-xq=1$$

を満たす。したがって，$\Big(\dfrac{x}{p'},\dfrac{p-x}{q-p'}\Big)$ は α の親であり，$\underline{\mathtt{r}}(\alpha)=\dfrac{q-p'}{q}$，$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)=\dfrac{p'}{q}$ となる。

• $pp'\equiv -1 \pmod q$ のとき

$$pp'=yq-1 \quad (y\in\mathbb{Z})$$

と書くことができる。$pp'>0$ であるから $y\geq 0$ であり，$p'<q$ より $y\leq p$ である。さらに，

$$\frac{p}{q}=\frac{p-y}{q-p'}\oplus\frac{y}{p'}$$

と書けて

$$(q-p')y-(p-y)p'=qy-p'p=1$$

を満たす。したがって，$\Big(\dfrac{p-y}{q-p'},\dfrac{y}{p'}\Big)$ は α の親であり，$\underline{\mathtt{r}}(\alpha)=\dfrac{p'}{q}$，$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)=\dfrac{q-p'}{q}$ となる。

● $p \equiv p'$ (mod q) のとき，$p, p' \in \{1, \ldots, q-1\}$ なので，$p = p'$ となる。よって，$\alpha = \dfrac{p'}{q}$ と表わされる。

● $p \equiv -p' \pmod q$ のとき

$$q - p' \equiv p \pmod q$$

である。$p' \in \{1, \ldots, q-1\}$ より $1 \leq q - p' < q$ を満たしているから，$q - p' = p$ である。よって，$\underline{\mathtt{i}}(\alpha) = \dfrac{q-p}{q} = \dfrac{p'}{q}$ となる。

いずれの場合も $\dfrac{p'}{q}$ は $\alpha, \underline{\mathtt{i}}(\alpha), \underline{\mathtt{r}}(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$ のどれかの形に表わされる。 □

● 3-2：ジグザグ型 CCF と有理絡み目の分類

ジグザグ型CCFの全体は，定理2-32より $\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ から定まる 4 組 $\{\alpha, \underline{\mathtt{i}}(\alpha), \underline{\mathtt{r}}(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)\}$ の全体と 1 対 1 に対応するから，定理3-4 より次の結果が従う。

系 3-5 (Kogiso and W. [34]) ジグザグ型 Conway-Coxeter フリーズの全体は，有理絡み目の集合 $\{C(\alpha), \overline{C(\alpha)}\}$ の全体と 1 対 1 に対応する。

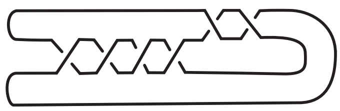
例 3-6

$$\left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9} \text{ に対応する CCF}\right) \longleftrightarrow \left\{C\left(\frac{2}{9}\right), \overline{C\left(\frac{2}{9}\right)}\right\}$$

$\|$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & \\
\hline
\cdots & & 2 & & 5 & & 1 & \\
 & 1 & & 9 & & 4 & & \cdots \\
\cdots & & 4 & & 7 & & 3 & \\
 & 3 & & 3 & & 5 & & \cdots \\
\cdots & & 2 & & 2 & & 3 & \\
\hline
 & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

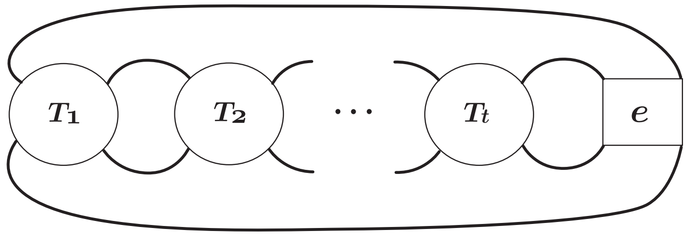
$\|$



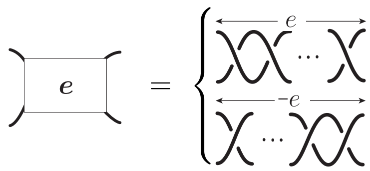
注意 3-7 系3-5の発見には作間誠先生からいただいたコメントが大きく関わっている。2018年10月20日に平澤美可三氏が主催された Knotting Nagoya 2018–結び目の数理セミナー–において CCF や祖先三角形に関する話をさせていただいた。そのセミナーに参加してくださった作間先生から，ジグザグ型 CCF は，話を聞けば聞くほど，(鏡映を同一視した) 有理絡み目そのもののように思える，というようなコメントをいただいた。その言葉をきっかけに調べたところ，定理3-4 を証明することができ，系3-5にあるようなジグザグ型 CCF の分類結果を得ることができた。

問題 3-8 ジグザジ型でない CCF に対応する絡み目はあるか？ Montesinos 絡み目はそのような絡み目だろうか？

注意 3-9 **Montesinos 絡み目**とは，次の形をした図式 $M(T_1, \ldots, T_t; e)$ を持つ絡み目のことをいう。

(3.1) $M(T_1,\ldots,T_t;e) =$ 

ここで，$e\in\mathbb{Z}$ であり，



$(e\geq 0)$,

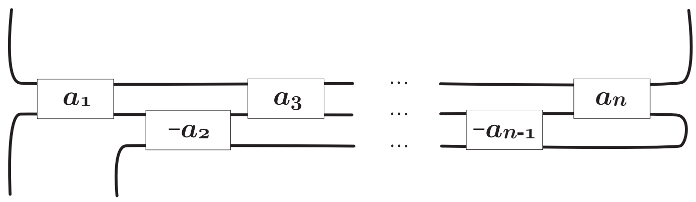
$(e<0)$

であり，$T_1,\ldots,T_t$ は整数タングルでない有理タングルである。有理数 α に対応する**有理タングル** (rational tangle) とは，α を

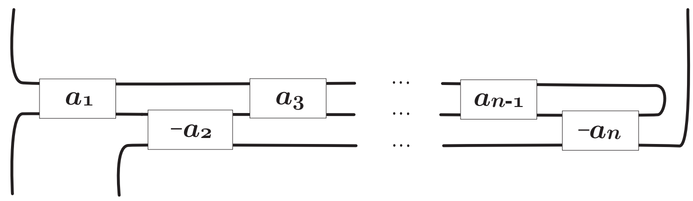
$$\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_n] \qquad (a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z})$$

のように有限連分数展開して，次の図式 $T(\alpha)$ によって定まるタングルのことをいう：

- n が奇数のとき

(3.2) $T(\alpha) =$ 

- n が偶数のとき

(3.3) $T(\alpha) =$ 

$\alpha=[a_1]$ のとき，$T(\alpha)$ を**整数タングル** (integral tangle) と呼ぶ。

T_i $(i=1,\ldots,t)$ が有理数 $\alpha_i=\dfrac{p_i}{q_i}$ (p_i,q_i は互いに素) に対応する有理タングルであるとき，$M(T_1,\ldots,T_t;e)$ を $M((q_1,p_1),\ldots,(q_t,p_t);e)$ により表わす。

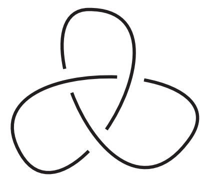
Montesinos 絡み目は，$t=1$ ならば有理絡み目であるが，$t=2$ のときもそうである。詳しくは次が成り立つ ([9; Lemma 2.1], [70; Lemma 3])：Montesinos 絡み目 $M((q_1,p_1),(q_2,p_2);0)$ は有理絡み目であり，それは，$q_2x-p_2y=1$ を満たす任意の整数 x,y に対して，$C\Big(\dfrac{q_1p_2+p_1q_2}{xq_1+yp_1}\Big)$ に同値である。

問題 3-8 に関連して，この結果を用いることで既存の結果に新しい視点を与えたり，面白い結果が得られないだろうか？ これに関連する結果を扱った文献として，祖先三角形の分割と結合操作に関する富田誠による修士論文 [69] がある。

● 3-3：Kauffman ブラケット多項式

2 つの絡み目が同値であるか否かを判定することは難しい問題であるが，各絡み目 L に対して連続変形の下では変化しない数や多項式などの量 $I(L)$ を定めることができれば，その値の違いから絡み目を区別することができる。すなわち，$I(L_1) \neq I(L_2)$ ならば，L_1 と L_2 は同値でないということができる。このような I は**絡み目不変量** (link invariant) と呼ばれる。不変量 I の構成方法は様々なものが知られているが，ここでは後の節で必要となる Jones 多項式を紹介する。

Jones 多項式のオリジナルの定義では作用素環の表現が使われるが，ここでは Kauffman により再定式化され，広く知れ渡っているブラケット多項式を用いた素朴な定義を説明する。定義のために絡み目図式を用いる。



絡み目図式 (link diagram) とは，空間内の絡み目を平面上に描いた図であって，各交点の近傍における 2 つの小さな曲線の断片のうち，どちらが空間内で上にあり，どちらが下にあるのかがわかるように，下にある方に切れ目を入れたものいう。各絡み目図式 D に対して，**Kauffman ブラケット多項式** (Kauffman bracket polynomial) と呼ばれる，A を不定元とする $\mathbb{Z}$ 係数の Laurent 多項式 $\langle D\rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ が定義される。これは以下の 3 つの規則により計算される。

(KB1) $\langle \times \rangle = A\langle\,)(\,\rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$.

(KB2) $\langle\, D \coprod \bigcirc \,\rangle = \delta\langle D\rangle$, 但し，$\delta = -A^2 - A^{-2}$.

(KB3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

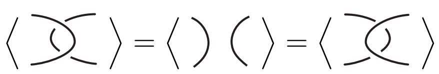
ここで，(KB1) の左辺は任意の絡み目図式の任意の交差点における近傍の様子を表わしており，右辺の 2 項はその交差点部分を，図に描かれているように取り替えることによりその交差を解消した絡み目図式を表わしている。例えば，(KB1) から

が従う。

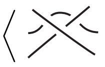
絡み目図式 D の Kauffman ブラケット多項式 $\langle D\rangle$ は**正則イソトピー不変量** (regular isotopy invariant) である。これは，次が成立することを意味する。

(RI1) D は平面上のイソトピー (すなわち，交差点を動かさない平面上の連続変形) の下で不変である。

(RI2) Reidemeister 移動 II の下で不変である。すなわち，



(RI3) Reidemeister 移動 III の下で不変である。すなわち，

$\Big\langle$  $\Big\rangle = \Big\langle$  $\Big\rangle$

一方，Reidemeister 移動 I 移動の下では次が成り立つ。

(3.4) $\Big\langle$  $\Big\rangle = -A^3 \Big\langle \Big| \Big\rangle$, $\Big\langle$  $\Big\rangle = -A^{-3} \Big\langle \Big| \Big\rangle$

よって，$\langle D \rangle$ は絡み目不変量ではない。

例 3-10

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$$= A(-A^3) + A^{-1}(-A^{-3}) = -A^4 - A^{-4} = -A^4(1 + A^{-8}),$$

$\Big\langle$  $\Big\rangle = (-A^{-3})^2 = A^{-6}.$

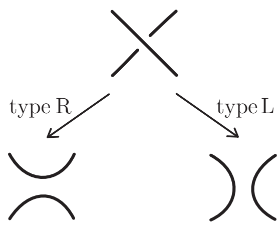
注意 3-11 開区間 $(0,1)$ 内の有理数 α を $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_{2m}]$ $(a_1, \ldots, a_{2m} \in \mathbb{N})$ のように正則連分数展開を行い，α から定まるジグザグ型 CCF $\varGamma_\alpha$ に対して，$\langle \varGamma_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を

$$\langle \varGamma_\alpha \rangle = (-A^{-3})^{a_1 - a_2 + \cdots - a_{2m}} \langle C(\alpha) \rangle$$

により定める。$\langle \varGamma_{\underline{\mathtt{i}}(\alpha)} \rangle, \langle \varGamma_{\underline{\mathtt{r}}(\alpha)} \rangle, \langle \varGamma_{\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)} \rangle$ は $\langle \varGamma_\alpha \rangle$ と一致するか，A を A^{-1} に置き換えたものと一致する。したがって，ジグザグ型 CCF $\varGamma$ に対して $\langle \varGamma \rangle$ が，$A \leftrightarrow A^{-1}$ という置き換えを除いて一意的に定まる。これをジグザグ型 CCF の Kauffman ブラケット多項式という [29,33]。$\langle \varGamma \rangle$ から，$t = A^4$ という置き換えの下で 2 つの Laurent 多項式 $Q_w(t), R_w(t)$ が定まり，これらの多項式から $(0,1)$ 内の有理数の 4 組 $\{\alpha, \underline{\mathtt{i}}(\alpha), \underline{\mathtt{r}}(\alpha), \underline{\mathtt{ir}}(\alpha)\}$ が決まる。このように，Kauffman ブラケット多項式 $\langle \varGamma \rangle$ からジグザグ型 CCF の完全不変量が得られる [33; Theorem 4.5]。

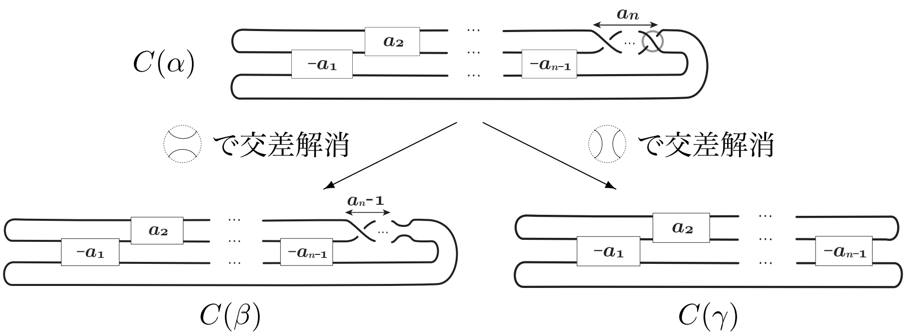
● 3-4：有理絡み目の平滑化と Farey 和との関係

有理絡み目の平滑化と Farey 和の間には明解な関係がある。絡み目図式 D における 1 つの交差点において，右図のように交差を解消する操作を**平滑化** (smoothing) と呼ぶ。平滑化の前後で絡み目は同値でなくなるが，交差点の個数が減るので，絡み目をほどいていくことができる。



$0 < \alpha < 1$ を有理数とし，$\alpha = [0, a_1, \ldots, a_n]$ と表わす。

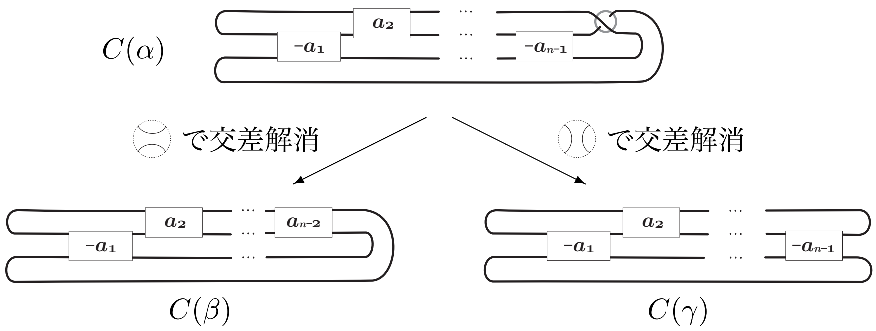
- n が偶数で，$a_n \geq 2$ のとき，$\beta = [0, a_1, \ldots, a_n - 1]$, $\gamma = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ とおくと $\alpha = \beta \oplus \gamma$ となる。一方，$C(\beta), C(\gamma)$ は $C(\alpha)$ から平滑化によって得られる。



したがって，Kauffman ブラケット多項式の間に次の等式が成り立つ：

$$\langle C(\alpha)\rangle = A\langle C(\beta)\rangle + (-1)^{a_n-1}A^{-3(a_n-1)-1}\rangle\langle C(\gamma)\rangle$$

- n が偶数で，$a_n = 1$ のとき，$\beta = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}]$，$\gamma = [0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ は Farey 隣数であり，$\alpha = \beta \oplus \gamma$ となる。一方，



よって，次の等式が成り立つ：

$$\langle C(\alpha)\rangle = (-1)^{a_{n-1}}A^{3a_{n-1}+1}\langle C(\beta)\rangle + A^{-1}\langle C(\gamma)\rangle$$

- n が奇数のときも，$a_n \geq 2$ と $a_n = 1$ のときに分けて考察することができる。

上では，有理絡み目の上記の平滑化操作と有理数の Farey 和分解との関係を眺めたが，それらは例 2-21 で観察したような，ジグザグ型 CCF から最大の整数を通る正弦曲線を抜く操作および祖先三角形から一番下の基本三角形を取り除く操作とも対応している [29, 32, 33]。

● 3-5：Kauffman ブラケット多項式から Jones 多項式へ

2 つの絡み目がいつ同値になるのかは，次の定理により，図式を用いて判定することができる (証明の概略は [48] を参照)。

定理 3-12 (Reidemeister [60]) L_1 と L_2 を絡み目とし，D_1 と D_2 をそれぞれの図式とする。このとき，L_1 と L_2 が同値であるための必要十分条件は，D_1 と D_2 が平面の上のイソトピー，Reidemeister 移動 I, II, III を有限回施すことにより移り合うことである。 □

Kauffman ブラケット多項式から Jones 多項式を定義することができるが，Jones 多項式は有向絡み目に対して定義される不変量である。ここで，**有向絡み目** (oriented link) とは，各連結成分に向きが与えられている絡み目のことであり，2 つの有向絡み目は，向きを込めて連続変

形で移り合うとき**同値** (equivalent) と呼ばれる。図式において，向きは各曲線に矢印を付与することにより表わされる。そのような図式を**有向絡み目図式**と呼ぶ。平面の上のイソトピー，Reidemeister 移動 I, II, III は有向絡み目図式に対して定義され，上述の Reidemeister の定理は，有向絡み目と有向絡み目図式に対して成立する。

空間内の有向絡み目 L の図式 D の**ライズ（ひねり数）** (writhe) とは，各交点 p の**符号** $\varepsilon(p)$ を

負の交点　　　　正の交点

$$\varepsilon(p)=\begin{cases}+1 & (p \text{ が正の交点のとき}),\\ -1 & (p \text{ が負の交点のとき}).\end{cases}$$

により定めたとき，すべての交点 p に渡る符号の総和のことをいう：

$$\mathrm{wr}(D)=\sum_{p\,:\,\text{crossing of }D}\varepsilon(p). \tag{3.5}$$

このとき，有向絡み目 L の **Jones 多項式** $V_L(t)\in\mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}},t^{-\frac{1}{2}}]$ は，

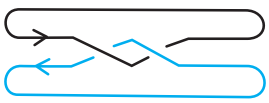
$$V_L(t)=(-A^3)^{-\mathrm{wr}(D)}\langle D\rangle\big|_{A=t^{-\frac{1}{4}}} \tag{3.6}$$

によって与えられる [24,26]。$V_L(t)$ は有向絡み目 L の位相不変量である。すなわち，有向絡み目 L_1 と L_2 が空間内で自己交差せずに連続変形により移り合うとき，$V_{L_1}(t)=V_{L_2}(t)$ となる。

Jones 多項式は次の 2 式 (2 番目の等式はスケイン関係式と呼ばれる) を使って帰納的に計算することができる [26]：

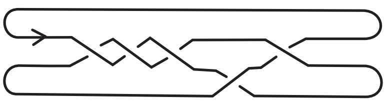
$$V_{\overbrace{\bigcirc\sqcup\cdots\sqcup\bigcirc}^{n}}(t)=(-1)^{n-1}\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} \tag{3.7}$$

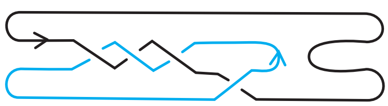
$$t^{-1}V(t)-tV(t)=(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})V(t). \tag{3.8}$$

例 3-13　(1) $C(2)$ =  の Jones 多項式は，(左側の交差に) スケイン関係式用いて

$$V_{C(2)}(t)=t^{-1}\Big(t^{-1}\big(-t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\big)-\big(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\big)\Big)=-t^{-\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。

(2) $C\left(\frac{7}{2}\right)$ =  の Jones 多項式は，スケイン関係式より，

L' = 

とおくと

$$t^{-1}V_{\bigcirc}(t)-tV_{C(\frac{7}{2})}(t)=(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})V_{L'}(t)$$

となる。さらに，

$$t^{-1}V_{C(2)}(t)-tV_{L'}(t)=t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}V_{C(\frac{7}{2})}(t)&=t^{-2}-t^{-1}(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\Big(t^{-2}V_{C(2)}(t)-t^{-1}(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\Big)\\&=t^{-2}-t^{-3}(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(-t^{-\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})+t^{-2}(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^2\\&=-t^{-6}+t^{-5}-t^{-4}+2t^{-3}-t^{-2}+t^{-1}\end{aligned}$$

である。 □

● 3-6：正規化された Jones 多項式

ここからは，このノートの最後まで，q を不定元とする。

有向絡み目 L の Jones 多項式 $V_L(t)$ の最低次の項が $\pm t^m$ で与えられるとき，

$$J_L(q)=\pm(-q)^{-m}V_L(-q) \tag{3.9}$$

によって与えられる q に関する多項式 $J_L(q)$ を L の**正規化された Jones 多項式** (normalized Jones polynomial) と呼ぶ。

この正規化された Jones 多項式は，Morier-Genoud と Ovsienko [44; Appendix A] において明示的に導入されたが，Lee と Schiffler [39] においても同等のものが現れている。なお，彼らは有向有理絡み目 $C(\alpha)$ を $\alpha>1$ の範囲で扱っているが，このノートや [33] では $0<\alpha<1$ の範囲で扱っているために，見かけの正規化の仕方は彼らのものとは異なる（「最低次」は「最高次」に，「$q=-t$」は「$q=-t^{-1}$」に置き換わっている）。しかしながら，上述の正規化の仕方で，このノートにおける $J_\alpha(q)$ は [39, 44] などで与えられている $J_\alpha(q)$ と一致する。

D を絡み目 L の図式とする。

$$\operatorname{maxdeg}\langle D\rangle \quad と \quad \varepsilon_D$$

により，それぞれ Kauffman ブラケット多項式 $\langle D\rangle$ における最高次の次数と最高次の係数を表わすことにする。このとき，

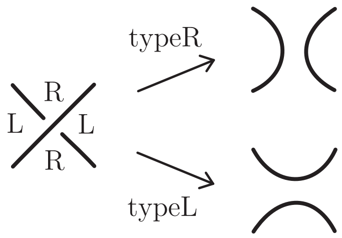
$$J_L(q)=\varepsilon_D A^{-\operatorname{maxdeg}\langle D\rangle}\langle D\rangle\big|_{A=(-q)^{-\frac{1}{4}}} \tag{3.10}$$

が成り立つ。ここで，$(-q)^{-\frac{1}{4}}$ は 4 乗すると $-q^{-1}$ となることを意味する。よって，$J_L(q)$ は L の向きによらない。

Lickorish と Thistlethwaite [40] は，Jones 多項式の研究のために $(\pm)$-adequate 図式の概念を導入し，そのような図式に対して $\langle D\rangle$ の最高次と最低次を求めるための公式を与えた。adequate は辞書によると「適切な」「適合した」という意味がある。

adequate 図式の定義を述べるために，Kauffman ブラケット多項式を計算するために有用な，Kauffman によるステイトの概念を説明する。絡み目図式 D の**状態**または**ステイト** (state) と

は，D の各交差点において，次図のタイプRかまたはタイプLの操作のどちらを行うかを指定したもののことをいう。そのステイトに従って交差を解消した図もステイトと呼ばれる。



ここで，上を通る弧を交差点を中心に反時計回りに回転させて下を通る弧に重ねたときに通過する領域に文字Lを置き，そうでない領域に文字Rを置くとき，タイプLの交差解消はLが開かれる交差解消であり，タイプRはRが開かれる交差解消である。D のステイト全体からなる集合を $\mathrm{State}(D)$ により表わす。

ステイト $S \in \mathrm{State}(D)$ に対して

$$\langle D|S\rangle := A^{(D \text{ から } S \text{ を作るときのタイプ L の交差点の個数}) - (D \text{ から } S \text{ を作るときのタイプ R の交差点の個数})}$$

$$\|S\| := (S \text{ における単純閉曲線の個数})$$

とおく。このとき，

$$\langle D\rangle = \sum_{S\in\mathrm{State}(D)} \langle D|S\rangle \delta^{\|S\|-1} \tag{3.11}$$

が成り立つ。すべての交差点においてRが開かれる交差解消を行って得られる D のステイトを $S_+(D)$ と書き，すべての交差点においてLが開かれる交差解消を行って得られる D のステイトを $S_-(D)$ と書くことにする。

定義 3-14 (Thistlethwaite [68]) D を絡み目図式とする。

(1) D が $+$ **adequate** であるとは，(i) D は少なくとも 1 つの交差点を持ち，(ii) すべての交差点においてRを開く交差解消を行なって得られるステイト $S_+(D)$ において，各交差点で交差解消を行うことにより生じる 2 つの断片が $S_+(D)$ の異なる成分に属するときをいう。

(2) D が $-$ **adequate** であるとは，$+$ adequate の定義において $S_+(D)$ を $S_-(D)$ に置き換えた条件が成立するときをいう。

(3) D が **adequate** であるとは，$+$ adequate であり，$-$ adequate であるときをいう。

絡み目図式 D が**交代的** (alternating) であるとは，D の各成分上の任意の点から出発して一周して戻ってくるとき，交差点を上と下の交互に通過するときをいう。簡単に確かめられるように，交代的絡み目図式は adequate である。有理数 α に対応する有理絡み目の図式 $C(\alpha)$ は交代的なので，adequate である。

命題 3-15 **(Lickorish and Thistlethwaite [40])** D を絡み目図式とし，$c(D)$ を D の交差点数とする。

(1) D が $+$adequate ならば，$\langle D\rangle$ における最高次の項は，

$$(-1)^{\|S_+(D)\|-1}A^{c(D)+2(\|S_+(D)\|-1)}$$

によって与えられる。したがって，特に

$$\operatorname{maxdeg}\langle D\rangle = c(D)+2(\|S_+(D)\|-1), \tag{3.12}$$

$$\varepsilon_D = (-1)^{\|S_+(D)\|-1}. \tag{3.13}$$

(2) D が $-$adequate ならば，$\langle D\rangle$ における最低次の項は，

$$(-1)^{\|S_-(D)\|-1}A^{-c(D)-2(\|S_-(D)\|-1)}$$

によって与えられる。

(**証明**)

D を $+$adequate な絡み目図式とする。D のステイト S に対して $\langle D|S\rangle$ の A の指数を $\mathrm{Exp}\langle D|S\rangle$ により表わす。$S=S_+(D)$ のとき，

$$(\langle D|S_+(D)\rangle\delta^{\|S_+(D)\|-1}\text{ における最高次の項}) = (-1)^{\|S_+(D)\|-1}A^{c(D)+2(\|S_+(D)\|-1)}$$

であるから，$\mathrm{Exp}\langle D|S_+(D)\rangle = c(D)+2(\|S_+(D)\|-1)$ である。

S を S_+ でない D のステイトとすると，D のステイトの有限列 $S_0=S_+, S_1, \ldots, S_k=S$ であって次の条件を満たすものが存在する：各 S_r $(r=1,\ldots,k-1)$ は S_{r-1} から，唯一の交差点において，タイプ R の交差解消をタイプ L の交差解消に置き換えることによって得られる。タイプ R の交差解消をタイプ L の交差解消に置き換えると，単純閉曲線の個数は ±1 変化するから，

$$\|S_r\| = \|S_{r-1}\|\pm 1$$

が成り立つ。よって，

$$\mathrm{Exp}\langle D|S_{r-1}\rangle = c(D)+2(\|S_{r-1}\|-1)$$

と

$$\mathrm{Exp}\langle D|S_r\rangle = c(D)+2(\|S_r\|-1)$$

の差 $\mathrm{Exp}\langle D|S_r\rangle - \mathrm{Exp}\langle D|S_{r-1}\rangle$ は 0 または -4 である。D は $+$adequate であるから，$S_0=S_+(D)$ においては，すべての交差解消おいてその交差付近における 2 つの断片は異なる成分に属する。そのうちの 1 つをタイプ L の交差解消に取り替えると，その交差付近における 2 つの断片は同じ成分に属する。よって，$\|S_1\|=\|S_0\|-1$ となる。したがってまた，$\mathrm{Exp}\langle D|S_1\rangle - \mathrm{Exp}\langle D|S_0\rangle = -4$ となる。故に，$\mathrm{Exp}\langle D|S_1\rangle < \mathrm{Exp}\langle D|S_0\rangle$ であり，任意の r に

対して $\mathrm{Exp}\langle D|S_r\rangle \geq \mathrm{Exp}\langle D|S_{r-1}\rangle$ であるから，任意の r に対して $\mathrm{Exp}\langle D|S_r\rangle < \mathrm{Exp}\langle D|S_0\rangle$ であることがわかる。故に，$\langle D\rangle$ における最高次の項は，

$$(-1)^{\|S_+(D)\|-1}A^{c(D)+2(\|S_+(D)\|-1)}$$

により与えられる。

同様にして，D が $-$adequate な絡み目図式ならば，$\langle D\rangle$ における最低次の項は，

$$(-1)^{\|S_-(D)\|-1}A^{-c(D)-2(\|S_-(D)\|-1)}$$

によって与えられることがわかる。 □

D を $+$adequate な絡み目図式とし，その中の 1 つの正の交差点に着目し，その点において (KB1) を適用する。$m := \mathrm{maxdeg}\langle\,)(\,\rangle$, $n := \mathrm{maxdeg}\langle \asymp \rangle$ とおいて $\langle\,)(\,\rangle$, $\langle \asymp \rangle$ における最高次の係数をそれぞれ $\varepsilon_{)(}$, $\varepsilon_{\asymp}$ で表わす。このとき，命題 3-15 より

$$\mathrm{maxdeg}\langle D\rangle = m+1 \tag{3.14}$$

が成り立つ。よって，$\langle D\rangle = \langle \times \rangle$ における最高次の係数は $\varepsilon_{)(}$ に一致する。したがって，Kauffman ブラケット多項式の漸化式 (KB1) より，

$$\varepsilon_{)(}A^{-m-1}\langle D\rangle = \varepsilon_{)(}A^{-m}\langle\,)(\,\rangle + \varepsilon_{)(}A^{-m-2}\langle \asymp \rangle$$

が成り立つが，左辺は $J_D(q)$ であり，右辺は

$$J_{)(}(q) + \varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp}A^{n-m-2}J_{\asymp}(q)$$

を得る。こうして，次の公式が得られる。

補題 3-16 正規化された Jones 多項式は次の漸化式を満たす：$+$adequate な絡み目図式 D の 1 つの交差点において交差解消を行なったとき，

$$J_{\times}(q) = J_{)(}(q) + \varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp}(-q)^{\frac{m-n+2}{4}}J_{\asymp}(q). \tag{3.15}$$

但し，$m = \mathrm{maxdeg}\langle\,)(\,\rangle$, $n = \mathrm{maxdeg}\langle \asymp \rangle$ であり，$\varepsilon_{)(}$, $\varepsilon_{\asymp}$ はそれぞれ $\langle\,)(\,\rangle$, $\langle \asymp \rangle$ における最高次の項の係数である。

注意 3-17 絡み目図式 D が $+$adequate でない場合，

$$\mathrm{maxdeg}\langle D\rangle \geq \mathrm{maxdeg}\langle\,)(\,\rangle + 1$$

となり，また，$\langle D\rangle = \langle \times \rangle$ における最高次の係数は $\varepsilon_{)(}$ に一致するどうかわからない。しかしながら，D の 1 つの交差点において交差解消を行なったとき，ある整数 k に対して

$$J_{\times}(q) = \pm q^k\big(J_{)(}(q) + \varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp}(-q)^{\frac{m-n+2}{4}}J_{\asymp}(q)\big). \tag{3.16}$$

となることは言える。ここで，m, n, $\varepsilon_{)(}$, $\varepsilon_{\asymp}$ は補題 3-16 と同じものを表わす。

例 3-18　$D=$  に対して，

$$S_-(D)=$$  $,\qquad S_+(D)=$ 

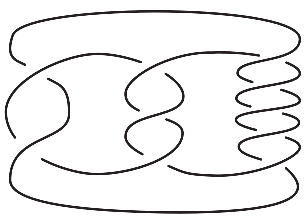
となるので，D は adequate な図式である。例 3-9 より，$m=\operatorname{maxdeg}\Big\langle$  $\Big\rangle=4,\ n=\operatorname{maxdeg}\Big\langle$  $\Big\rangle=-6$ であり，ε  $=-1,\ \varepsilon$  $=1$ である。よって，(3.15) より，

$$J$$  $$(q)=J$$  $$(q)+-(-q)^{\frac{4+6+2}{4}}J$$  $$(q)$$

$$=1+q^2+q^3=1+q^2+q^3$$

となる。

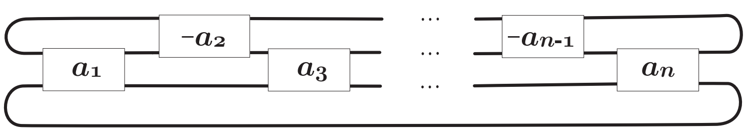
演習 3-1　次の図式 D によって与えられる絡み目 L に対して，$J_L(q)$ を計算せよ。

$D\ =$ 

● 3-7：有理絡み目の正規化された Jones 多項式とその計算

有理絡み目の Jones 多項式を計算する公式については，これまで何人もの研究者による結果がある [25,38,39,44,49,50,58,73,74]。ここでは，有理絡み目の正規化された Jones 多項式の計算公式を補題 3-16 から導く。

$\alpha>1$ を有理数とし，$\alpha=\frac{p}{q}$ ($p,q\in\mathbb{N}$ は互いに素) および $\alpha=[a_1,\ldots,a_n]$ ($a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}$, n は奇数) と表わす。このとき，有理絡み目 $C(\alpha)$ は次図により与えられるのであった。

$C(\alpha)\ =$ 

今後は，$J_\alpha(q):=J_{C(\alpha)}(q)$ と書く。

例 3-19

(1) $\alpha=2$ の場合：$\alpha=[2]$ である。例 3-13(1) より

$$V_{C(2)}(t)=-t^{-\frac{5}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$J_2(q)=(-t^{\frac{5}{2}})V_{C(2)}(t)=1+t^2=1+q^2$$

である。

(2) $\alpha = \dfrac{7}{2}$ の場合：$\alpha = [3,1,1]$ である。

$$V_{C(\frac{7}{2})}(t) = -t^{-6} + t^{-5} - t^{-4} + 2t^{-3} - t^{-2} + t^{-1}$$

であるから，例 3-13(2) より

$$J_{\frac{7}{2}}(q) = (-t^{6})V_{C(\frac{7}{2})}(t) = 1 - t + t^2 - 2t^3 + t^4 - t^5 = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5$$

である。 □

定義より

$$J_1(q) = 1 \tag{3.17}$$

である。また，

$$J_\infty(q) := q \tag{3.18}$$

と定める。

正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$ は (3.17) と (3.18) および次の公式を用いて帰納的に計算される。

補題 3-20　1 より大きい有理数 α, β は Farey 隣数であるとする。$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ とおくと，

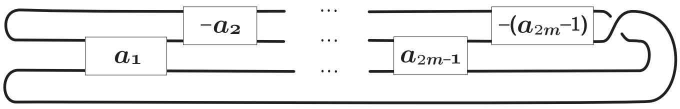
$$J_{\alpha\oplus\beta}(q) = J_\alpha(q) + q^{c_l - 1} J_\beta(q). \tag{3.19}$$

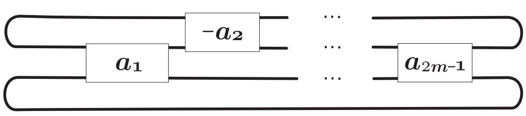
(証明)

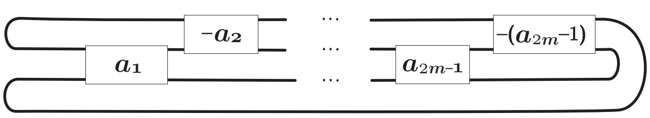
$\alpha \oplus \beta = [a_1, \ldots, a_{2m}]$ ($a_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, 2m)$) と表わす。

(1) $a_{2m} \geq 2$ のとき，

補題 1-6(1) より，$\alpha = [a_1, \ldots, a_{2m-1}]$, $\beta = [a_1, \ldots, a_{2m} - 1]$ となる。

$C(\alpha \oplus \beta)$ =


$C(\alpha)$ =


$C(\beta)$ =


$C(\alpha \oplus \beta)$ は +adequate な絡み目図式なので，補題 3-16 より

$$J_{\alpha\oplus\beta}(q) = J_\alpha(q) + \varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp}(-q)^{\frac{M-N+2}{4}} J_\beta(q)$$

となる。但し，図式 $C(\alpha \oplus \beta)$ に対する交差解消は，一番右の交差点において行うこととし，$M = \mathrm{maxdeg}\langle\,)(\,\rangle$, $N = \mathrm{maxdeg}\langle \asymp \rangle$ であり，$\varepsilon_{)(}$, $\varepsilon_{\asymp}$ はそれぞれ $\langle\,)(\,\rangle$, $\langle \asymp \rangle$ における最高次の項の係数である。

$C(\alpha\oplus\beta)$ の一番右の交差点を解消して得られる図式には $(a_{2m}-1)$ 個の負の捻りがあるのでそれらを (3.4) を用いて解消すると

$$\langle \,)(\, \rangle = (-A^3)^{a_{2m}-1}\langle C(\alpha)\rangle$$

となる。よって，

$$M = 3(a_{2m}-1) + \operatorname{maxdeg}\langle C(\alpha)\rangle,$$
$$\varepsilon_{)(} = (-1)^{a_{2m}-1}\varepsilon_{C(\alpha)}$$

となる。$C(\alpha)$ の図式は +adequate であり，計算により

$$c(C(\alpha)) = \sum_{i=1}^{2m-1} a_i, \quad \|S_+(C(\alpha))\| = \sum_{j=1}^{m-1} a_{2j} + m + 1$$

であることがわかるから，命題 3-15(1) より

$$\operatorname{maxdeg}\langle C(\alpha)\rangle = \sum_{i=1}^{2m-1} a_i + 2\Big(\sum_{j=1}^{m-1} a_{2j} + m\Big) = 3\sum_{j=1}^{m-1} a_{2j} + \sum_{j=1}^{m} a_{2j-1} + 2m,$$
$$\varepsilon_{C(\alpha)} = (-1)^{\sum_{j=1}^{m-1} a_{2j} + m}$$

を得る。よって，

$$M = 3\sum_{j=1}^{m} a_{2j} + \sum_{j=1}^{m} a_{2j-1} + 2m - 3,$$
$$\varepsilon_{)(} = (-1)^{\sum_{j=1}^{m} a_{2j} + m - 1}$$

である。同様に，$C(\beta)$ の図式は +adequate であり，計算により

$$c(C(\beta)) = \sum_{i=1}^{2m} a_i - 1, \quad \|S_+(C(\beta))\| = \sum_{j=1}^{m} a_{2j} + m - 1$$

であることがわかるから，命題 3-15(1) より

$$N = \operatorname{maxdeg}\langle C(\beta)\rangle = \sum_{i=1}^{2m} a_i - 1 + 2\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{2j} + m - 2\Big) = 3\sum_{j=1}^{m} a_{2j} + \sum_{j=1}^{m} a_{2j-1} + 2m - 5,$$
$$\varepsilon_{\asymp} = \varepsilon_{C(\beta)} = (-1)^{\sum_{j=1}^{m} a_{2j} + m - 2}$$

を得る。以上より，

$$M - N + 2 = 4, \qquad \varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp} = -1$$

であることがわかる。したがって，

$$\varepsilon_{)(}\varepsilon_{\asymp}(-q)^{\frac{M-N+2}{4}} = q$$

である。ここで，$a_{2m} \geq 2$ に注意すると，命題 1-12 より $c_l = 2$ であることがわかるから，$q = q^{c_l - 1}$ と書き換えられる。こうして，$a_{2m} \geq 2$ のとき (3.19) が成り立つことが示された。

(2) $a_{2m} = 1$ のときも同様にして示すことができるので，演習問題として残しておく。 □

注意 3-21　ここでは，補題3-16に基づく証明を与えたが，Morier-GenoudとOvsienkoが導入したEuler continuant の q-変形 [44; Proposition A.2] と Lee と Schiffler により与えられた公式 [39; Theorem 1.2] から，公式 (3.19) を導くこともできる。

例 3-22　$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$J_n(q) = 1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \tag{3.20}$$

である。

(**証明**)

$\dfrac{n}{1} = \dfrac{n-1}{1} \oplus \dfrac{1}{0}$ と表わされるから，(3.19) を用いて帰納法により

$$\begin{aligned} J_n(q) &= J_{n-1}(q) + q^{n-1} J_\infty(q) \\ &= (1 + q^2 + \cdots + q^{n-1}) + q^{n-1} \cdot q \\ &= 1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \end{aligned}$$

が示される。　□

例 3-23　(3.19) を用いて，$J_{\frac{13}{4}}(q)$ を計算する。

$$\frac{13}{4} = 4 - \frac{3}{4} = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{2}{3}} = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}} = [4,2,2,2]^-$$

であるから，$\alpha := [4,2,2,1]^- = [4,2,1]^- = [4,1]^- = 3$, $\beta := [4,2,2]^-$ とおくと，

$$J_{\frac{13}{4}}(q) = J_\alpha(q) + qJ_\beta(q) = J_3(q) + qJ_{[4,2,2]^-}(q)$$

となる。$J_{[4,2,2]^-}(q)$ については (3.21) を適用して

$$\begin{aligned} J_{[4,2,2]^-}(q) &= J_3(q) + qJ_{[4,2]^-}(q), \\ J_{[4,2]^-}(q) &= J_3(q) + qJ_4(q) \end{aligned}$$

を得る。したがって，

$$\begin{aligned} J_{\frac{13}{4}}(q) &= J_3(q)(1 + q + q^2) + q^3 J_4(q) \\ &= (1 + q^2 + q^3)(1 + q + q^2) + q^3(1 + q^2 + q^3 + q^4) \\ &= 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 \end{aligned}$$

を得る。　□

補題3-20の証明と同様に，補題3-16を用いて，次の公式を導くことができる。

命題 3-24　$\alpha > 1$ を有理数とし，$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}]$ と連分数で表わす。$m \geq 2$ とする。このとき，

(1) $a_{2m-1} = 1$ ならば，

$$J_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}]}(q) = J_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-3}]}(q) + qJ_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-2}]}(q) \tag{3.21}$$

が成り立つ。

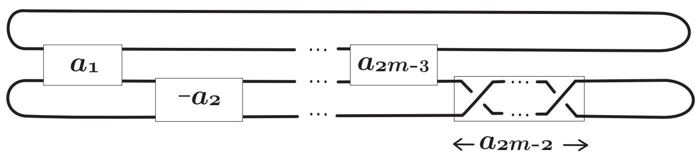
(2) $a_{2m-1} > 1$ ならば，

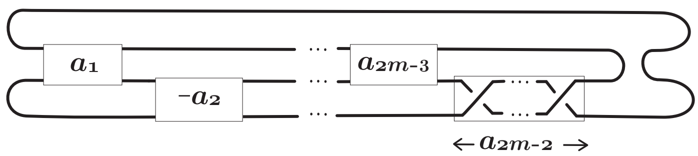
$$J_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}]}(q) = J_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1]}(q) + q^{a_{2m-1}}J_{[a_1,a_2,\ldots,a_{2m-2}]}(q) \tag{3.22}$$

が成り立つ。

(証明)

(1) $C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])$ は +adequate 図式であり，一番右の交差点の解消を行うと次の 2 つの図式が得られる。

$C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+ =$ 

$C([a_1,\ldots,a_{2m-2}]) =$ 

よって，補題 3-16 の公式より

$$J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])}(q) = J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+}(q) \\ + \varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+}\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])}(-q)^{\frac{a-b+2}{4}}J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])}(q)$$

が成り立つ。ここで，$a = \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+\rangle$，$b = \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])\rangle$ である。

$$\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+\rangle = (-A^3)^{a_{2m-2}}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])\rangle$$

であるから

$$a = 3a_{2m-2} + \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])\rangle,$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+} = (-1)^{a_{2m-2}}\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])}$$

である。さらに，$C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])$ は図式として +adequate なので，命題 3-15 の公式より

$$\mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])\rangle = \sum_{i=1}^{2m-3} a_i + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-4} + 1),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-4}+1}$$

となる。よって，

$$a = 3a_{2m-2} + \sum_{i=1}^{2m-3} a_i + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-4} + 1),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])_+} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-4}+a_{2m-2}+1}$$

である。同様に，$C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])$ は図式として +adequate なので，命題 3-15 の公式より

$$b = \sum_{i=1}^{2m-2} a_i + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2}),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-4}+a_{2m-2}}$$

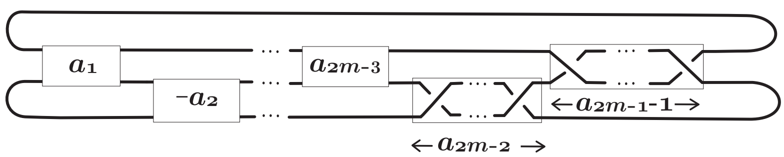
である。よって，

$$\begin{aligned} J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},1])}(q) &= J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])}(q) + (-1)(-q)^{\frac{2+2}{4}} J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])}(q) \\ &= J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-3}])}(q) + qJ_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])}(q) \end{aligned}$$

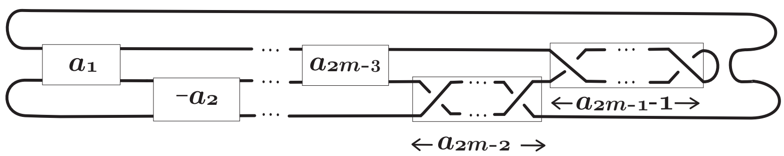
を得る。これで，(1) の等式が導かれた。

(2) (1) と同様に示すことができる。まず，$C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])$ は +adequate 図式であり，一番右の交差点の解消を行うと次の 2 つの図式が得られる。

$C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])$ =



$C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-$ =



よって，補題 3-16 の公式より

$$\begin{aligned} &J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])}(q) = J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])}(q) \\ &\quad + \varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])}\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-}(-q)^{\frac{a-b+2}{4}} J_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-}(q) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，

$$a = \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2},,a_{2m-1}-1])\rangle,\ b = \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-\rangle$$

である。

$$\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-\rangle = (-A^{-3})^{a_{2m-1}-1}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])\rangle$$

であるから

$$b = -3(a_{2m-1}-1) + \mathrm{maxdeg}\langle C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])\rangle,$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-} = (-1)^{a_{2m-1}-1}\varepsilon_{C([a_1,\ldots,a_{2m-2}])}$$

である。さらに，$C([a_1,\dots,a_{2m-2}])$ は図式として +adequate なので，命題 3- 15 の公式より

$$\operatorname{maxdeg}\langle C([a_1,\dots,a_{2m-2}])\rangle = \sum_{i=1}^{2m-2} a_i + 2(a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\dots,a_{2m-2}])} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-4}+a_{2m-2}}$$

となる。よって，

$$b = -3(a_{2m-1}-1) + \sum_{i=1}^{2m-2} a_i + 2(a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}])_-} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-4}+a_{2m-2}+a_{2m-1}-1}$$

である。同様に，$C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])$ は図式として +adequate なので，命題 3- 15 の公式より

$$a = \sum_{i=1}^{2m-2} a_i + (a_{2m-1}-1) + 2(a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}+1),$$
$$\varepsilon_{C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])} = (-1)^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}+1}$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
J_{C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}])}(q) &= J_{C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])}(q) + (-1)^{a_{2m-1}}(-q)^{\frac{4a_{2m-1}-2+2}{4}} J_{C([a_1,\dots,a_{2m-2}])}(q) \\
&= J_{C([a_1,\dots,a_{2m-2},a_{2m-1}-1])}(q) + q^{a_{2m-1}} J_{C([a_1,\dots,a_{2m-2}])}(q)
\end{aligned}$$

となる。これで，(2) の等式も導かれた。 □

注意 3- 25 有向な有理絡み目図式のライズの計算公式が知られており [34, 39, 51, 73]，Jones 多項式の次数を求める公式もある [39; Theorem 5.9]。したがって，有理絡み目に対しては正規化された Jones 多項式がわかれば，オリジナルの Jones 多項式もわかる [73]。

§4. 有理数の q-変形

2020 年頃，Morier-Genoud と Ovsienko [44] は，連分数を用いて有理数に対する新しい q-変形を導した。彼らの導入した q-有理数は，クラスター代数の表現論，2-Calabi-Yau 三角圏，結び目の多項式不変量，ポセットに関する組み合わせ論などに密接に関係している。ここでは，その q-変形の定義と性質を説明し，q-有理数の重み付き Farey ボートによる計算方法を紹介する。

この節以降も引き続き，q は不定元を表わす。

● 4-1：有理数と連分数展開の q-変形

1 以上の整数 a に対して，q に関する整数係数の多項式 $[a]_q$ を

(4.1)
$$[a]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{a-1}$$

と定め，0 に対しては $[0]_q := 0$ と定める。$[a]_q$ を a の **q-整数**という。

$[a]_q \in \mathbb{Z}[q]$ であるが，必要に応じて $[a]_q \in Q(\mathbb{Z}[q])$ ($Q(\mathbb{Z}[q])$ は $\mathbb{Z}[q]$ の商体) の元としてみる。$Q(\mathbb{Z}[q])$ における等式として，$a \geq 0$ に対して

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

が成立する。

定義 4-1 (**Morier-Genoud and Ovsienko [44; Definition 1.1]**)

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_{2m} \in \mathbb{N}$ に対して，$[a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q \in Q(\mathbb{Z}[q, q^{-1}])$ を次の式で定義する：

(4.2)
$$[a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q = [a_1]_q + \cfrac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \cfrac{q^{a_3}}{\ddots + \cfrac{q^{-a_{2m-2}}}{[a_{2m-1}]_q + \cfrac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m}]_{q^{-1}}}}}}}$$

(2) $c_1, \ldots, c_l$ を 2 以上の自然数とする。$[c_1, \ldots, c_l]_q^- \in Q(\mathbb{Z}[q])$ を次の式で定義する：

(4.3)
$$[c_1, \ldots, c_l]_q^- = [c_1]_q - \cfrac{q^{c_1-1}}{[c_2]_q - \cfrac{q^{c_2-1}}{\ddots - \cfrac{q^{c_{l-2}-1}}{[c_{l-1}]_q - \cfrac{q^{c_{l-1}-1}}{[c_l]_q}}}}$$

定理 4-2 (**Morier-Genoud and Ovsienko [44; Theorem 1]**)　有理数 $\alpha\ (>1)$ が

(4.4)
$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}] = [c_1, \ldots, c_l]^-$$
$$\big(a_i \geq 1\ (i = 1, 2, \ldots, 2m),\ c_j \geq 2\ (j = 1, \ldots, l)\big)$$

と連分数展開されるとき，

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q = [c_1, \ldots, c_l]^-_q \tag{4.5}$$

が成り立つ。

上の定理の証明は後で与える。定理 4-2 における (4.5) の有理式を $[\alpha]_q$ により表わし，α の ***q*-変形** (q-deformation) あるいは ***q*-有理数** (q-rational) と呼ぶ：

$$[\alpha]_q := [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]_q = [c_1, \ldots, c_l]^-_q.$$

例 4-3

(1) $r \in \mathbb{Z}$ を $r \geq 2$ とし，$\alpha = \dfrac{r}{r-1}$ のときを考える。$\alpha = 1 + \dfrac{1}{r-1}$ より

$$\begin{aligned}\left[\frac{r}{r-1}\right]_q &= [1, r-1]_q = [1]_q + \frac{q}{[r-1]_{q^{-1}}} = \frac{[r-1]_{q^{-1}} + q}{[r-1]_{q^{-1}}} \\ &= \frac{q + 1 + q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{-r+1}}{1 + q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{-r+1}} \\ &= \frac{q^r + q^{r-1} + q^{r-2} + \cdots q + 1}{q^{r-1} + q^{r-2} + \cdots q + 1} = \frac{[r]_q}{[r-1]_q}.\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{5}{2} = [3, 2]^-$, $\dfrac{5}{3} = [2, 3]^-$ より，

$$\begin{aligned}\left[\frac{5}{2}\right]_q &= [3, 2]^-_q = [3]_q - \frac{q^2}{[2]_q} = \frac{[2]_q[3]_q - q^2}{[2]_q} = \frac{1 + 2q + q^2 + q^3}{1 + q}, \\ \left[\frac{5}{3}\right]_q &= [2, 3]^-_q = [2]_q - \frac{q}{[3]_q} = \frac{[2]_q[3]_q - q}{[3]_q} = \frac{1 + q + 2q^2 + q^3}{1 + q + q^2}.\end{aligned}$$

演習 4-1 $\left[\dfrac{7}{4}\right]_q$ と $\left[\dfrac{7}{5}\right]_q$ を計算し，分子多項式を比較せよ。

注意 4-4

(1) $\left[\dfrac{5}{2}\right]_q$ と $\left[\dfrac{5}{3}\right]_q$ の分子多項式はどちらも 5 の q-変形であるが，異なる多項式になっている。どのようなときに分子多項式が異なるのかついて，[35] において一つの予想が提出されている。この予想は次節で詳しく説明する。

(2) この講義では単に q-有理数と呼んだが， q-有理数には，実は数直線上での「近づけ方」に応じて右と左の 2 種類があり，その場合，定義 4-1 の q-有理数は右 q-有理数と呼ばれる。左 q-有理数は，2022 年頃，Bapat，Becker，Licata [3] により導入され，表現論的・ホモロジー代数的な解釈，右 q-有理数との関係などが研究されている。彼らは左 q-有理数の理論を有理数の正則連分数展開に基づいて様々な成果を得ているが，任 [62] は負連分数展開を基礎に左 q-有理数の組合せ論的側面を研究し，左 q-有理数の Farey 和の q-変形の計算公式を導くなど，興味深い結果を導いている。

Morier-Genoud と Ovsienko はまた，q-有理数を形式的冪級数として表わしたときの各係数の「安定性」を調べ，その極限として q-実数を定義して二次無理数や自然対数

e，円周率 π などの q-変形を調べている [45]。現在では，複素数の q-変形まで考えられており，さらなる発展を見せている。

定理 4-2 は，命題 1-12 の証明と同様に行列を経由して証明することができる。[44; Section 4] に従って証明していく。まず，整数 a に対して (1.10) の q-変形版を次のように定める。

$$M_q(a) = \begin{pmatrix} [a]_q & q^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_q^-(a) = \begin{pmatrix} [a]_q & -q^{a-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

一般に，整数の有限列 $(a_1, \ldots, a_n)$ に対して

$$M_q(a_1, \ldots, a_n) := \begin{cases} M_q(a_1)M_{q^{-1}}(a_2)M_q(a_3)\cdots M_{q^{-1}}(a_n) & (n \text{ が偶数のとき}) \\ M_q(a_1)M_{q^{-1}}(a_2)M_q(a_3)\cdots M_q(a_n) & (n \text{ が奇数のとき}), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$M_q^-(a_1, \ldots, a_n) := M_q^-(a_1)M_q^-(a_2)\cdots M_q^-(a_n) \tag{4.8}$$

と定義する。さらに，整数の有限列 $(a_1, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m})$ に対して

$$\widetilde{M}_q(a_1, \ldots, a_n) := q^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m}} M_q(a_1, \ldots, a_n) \tag{4.9}$$

と定める。$\widetilde{M}_q(a_1, \ldots, a_n)$ の各要素は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ の元である。

1 より大きい有理数 α を $\alpha = \frac{r}{s}$ $((r,s) = 1,\ r, s \geq 1)$ のように既約分数で表わす。(4.3) の右辺を（分母・分子に $\mathbb{Z}[q]$ の元を掛けることなく）通分していくことにより，$[\alpha]_q \in Q(\mathbb{Z}[q])$ はある $N_q(\alpha), D_q(\alpha) \in \mathbb{Z}[q]$ を用いて，次の形に一意的に書き表わされる：

$$[\alpha]_q = \frac{N_q(\alpha)}{D_q(\alpha)}. \tag{4.10}$$

ここで,

(i) $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ は $\mathbb{Z}[q]$ において互いに素であり，

(ii) $N_1(\alpha) = r,\ D_1(\alpha) = s$ である。

便宜上，$\alpha = \dfrac{1}{0}$ に対しては，$N_q(\alpha) = 1,\ D_q(\alpha) = 0$ と定義しておく。

命題 1-15 の q-版に相当する次の結果が成り立つ。

命題 4-5 ([44; Proposition 4.3])　有理数 α (> 1) を (4.4) のように連分数に展開する。このとき，

$$M_q^-(c_1, \ldots, c_l) = \begin{pmatrix} N_q(\alpha) & -q^{c_l-1}N_q(\alpha') \\ D_q(\alpha) & -q^{c_l-1}D_q(\alpha') \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}_q(a_1, \ldots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} qN_q^+(\alpha) & N_q^+(\alpha'') \\ qD_q^+(\alpha) & D_q^+(\alpha'') \end{pmatrix}$$

となる。但し，$\alpha' = [c_1, \ldots, c_{l-1}]^-,\ \alpha'' = [a_1, \ldots, a_{2m-1}]$ であり，$l = 1$ に対しては $\alpha' = \dfrac{1}{0}$ と考える。また，$N_q^+(\alpha), D_q^+(\alpha) \in \mathbb{Z}[q]$ は，(4.2) の右辺を次の規則に従って計算して得られる分子と分母である。

① $[a_{2m-1}]_q + \dfrac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m}]_{q^{-1}}} = \dfrac{N_q^+([a_{2m-1}, a_{2m}])}{D_q^+([a_{2m-1}, a_{2m}])}$, ここで,

$$N_q^+([a_{2m-1}, a_{2m}]) = q^{a_{2m}-1}[a_{2m-1}]_q[a_{2m}]_{q^{-1}} + q^{a_{2m-1}+a_{2m}-1},$$

$$D_q^+([a_{2m-1}, a_{2m}]) = q^{a_{2m}-1}[a_{2m}]_{q^{-1}}.$$

② $1 \leq i < m$ を満たす整数 i に対して

$$[a_{2i-1}]_q + \cfrac{q^{a_{2i-1}}}{[a_{2i}]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_{2i}}}{\cfrac{N_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}])}{D_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}])}}} = \frac{N_q^+([a_{2i-1},\ldots,a_{2m}])}{D_q^+([a_{2i-1},\ldots,a_{2m}])},$$

ここで,

$$\begin{aligned} N_q^+([a_{2i-1},\ldots,a_{2m}]) &= [a_{2i-1}]_q\bigl(q^{a_{2i}}[a_{2i}]_{q^{-1}}N_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}]) + D_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}])\bigr) \\ &\quad + q^{a_{2i-1}+a_{2i}}N_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}]), \\ D_q^+([a_{2i-1},\ldots,a_{2m}]) &= q^{a_{2i}}[a_{2i}]_{q^{-1}}N_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}]) + D_q^+([a_{2i+1},\ldots,a_{2m}]). \end{aligned}$$

$N_q^+(\alpha''), D_q^+(\alpha'') \in \mathbb{Z}[q]$ は

$$N_q^+(\alpha'') = N_q^+([a_1,\ldots,a_{2m-1}-1,1]),$$
$$D_q^+(\alpha'') = D_q^+([a_1,\ldots,a_{2m-1}-1,1])$$

により定義される。

(証明)

• M_q^- に関する等式を l に関する帰納法で示す。

Ⅰ. $l=1$ のとき：$\alpha = c_1$ であり，$M_q^-(c_1) = \begin{pmatrix} [c_1]_q & -q^{c_1-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。ここで，$[\alpha]_q = [c_1]_q = \dfrac{[c_1]_q}{1}$ なので，$N_q(\alpha) = [c_1]_q$, $D_q(\alpha) = 1$ であり，$\alpha' = \dfrac{1}{0}$ であるから，$N_q(\alpha') = 1$, $D_q(\alpha') = 0$ である。よって，$l=1$ のとき M_q^- の方の等式は成り立つ。

Ⅱ. $l>1$ とし，$l-1$ のとき M_q^- の方の等式は成り立つと仮定する。

$$M_q^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}} = M_q(c_2,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}}M_q^-(c_1)^{\mathrm{T}}$$

となる。

$$[c_2,\ldots,c_l]^- = \beta, \quad [c_2,\ldots,c_{l-1}]^- = \beta'$$

とおくと (但し，$l=2$ のときには $\beta' = \frac{1}{0}$ とする)，帰納法の仮定より，

$$M_q^-(c_2,\ldots,c_l) = \begin{pmatrix} N_q(\beta) & D_q(\beta) \\ -q^{c_l-1}N_q(\beta') & -q^{c_l-1}D_q(\beta') \end{pmatrix}$$

となる。したがって，

$$M_q^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} N_q(\beta)[c_1]_q - D_q(\beta)q^{c_1-1} & N_q(\beta) \\ -q^{c_1-1}N_q(\beta')[c_1]_q + q^{c_1+c_l-2}D_q(\beta') & -q^{c_1-1}N_q(\beta') \end{pmatrix}$$

となる。一方,

$$[c_1,\ldots,c_l]_q^- = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{\frac{N_q(\beta)}{D_q(\beta)}} = \frac{[c_1]_qN_q(\beta) - q^{c_1-1}D_q(\beta)}{N_q(\beta)},$$

$$[c_1,\ldots,c_{l-1}]_q^- = [c_1]_q - \frac{q^{c_1-1}}{\frac{N_q(\beta')}{D_q(\beta')}} = \frac{[c_1]_qN_q(\beta') - q^{c_1-1}D_q(\beta')}{N_q(\beta')}$$

であるから

$$
(4.11)\qquad
\begin{aligned}
N_q(\alpha) &= [c_1]_q N_q(\beta) - q^{c_1-1}D_q(\beta), \quad D_q(\alpha) = N_q(\beta),\\
N_q(\alpha') &= [c_1]_q N_q(\beta') - q^{c_1-1}D_q(\beta'), \quad D_q(\alpha') = N_q(\beta')
\end{aligned}
$$

となる。故に，

$$
M_q^-(c_1,\ldots,c_l)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} N_q(\alpha) & D_q(\alpha) \\ -q^{c_l-1}N_q(\alpha') & -q^{c_l-1}D_q(\alpha') \end{pmatrix}
$$

と書き換えられるので，l のときにも M_q^- に関する等式が成り立つ。

● $\widetilde{M}_q$ に関する等式を m に関する帰納法で示す。

Ⅰ. $m=1$ のとき：$N_q^+(\alpha) = q^{a_2-1}[a_1]_q[a_2]_{q^{-1}} + q^{a_1+a_2-1}$，$D_q^+(\alpha) = q^{a_2-1}[a_2]_{q^{-1}}$ である。また，$\alpha'' = [a_1] = a_1$ であるから，$N_q^+(\alpha'') = [a_1]_q$，$D_q^+(\alpha'') = 1$ である。したがって，

$$
\widetilde{M}_q(a_1,a_2) = \begin{pmatrix} q^{a_2}[a_1]_q[a_2]_{q^{-1}} + q^{a_1+a_2} & [a_1]_q \\ q^{a_2}[a_2]_{q^{-1}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qN_q^+(\alpha) & N_q^+(\alpha'') \\ qD_q^+(\alpha) & D_q^+(\alpha'') \end{pmatrix}
$$

と表わされるから，$m=1$ のとき，$\widetilde{M}_q$ に関する等式は成り立つ。

Ⅱ. $m>1$ とし，$m-1$ のとき $\widetilde{M}_q$ に関する等式は成り立つと仮定する。このとき，

$$
\widetilde{M}_q(a_1,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}} = q^{a_2}\widetilde{M}_q(a_3,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}} M_{q^{-1}}(a_2)^{\mathrm{T}} M_q(a_1)^{\mathrm{T}}
$$

と書くことができる。

$$
[a_3,\ldots,a_{2m}] = \gamma, \quad [a_3,\ldots,a_{2m-1}] = \gamma''
$$

とおくと，帰納法の仮定より

$$
\widetilde{M}_q(a_3,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} qN_q^+(\gamma) & qD_q^+(\gamma) \\ N_q^+(\gamma'') & D_q^+(\gamma'') \end{pmatrix}
$$

となる。したがって，

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{M}_q(a_1,\ldots,a_{2m})^{\mathrm{T}}\\
&= \begin{pmatrix} q^{a_2+1}[a_1]_q[a_2]_{q^{-1}}N_q^+(\gamma) + q[a_1]_qD_q^+(\gamma) + q^{a_1+a_2+1}N_q^+(\gamma) & q^{a_2+1}[a_2]_{q^{-1}}N_q^+(\gamma) + qD_q^+(\gamma) \\ q^{a_2}[a_1]_q[a_2]_{q^{-1}}N_q^+(\gamma'') + [a_1]_qD_q^+(\gamma'') + q^{a_1+a_2}N_q^+(\gamma'') & q^{a_2}[a_2]_{q^{-1}}N_q^+(\gamma'') + D_q^+(\gamma'') \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} qN_q^+(\alpha) & qD_q^+(\alpha) \\ N_q^+(\alpha'') & D_q^+(\alpha'') \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表される，すなわち，

$$
\widetilde{M}_q(a_1,\ldots,a_{2m}) = \begin{pmatrix} qN_q^+(\alpha) & N_q^+(\alpha'') \\ qD_q^+(\alpha) & D_q^+(\alpha'') \end{pmatrix}
$$

が成り立つ。こうして，m のときにも $\widetilde{M}_q$ に関する等式が成り立つことが示された。 □

次は命題 1-6 の q-版である。

命題 4-6 ([44; Proposition 4.5]) $R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$L_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix}$，$S_q = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。このとき，

(1) 1 以上の整数 $a_1, \ldots, a_{2m}$ に対して

$$M_q(a_1, \ldots, a_{2m}) = R_q^{a_1} L_q^{a_2} \cdots R_q^{a_{2m-1}} L_q^{a_{2m}}. \tag{4.12}$$

(2) 2 以上の整数 $c_1, \ldots, c_l$ に対して

$$M_q^-(c_1, \ldots, c_l) = R_q^{c_1} S_q R_q^{c_2} S_q \cdots R_q^{c_l} S_q. \tag{4.13}$$

(3) $R_q S_q R_q = qL_q$.

(証明)

0 以上の整数 a に対して,

$$R_q^a = \begin{pmatrix} q^a & [a]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L_q^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [a]_{q^{-1}} & q^{-a} \end{pmatrix}$$

が成り立つことが，a に関する帰納法により簡単にわかる。これより，各 i に対して,

$$\begin{aligned} R_q^{a_i} L_q^{a_{i+1}} &= \begin{pmatrix} q^{a_i} & [a_i]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [a_{i+1}]_{q^{-1}} & q^{-a_{i+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{a_i} + [a_i]_q [a_{i+1}]_{q^{-1}} & q^{-a_{i+1}} [a_i]_q \\ [a_{i+1}]_{q^{-1}} & q^{-a_{i+1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [a_i]_q & q^{a_i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_{i+1}]_{q^{-1}} & q^{-a_{i+1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_q(a_i) M_{q^{-1}}(a_{i+1}) \end{aligned}$$

と書き換えられるから，(4.12) が成り立つ。また,

$$R_q^{c_i} S_q = \begin{pmatrix} q^{c_i} & [c_i]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [c_i]_q & -q^{c_i - 1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_q^-(c_i)$$

と書き換えられるから，(4.13) が成り立つ。

(3) $R_q S_q R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} = qL_q.$ □

次は命題 1-18 の q-版に相当する。

命題 4-7 ([44; Proposition 4.9]) 有理数 α (> 1) を (4.4) のように連分数展開する。このとき,

$$\widetilde{M}_q(a_1, \ldots, a_{2m}) = M_q^-(c_1, \ldots, c_l) R_q$$

が成り立つ。

(証明)

$m \geq 2$ のときを考える。命題 1-12 より,

$$M_q^-(c_1, \ldots, c_l) = M_q^-(a_1 + 1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_2 - 1 \text{ 個}}, a_3 + 2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_4 - 1 \text{ 個}}, \ldots, a_{2m-1} + 2, \overbrace{2, \ldots, 2}^{a_{2m} - 1 \text{ 個}})$$

となるから，命題 4-6 より,

$$\begin{aligned} M_q^-(c_1, \ldots, c_l) R_q &= R_q^{a_1+1} S_q (R_q^2 S_q)^{a_2 - 1} R_q^{a_3+2} S_q (R_q^2 S_q)^{a_4 - 1} \cdots R_q^{a_{2m-1}+2} S_q (R_q^2 S_q)^{a_{2m} - 1} R_q \\ &= R_q^{a_1} (R_q S_q R_q)^{a_2} R_q^{a_3} (R_q S_q R_q)^{a_4} \cdots R_q^{a_{2m-1}} (R_q S_q R_q)^{a_{2m}} \\ &= R_q^{a_1} (qL_q)^{a_2} R_q^{a_3} (qL_q)^{a_4} \cdots R_q^{a_{2m-1}} (qL_q)^{a_{2m}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m}} M_q(a_1,\ldots,a_{2m}) \\
&= \widetilde{M}_q(a_1,\ldots,a_{2m})
\end{aligned}
$$

を得る。 □

(定理 4-2 の証明)

命題 4-5 より，

$$
M_q^-(c_1,\ldots,c_l)R_q = \begin{pmatrix} qN_q(\alpha) & N_q(\alpha) - q^{c_l-1}N_q(\alpha') \\ qD_q(\alpha) & D_q(\alpha) - q^{c_l-1}D_q(\alpha') \end{pmatrix},
$$

$$
\widetilde{M}_q(a_1,\ldots,a_{2m}) = \begin{pmatrix} qN_q^+(\alpha) & N_q^+(\alpha'') \\ qD_q^+(\alpha) & D_q^+(\alpha'') \end{pmatrix}
$$

である。命題 4-7 より，これらは一致するので，特に，第 1 列を比較して

$$
N_q(\alpha) = N_q^+(\alpha), \qquad D_q(\alpha) = D_q^+(\alpha)
$$

を得る。よって，(4.5) が成り立つ。 □

● 4-2 : 有理数の q-変形の分母・分子多項式の性質

次に，[44; Section 1.3] に基づいて，多項式 $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ の性質を調べよう。

命題 4-5 より，次が成り立つことがわかる。

補題 4-8 c_j $(j = 1,\ldots,l)$ を 2 以上の整数とする。簡単のため，$k = 1,\ldots,l$ に対して，

$$
\begin{cases} N_k(q) := N_q([c_1,\ldots,c_k]^-), \\ D_k(q) := D_q([c_1,\ldots,c_k]^-) \end{cases}
$$

とおく。このとき，$N_0(q) = 1,\ D_0(q) = 0$ とおくと，$N_l(q), D_l(q)$ は次の漸化式により計算される。

$$
\begin{aligned}
&N_1(q) = [c_1]_q,\ D_1(q) = 1, \\
&N_{k+1}(q) = [c_{k+1}]_q N_k(q) - q^{c_k-1}N_{k-1}(q) \quad (k = 1,\ldots,l-1), \\
&D_{k+1}(q) = [c_{k+1}]_q D_k(q) - q^{c_k-1}D_{k-1}(q) \quad (k = 1,\ldots,l-1).
\end{aligned}
$$

(証明)

$M_q^-(c_1,\ldots,c_{k+1}) = M_q^-(c_1,\ldots,c_k)M_q^-(c_{k+1})$ であるから，命題 4-5 より，

$$
\begin{pmatrix} N_{k+1}(q) & -q^{c_{k+1}-1}N_k(q) \\ D_{k+1}(q) & -q^{c_{k+1}-1}D_k(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_k(q) & -q^{c_k-1}N_{k-1}(q) \\ D_k(q) & -q^{c_k-1}D_{k-1}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [c_{k+1}]_q & -q^{c_{k+1}-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

が成り立つ。両辺の第 $(1,1)$-成分と $(2,1)$-成分を比較して補題の等式を得る。 □

命題 4-9 ([44; Proposition 1.6]) c_j $(j = 1,\ldots,l)$ を 2 以上の整数とする。簡単のため，$k = 1,\ldots,l$ に対して，

$$
\begin{cases} N_k(q) := N_q([c_1,\ldots,c_k]^-), \\ D_k(q) := D_q([c_1,\ldots,c_k]^-) \end{cases}
$$

とおく。また，$N_0(q)=1,\ D_0(q)=0$ とする。各 $k=1,\dots,l$ に対して，

(1) $N_k(q)$ の先導項は $q^{c_1+\cdots+c_k-k}$ であり，定数項は 1 である。

(2) $D_k(q)$ の先導項は $q^{c_2+\cdots+c_k-k+1}$ であり，定数項は 1 である。(注：$k=1$ のとき $D_k(q)$ の先導項は 1 と解釈する。)

(3) $N_k(q), D_k(q)$ のすべての係数は 0 以上の整数である。

(4) $N_k(q)$ と $D_k(q)$ は $\mathbb{Z}[q]$ において互いに素である。

(**証明**)

(1) k に関する帰納法で示す。

$k=1$ のとき $N_1(q)=[c_1]_q=1+\cdots+q^{c_1-1}$ であるから先導項は q^{c_1-1} であり，定数項は 1 である。よって，$k=1$ のとき，(1) の主張は成立する。

$k=2$ のとき

$$N_2(q)=[c_2]_qN_1(q)-q^{c_1-1}N_0(q)=(1+\cdots+q^{c_2-1})(1+\cdots+q^{c_1-1})-q^{c_1-1}$$

となる。よって，先導項は $q^{c_1+c_2-2}$ であり，定数項は 1 である。よって，$k=2$ のときも (1) の主張は成立する。

$k-1,k$ のとき (1) の主張が成立していると仮定する。このとき，補題 4-8 の漸化式より，

$$\begin{aligned}N_{k+1}(q)=&\big(1+\cdots+q^{c_{k+1}-1}\big)\big(1+((c_1+\cdots+c_k-k)\ \text{次未満の項})+q^{c_1+\cdots+c_k-k}\big)\\&-q^{c_k-1}\big(1+((c_1+\cdots+c_{k-1}-(k-1))\ \text{次未満の項})+q^{c_1+\cdots+c_{k-1}-(k-1)}\big)\end{aligned}$$

となる。明らかに，右辺の定数項は 1 である。右辺の先導項を求める。第 1 項の先導項は $q^{c_1+\cdots+c_k+c_{k+1}-(k+1)}$ であり，第 2 項の先導項は $q^{c_1+\cdots+c_k-k}$ である。$c_{k+1}\geq 2$ なので,

$$c_1+\cdots+c_k+c_{k+1}-(k+1)>c_1+\cdots+c_k-k$$

である。よって，$N_{k+1}(q)$ における先導項は $q^{c_1+\cdots+c_k+c_{k+1}-(k+1)}$ である。これで，$k+1$ のときも (1) の主張が成立することが示された。

(2) は (1) と同じ要領で示すことができる。

(3) 最初に，$N_k(q)$ に関して示す。そのためには,

$$N_k(q),\ N_k(q)-q^{c_k-1}N_{k-1}(q)\ \text{が共に非負係数である} \tag{4.14}$$

ことを示せばよい。

∵)

$[c_{k+1}]_q=1+q[c_k]_q$ と表わすことができるから，補題 4-8 の漸化式より，

$$\begin{aligned}N_{k+1}(q)&=[c_{k+1}]_qN_k(q)-q^{c_k-1}N_{k-1}(q)\\&=q[c_{k+1}-1]_qN_k(q)+\big(N_k(q)-q^{c_k-1}N_{k-1}(q)\big)\end{aligned}$$

と表わされる。よって，$N_k(q),N_k(q)-q^{c_k-1}N_{k-1}(q)$ が共に非負係数ならば，$N_{k+1}(q)$ もまた非負係数であることがわかる。 □

k に関する帰納法で，(4.14) を示す。

$k=1$ に対しては成立していることが簡単にわかる。

k のとき (4.14) が成立していると仮定する。このとき，上で観察したように，

$$N_{k+1}(q) = q[c_k]_q N_k(q) + \bigl(N_k(q) - q^{c_k-1}N_{k-1}(q)\bigr)$$

と表わされるから，$N_{k+1}(q)$ は q に関する非負係数の多項式である。また，上式を代入して

$$N_{k+1}(q) - q^{c_{k+1}-1}N_k(q) = q[c_{k+1}-2]_q N_k(q) + \bigl(N_k(q) - q^{c_k-1}N_{k-1}(q)\bigr)$$

となる。ここで，$c_{k+1} \geq 2$ なので，$[c_{k+1}-2]_q$ は q に関して非負係数の多項式であり，帰納法の仮定から $N_k(q), N_k(q) - q^{c_k-1}N_{k-1}(q)$ も非負係数であるから，$N_{k+1}(q) - q^{c_{k+1}-1}N_k(q)$ も非負係数となることがわかる。これで，$k+1$ のときも (4.14) が成立することが示された。

$D_k(q)$ に関しても同様の方法で証明することができる。

(4) 補題 4-8 の漸化式より，

$$\begin{vmatrix} N_{k+1}(q) & N_k(q) \\ D_{k+1}(q) & D_k(q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [c_{k+1}]_q N_k(q) - q^{c_k-1}N_{k-1}(q) & N_k(q) \\ [c_{k+1}]_q D_k(q) - q^{c_k-1}D_{k-1}(q) & D_k(q) \end{vmatrix} = q^{c_k-1}\begin{vmatrix} N_k(q) & N_{k-1}(q) \\ D_k(q) & D_{k-1}(q) \end{vmatrix}$$

となる。これを繰り返して，

$$\begin{vmatrix} N_{k+1}(q) & N_k(q) \\ D_{k+1}(q) & D_k(q) \end{vmatrix} = q^{c_1+\cdots+c_k-k}\begin{vmatrix} N_1(q) & N_0(q) \\ D_1(q) & D_0(q) \end{vmatrix} = -q^{c_1+\cdots+c_k-k}$$

を得る。よって，$N_k(q)$ と $D_k(q)$ の (最高次の係数を 1 に正規化した) 最大公約式は q^m (m は 0 以上の整数) の形であることがわかるが，$N_k(q) = q^m N_k',\ D_k(q) = q^m D_k'$ ($N_k', D_k' \in \mathbb{Z}[q]$) と表わすと，$N_k(q), D_k(q)$ の定数項は 1 であるから，$m=0$ でなければいけないことがわかる。故に，$N_k(q),\, D_k(q)$ は互いに素である。 □

命題 4-9 の内容を $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ を用いて書き換えて，次を得る ((1) における a_i の和に関する等式は c_j の和に関する等式を，命題 1-12 を使って書き換えれば得られる)。

系 4-10 ([44; Corollary 1.7])　有理数 α (>1) を (4.4) のように連分数展開する。このとき，

(1) $\deg N_q(\alpha) = c_1 + \cdots + c_l - l = a_1 + \cdots + a_{2m} - 1$,

$\deg D_q(\alpha) = c_2 + \cdots + c_l - l + 1 = a_2 + \cdots + a_{2m} - 1$.

但し，$l=1$ のとき，$\deg D_q(\alpha) = 0$ と解釈する。

(2) $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ の最高次の係数および定数項はどちらも 1 である。 □

Farey 和に関連する多項式 $N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ の性質に次がある。

定理 4-11 (Morier-Genoud and Ovsienko [44; Proposition 4.11])　α, β を 1 より大きな有理数からなる Farey 隣数とすると，

$$D_q(\alpha)N_q(\beta) - N_q(\alpha)D_q(\beta) = q^h$$

となる。ここで，$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ とするとき，

$$h = c_1 + \cdots + c_{l-1} - l + 1$$

である。 $\square$

● 4-3：Farey 和の q-変形

[44; Section 2.5] に基づいて，重み付き Farey 和を定義しよう。

定理 4-12 (**Morier-Genoud and Ovsienko [44]**) 1 以上の有理数 α, β が Farey 隣数であるとき，$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ とすると，

$$N_q(\alpha \oplus \beta) = N_q(\alpha) + q^{c_l - 1} N_q(\beta), \tag{4.15}$$

$$D_q(\alpha \oplus \beta) = D_q(\alpha) + q^{c_l - 1} D_q(\beta) \tag{4.16}$$

が成り立つ。したがって，

$$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q := \frac{N_q(\alpha) + q^{c_l - 1} N_q(\beta)}{D_q(\alpha) + q^{c_l - 1} D_q(\beta)} \tag{4.17}$$

と定めると，

$$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q = [\alpha \oplus \beta]_q \tag{4.18}$$

が成り立つ。$[\alpha]_q \oplus [\beta]_q$ を $[\alpha]_q$ と $[\beta]_q$ の**重み付き Farey 和** (weighted Farey sum) と呼ぶ。

例 4-13 $\dfrac{4}{3} \oplus \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{5} = [2, 2, 3]^-$ より

$$\left[\frac{4}{3}\right]_q \oplus \left[\frac{3}{2}\right]_q = \frac{N_q\left(\frac{4}{3}\right) + q^2 N_q\left(\frac{3}{2}\right)}{D_q\left(\frac{4}{3}\right) + q^2 D_q\left(\frac{3}{2}\right)}$$

となる。ここで，$\dfrac{4}{3} = [2, 2, 2]^-$，$\dfrac{3}{2} = [2, 2]^-$ であるから

$$\left[\frac{3}{2}\right]_q = [2]_q - \frac{q}{[2]_q} = 1 + q - \frac{q}{1+q} = \frac{1 + q + q^2}{1+q},$$

$$\left[\frac{4}{3}\right]_q = [2]_q - \cfrac{q}{[2]_q - \cfrac{q}{[2]_q}} = \frac{1 + q + q^2 + q^3}{1 + q + q^2}$$

となる。故に，

$$N_q\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + q + q^2 + q^3, \qquad N_q\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + q + q^2,$$

$$D_q\left(\frac{4}{3}\right) = 1 + q + q^2, \qquad D_q\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + q$$

であり，したがって，

$$\left[\frac{4}{3}\right]_q \oplus \left[\frac{3}{2}\right]_q = \frac{1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4}{1 + q + 2q^2 + q^3}$$

を得る。これは $\left[\dfrac{7}{5}\right]_q$ を定義に基づいて計算した値と一致している。 $\square$

(**定理 4-12 の証明**)

$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ と書く。補題 1-19 より，次が成り立つ：

(1) $c_l > 2$ のとき

$$\alpha = [c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1]^-, \quad \beta = [c_1, \ldots, c_{l-1}]^-.$$

(2) $c_l = 2$ のとき

$$\alpha = \begin{cases} [c_1, \ldots, c_{l-1} - 1]^- & (l > 2 \text{ のとき}), \\ [c_{l-1} - 1]^- & (l = 2 \text{ のとき}), \end{cases} \qquad \beta = [c_1, \ldots, c_{l-1}]^-.$$

• $c_l > 2$ とする。命題 4-6(2) より，

$$\begin{aligned} M_q^-(c_1, \ldots, c_l) &= R_q^{c_1} S_q \cdots R_q^{c_{l-1}} S_q R_q^{c_l - 1} S_q \cdot S_q^{-1} R_q S_q \\ &= M_q^-(c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1) S_q^{-1} R_q S_q \end{aligned}$$

である。ここで，

$$S_q^{-1} R_q S_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & q \end{pmatrix}$$

であるから

$$(*) \qquad M_q^-(c_1, \ldots, c_l) = M_q^-(c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & q \end{pmatrix}$$

を得る。命題 4-5 より，

$$M_q^-(c_1, \ldots, c_l) = \begin{pmatrix} N_q([c_1, \ldots, c_l]^-) & -q^{c_l - 1} N_q([c_1, \ldots, c_{l-1}]^-) \\ D_q([c_1, \ldots, c_l]^-) & -q^{c_l - 1} D_q([c_1, \ldots, c_{l-1}]^-) \end{pmatrix},$$

$$M_q^-(c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1) = \begin{pmatrix} N_q([c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1]^-) & -q^{c_l - 2} N_q([c_1, \ldots, c_{l-1}]^-) \\ D_q([c_1, \ldots, c_{l-1}, c_l - 1]^-) & -q^{c_l - 2} D_q([c_1, \ldots, c_{l-1}]^-) \end{pmatrix}$$

である。よって，$(*)$ において第 1 列を比較して，

$$N_q([c_1, \ldots, c_l]^-) = N_q(\alpha) + q^{c_l - 1} N_q(\beta),$$

$$D_q([c_1, \ldots, c_l]^-) = D_q(\alpha) + q^{c_l - 1} D_q(\beta)$$

を得る。よって，

$$[\alpha \oplus \beta]_q = \frac{N_q([c_1, \ldots, c_l]^-)}{D_q([c_1, \ldots, c_l]^-)} = \frac{N_q(\alpha) + q^{c_l - 1} N_q(\beta)}{D_q(\alpha) + q^{c_l - 1} D_q(\beta)} = [\alpha]_q \oplus [\beta]_q$$

である。

• $l = 2,\ c_l = 2$ のときを考える。命題 4-6(2) より，

$$M_q^-(c_1, c_2) = R_q^{c_1} S_q R_q^{c_2} S_q = R_q^{c_1 - 1} S_q \cdot S_q^{-1} R_q S_q R_q^{c_2} S_q = M_q^-(c_1 - 1) S_q^{-1} R_q S_q R_q^2 S_q$$

となる。ここで，

$$S_q^{-1} R_q S_q R_q^2 S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^2 & q + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + 1 & -q \\ -q^2 & q^2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$M_q^-(c_1,c_2)=\begin{pmatrix}[c_1-1]_q & -q^{c_1-2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q+1 & -q\\ -q^2 & q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(q+1)[c_1-1]_q+q^{c_1} & q[c_1-1]_q-q^{c_1}\\ q+1 & -q\end{pmatrix}$$

を得る。両辺の第 1 列を比較して命題 4-5 を用いると,

$$\begin{pmatrix}N_q([c_1,c_2]^-)\\ D_q([c_1,c_2]^-)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(q+1)[c_1-1]_q+q^{c_1}\\ q+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[c_1-1]_q+q[c_1]_q\\ 1+q\end{pmatrix}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}N_q([c_1,c_2]^-)&=[c_1-1]_q+q[c_1]_q=N_q([c_1-1]^-)+qN_q([c_1]^-)=N_q(\alpha)+qN_q(\beta),\\ D_q([c_1,c_2]^-)&=1+q=D_q([c_1-1]^-)+qD_q([c_1]^-)=D_q(\alpha)+qD_q(\beta)\end{aligned}$$

となる。$c_2=2$ であるから

$$[\alpha\oplus\beta]_q=\frac{N_q([c_1,c_2]^-)}{D_q([c_1,c_2]^-)}=\frac{N_q(\alpha)+qN_q(\beta)}{D_q(\alpha)+qD_q(\beta)}=[\alpha]_q\oplus[\beta]_q$$

となる。

● $l>2,\ c_l=2$ のときを考える。命題 4-6(2) より,

$$M_q^-(c_1,\dots,c_l)=R_q^{c_1}S_q\cdots R_q^{c_{l-1}-1}S_q\cdot S_q^{-1}R_qR_q^{c_l}S_q=M_q^-(c_1,\dots,c_{l-1}-1)S_q^{-1}R_qR_q^2S_q$$

となる。よって,先ほどと同様にして,

$$M_q^-(c_1,\dots,c_l)=\begin{pmatrix}N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-) & -q^{c_{l-1}-1}N_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\\ D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-) & -q^{c_{l-1}-1}D_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q+1 & -q\\ -q^2 & q^2\end{pmatrix}$$

を得る。この両辺の第 1 列を比較して

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}N_q([c_1,\dots,c_l]^-)\\ D_q([c_1,\dots,c_l]^-)\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(q+1)N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}+1}N_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\\ (q+1)D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}+1}D_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q\big(N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}}N_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\big)\\ D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q\big(D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}}D_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)\big)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を得る。このベクトルは,$c_{l-1}\geq 2$ に対して

$$(※)\qquad \begin{aligned}N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}}N_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)&=N_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-),\\ D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+q^{c_{l-1}}D_q([c_1,\dots,c_{l-2}]^-)&=D_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-)\end{aligned}$$

が示されていると仮定すると,

$$\begin{pmatrix}N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+qN_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-)\\ D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+qD_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-)\end{pmatrix}$$

と書き換えることができるから

$$(※※)\qquad \begin{aligned}N_q([c_1,\dots,c_l]^-)&=N_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+qN_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-),\\ D_q([c_1,\dots,c_l]^-)&=D_q([c_1,\dots,c_{l-1}-1]^-)+qD_q([c_1,\dots,c_{l-1}]^-)\end{aligned}$$

となる。(※) が $c_{l-1}>2$ に対して成立することはすでに示したので，(※) が $c_{l-1}=2$ に対して成立することを示せばよい。結局，$l=3$ のときに (※※) が示されれば，l に関する帰納法で，$l>2$ に対して，等式 (※※) が成立することがわかる。

実際，$l=3$ のときに (※※) が成立することが確かめられる。(※※) は，

$$N_q([c_1,\dots,c_l]^-)=N_q(\beta)+qN_q(\gamma),$$
$$D_q([c_1,\dots,c_l]^-)=D_q(\beta)+qD_q(\gamma)$$

と書き換えられるので，$c_l=2$ であることより，

$$[\alpha\oplus\beta]_q=\frac{N_q([c_1,\dots,c_l]^-)}{D_q([c_1,\dots,c_l]^-)}=\frac{N_q(\alpha)+qN_q(\beta)}{D_q(\alpha)+qD_q(\beta)}=[\alpha]_q\oplus[\beta]_q$$

であることがわかる。

これで，すべての場合が尽くされ，定理の証明が完了した。 □

演習 4-2 上の定理の証明における「$l=3$ のときに (※※) が成立する」ことを確かめよ。

補題 3-20 と定理 4-12 より次が証明される。

命題 4-14 有理数 $\alpha\ (>1)$ に対して，正規化された Jones 多項式 $J_\alpha(q)$ は次のように計算される：

$$J_\alpha(q)=qN_q(\alpha)+(1-q)D_q(\alpha). \tag{4.19}$$

(**証明**)

1 より大きい有理数 α,β は Farey 隣数であるとする。$\alpha\oplus\beta=[c_1,\dots,c_l]^-$ とおくと，

$$N_q(\alpha\oplus\beta)=N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta),$$
$$D_q(\alpha\oplus\beta)=D_q(\alpha)+q^{c_l-1}D_q(\beta)$$

となる。$J_\alpha(q)=qN_q(\alpha)+(1-q)D_q(\alpha)$，$J_\beta(q)=qN_q(\beta)+(1-q)D_q(\beta)$ が成立していると仮定すると，補題 3-20 と定理 4-12 より

$$\begin{aligned}J_{\alpha\oplus\beta}(q)&=J_\alpha(q)+q^{c_l-1}J_\beta(q)\\&=q\big(N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta)\big)+(1-q)\big(D_q(\alpha)+q^{c_l-1}D_q(\beta)\big)\\&=qN_q(\alpha\oplus\beta)+(1-q)D_q(\alpha\oplus\beta)\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって，$\oplus$ を施す回数に関する帰納法により，命題は証明される。 □

注意 4-15

(1) 補題 2-36 より，(4.18) は次のように書き換えることができる：

$$[\alpha]_q\oplus[\beta]_q=\frac{N_q(\alpha)+q^{\left\lceil\frac{N(\alpha)}{N(\beta)}\right\rceil}N_q(\beta)}{D_q(\alpha)+q^{\left\lceil\frac{N(\alpha)}{N(\beta)}\right\rceil}D_q(\beta)} \tag{4.20}$$

(2) (4.18) は，$a=1$, $(y,b)=(1,0)$ の場合も適用することができる。よって，$\infty=\dfrac{1}{0}$ を含めて，Farey 隣数の関係にある 1 以上の 2 つの有理数 α,β に対して $[\alpha]_q\oplus[\beta]_q$ が定義される。

(3) (4.15) と (4.16) の右辺は互いに素である。

(証明)

定理 4-11 より，

$$N_q(\beta)D_q(\alpha)-D_q(\beta)N_q(\alpha)=q^m \quad \text{for some integer } m\geq 0 \tag{4.21}$$

と表わされる。$N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta)$ と $D_q(\alpha)+q^{c_l-1}D_q(\beta)$ の $\mathbb{Z}[q]$ における最大公約数を $d(q)$ とおく。$d(q)$ はモニックにとっておく。すると，ある $f(q),g(q)\in\mathbb{Z}[q]$ を用いて，

$$N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta)=d(q)f(q),\quad D_q(\alpha)+q^{c_l-1}D_q(\beta)=d(q)g(q)$$

と表わされる。これらを代入して

$$q^m=d(q)\big(N_q(\beta)g(q)-D_q(\beta)f(q)\big)$$

となるので，$d(q)$ は q^m を割り切るモニックな多項式なので，$d(q)=q^k$ $(0\leq k\leq m)$ と表わされる。$N_q(\alpha),N_q(\beta)$ の定義より $N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta)=d(q)f(q)$ の左辺の定数項は 1 なので，$d(q)f(q)$ の定数項も 1 でなければならない。したがって，$k=0$ である。こうして，$N_q(\alpha)+q^{c_l-1}N_q(\beta)$ と $D_q(\alpha)+q^{c_l-1}D_q(\beta)$ は互いに素であることが示された。 □

(4) 有理数 $\alpha\geq 1$ に対して

$$q^{\lceil\alpha\rceil}D_q(\alpha)=N_q(1+\alpha)-N_q(\alpha). \tag{4.22}$$

(証明)

$\alpha\geq 1$ が整数ならば，$\lceil\alpha\rceil=\alpha$ である。$[1+\alpha]_q=[\alpha]_q+q^\alpha$ より

$$N_q(1+\alpha)=[\alpha]_q+q^\alpha=N_q(\alpha)+q^\alpha D_q(\alpha)$$

となる。

$\alpha>1$ が整数でないならば，$\alpha=[c_1,\ldots,c_l]^-$ $(c_j\geq 2\ (j=1,\ldots,l),\ l\geq 2)$ と表わすことができ，$\alpha=c_1-\dfrac{1}{[c_2,\ldots,c_l]^-}<c_1$ となる。ここで，$[c_2,\ldots,c_l]^->1$ であるから $\alpha>c_1-1$ である。よって，$\lceil\alpha\rceil=c_1$ である。$\alpha+1=[c_1+1,c_2,\ldots,c_l]^-$ と表わされるから

$$[\alpha+1]_q=[c_1+1]_q-\frac{q^{c_1}}{[c_2,\ldots,c_l]^-_q}=q^{c_1}+[\alpha]_q=\frac{q^{c_1}D_q(\alpha)+N_q(\alpha)}{D_q(\alpha)}$$

が成り立つ。したがって，

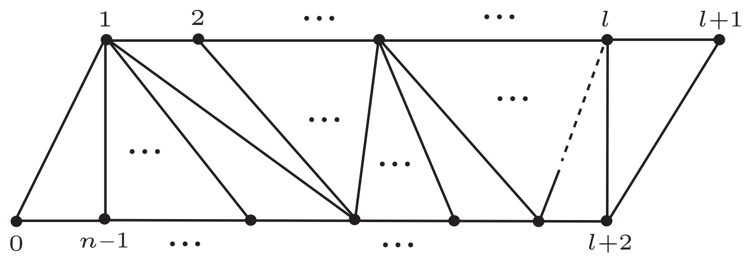
$$N_q(\alpha+1)=q^{c_1}D_q(\alpha)+N_q(\alpha)=q^{\lceil\alpha\rceil}D_q(\alpha)+N_q(\alpha)$$

となる。 □

● **4-4：多角形の重み付き Farey ボートと q-Farey 和**

多角形の重み付き Farey ボートは，Farey ボートの各頂点に q-有理数を割り当て，各辺に q の冪を割り当てたものであり，次のように定義される。

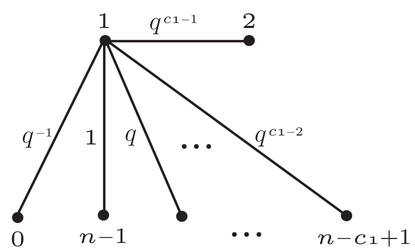
定義 4-16 ([44; Definition 2.3])　FBT を n 角形の Farey ボートとし，c_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ を，FBT において頂点 j に隣接する辺の個数から 1 を引いた値とする。



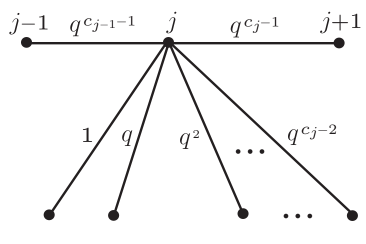
以下の方法による，FBT の各辺への q の冪を割り当てを FBT の**重み** (weight) といい，FBT とそのウエイトとの組を FBT^q で表わし，**重み付き Farey ボート**または**重み付きジグザグ型三角形分割** (weighted triangulation) という。

(a) 各頂点には，FBT を Farey ボートとしてみたときに割り当てられる有理数の q-変形を割り当てる。

(b) 頂点 1 に隣接する各辺には，次のようにウエイトを割り当てる。

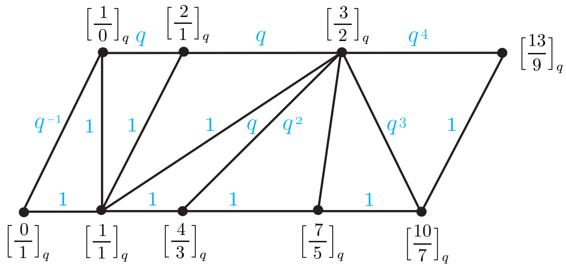


(c) 上側にある頂点 j $(2 \leq j \leq l+1)$ に隣接する各辺には，次のようにウエイトを割り当てる。



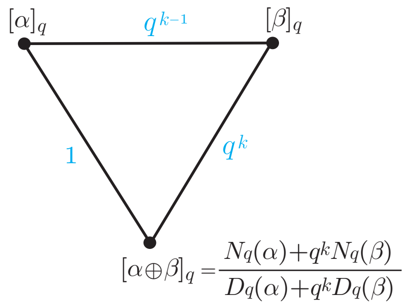
(d) 下側の頂点同士を結ぶ各辺には 1 を割り当てる。

例 4-17　重み付き Farey ボート $\mathrm{FBT}^q(\frac{13}{9})$ は次で与えられる。



演習 4-3　重み付き Farey ボート $\mathrm{FBT}^q(\frac{17}{4})$ を描け。

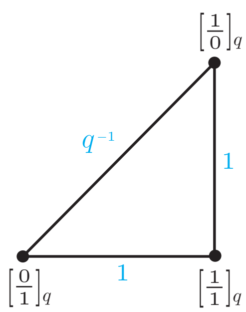
定理 4-18 (Morier-Genoud and Ovsienko [44; Theorem 3])　重み付き Farey ボート FBT^q の各三角形は，ある整数 $k \geq 0$ と Farey 隣数の関係にある $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ により，次の形をしている。



但し，必要に応じて，時計回りの回転で上と同じ形になるように回転させて考えるものとする。

(証明)

(i) 左側の外部三角形には次図のように辺にウエイトが割り当てられており，頂点に q-整数が割り当てられている。



これは定理の図の形をしている。定理 4-12 より，

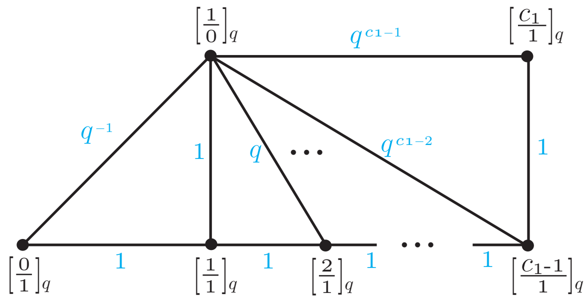
$$\left[\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{0}\right]_q = \left[\frac{0}{1}\right]_q \oplus \left[\frac{1}{0}\right]_q = \frac{N_q(\frac{0}{1}) + q^0 N_q(\frac{1}{0})}{D_q(\frac{0}{1}) + q^0 D_q(\frac{1}{0})}$$

となる。よって，$\alpha = \dfrac{0}{1}$，$\beta = \dfrac{1}{0}$ に対して，公式

$$[\alpha \oplus \beta]_q = \frac{N_q(\alpha) + q^k N_q(\beta)}{D_q(\alpha) + q^k D_q(\beta)}$$

も満たされる。

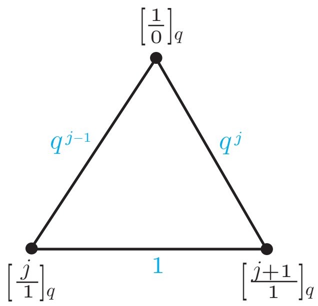
(ii) 次の図の各三角形とそれらの下側の頂点について，定理の主張は成り立つことを示す。



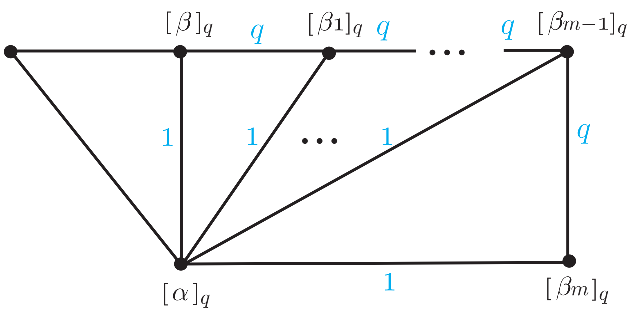
$j \in \{1, 2, \ldots, c_1 - 1\}$ に対して，$\dfrac{j+1}{1} = \dfrac{j}{1} \oplus \dfrac{1}{0}$ より，$\left[\dfrac{j+1}{1}\right]_q = \left[\dfrac{j}{1}\right]_q \oplus \left[\dfrac{1}{0}\right]_q$ となっている。また，$\dfrac{j+1}{1} = [j+1]^-$ であるから，$\oplus$ の定義より，

$$\left[\frac{j+1}{1}\right]_q = \frac{N_q(\frac{j}{1}) + q^j N_q(\frac{1}{0})}{D_q(\frac{j}{1}) + q^j D_q(\frac{1}{0})}$$

となる。$\left[\dfrac{j}{1}\right]_q$, $\left[\dfrac{1}{0}\right]_q$, $\left[\dfrac{j+1}{1}\right]_q$ を頂点とする三角形の部分を抜き出すと次のようになっているから，これらの三角形について定理は成立している。



(iii) 次に，次図の形をした部分を考える。



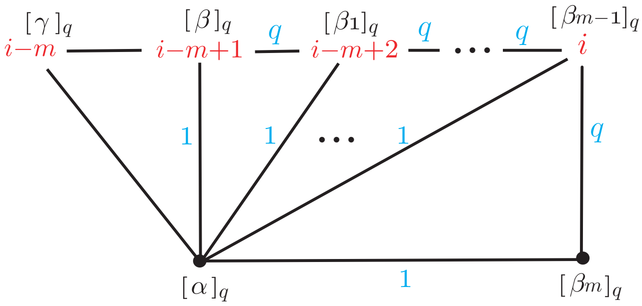
$\beta_1 = \alpha \oplus \beta$ である。

$[\beta]_q$ が置かれている頂点が i であるとすると，上の図の状況では，頂点 i を持つ三角形は 2 だけであるから，$c_i = 2$ である。頂点 i の一つ右の頂点 $i+1$ より右側部分を削除して得られる三角形分割を考えることによって，頂点 $i+1$ に置かれる有理数 β_1 は命題 1-21 から，$\beta_1 = [c_1, \ldots, c_i]^-$ である。$c_i = 2$ であるから

$$[\beta_1]_q = [\alpha]_q \oplus [\beta]_q = \frac{N_q(\alpha) + qN_q(\beta)}{D_q(\alpha) + qD_q(\beta)}$$

となる。よって，$[\alpha]_q, [\beta]_q, [\beta_1]_q$ を頂点とする三角形について定理の主張は正しい。

同様の考察により，$k = 1, \ldots, m-2$ に対して $[\alpha]_q, [\beta_k]_q, [\beta_{k+1}]_q$ を頂点とする三角形について定理の主張は正しい。



$[\alpha]_q, [\beta_{m-1}]_q, [\beta_m]_q$ を頂点とする三角形について考える。$[\beta_{m-1}]_q$ が置かれている頂点が i であるとすると，$\beta_{m-1} = [c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m-1\text{ 個}}]^-$ である。$\beta_m = \alpha \oplus \beta_{m-1}$ であるから，補題 1-19 により，

$$\beta_m = [c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m-1\text{ 個}}, d]^- \quad (d \geq 2)$$

の形をしている。$\beta = [c_1, \ldots, c_{i-m}]^-$ であり，頂点 $i-m$ に置かれている有理数を γ とおくと，$\beta = \gamma \oplus \alpha$ であるから，補題 1-19 により

$$\alpha = [c_1, \ldots, c_{i-m} - 1]^-$$

であることがわかる (注：$c_{i-m} = 2$ のときには $[c_1, \ldots, c_{i-m-1}, 1]^- = [c_1, \ldots, c_{i-m-1} - 1]^-$ と解釈する)。

$\beta_m = \alpha \oplus \beta_{m-1}$ であるから

$$\alpha = [c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m-1\text{ 個}}, d-1]^-$$

となるが，$d \geq 3$ と仮定すると，負連分数展開の一意性により

$$[c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m-1\text{ 個}}, d-1]^- \neq [c_1, \ldots, c_{i-m} - 1]^-$$

である。よって，$d = 2$ でなければならず，このとき，

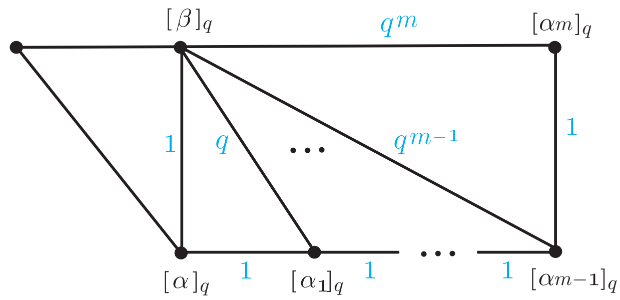
$$[c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2}^{m-1\text{ 個}}, d-1]^- = [c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2, 2}^{m\text{ 個}}]^- = [c_1, \ldots, c_{i-m} - 1]^-$$

となり，整合性が保たれる。こうして，$\beta_m = [c_1, \ldots, c_{i-m}, \overbrace{2, \ldots, 2, 2}^{m\text{ 個}}]^-$ と表わされ，

$$\beta_m = [\alpha]_q \oplus [\beta_{m-1}]_q = \frac{N_q(\alpha) + qN_q(\beta_{m-1})}{D_q(\alpha) + qD_q(\beta_{m-1})}$$

が満たされる。よって，(iii) の形をした部分に含まれる任意の三角形について定理の主張は成り立つ。

(iv) 次図の形をした部分を考える。



$\alpha_1 = \alpha \oplus \beta$ である。

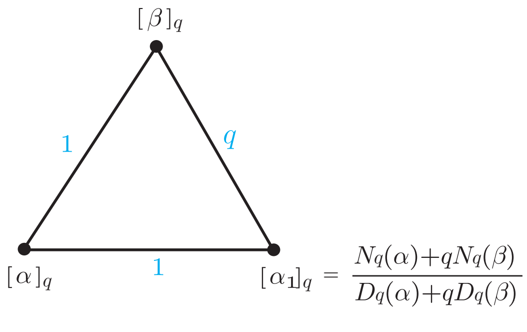
$[\beta]_q$ が置かれている頂点が i であるとする。頂点 i を持つ三角形は c_i 個であるが，上図より $c_i = m + 1$ である。命題 1-21 から，$\beta = [c_1, \ldots, c_{i-1}]^-$ となる。よって，補題 1-19 より

$$\alpha_1 = [c_1, \ldots, c_{i-1}, d]^- \qquad (d \geq 2)$$

と表わすことができる。このとき，$d = 2$ であることが，(iii) の最後の部分での考察よりわかる。よって，

$$[\alpha_1]_q = [\alpha]_q \oplus [\beta]_q = \frac{N_q(\alpha) + qN_q(\beta)}{D_q(\alpha) + qD_q(\beta)}$$

となり，$[\alpha]_q, [\beta]_q, [\alpha_1]_q$ を頂点にもつ三角形の辺へのウエイトと頂点に配置される q-整数は次のようになっていることがわかる。



よって，この場合，定理の主張は満たされている。

帰納法と補題 1-19 により，$k \in \{1, \ldots, m-1\}$ に対して

$$\alpha_k = [c_1, \ldots, c_{i-1}, k+1]^-$$

となることがわかり，$\oplus$ の定義より

$$[\alpha_k]_q = [\alpha_{k-1}]_q \oplus [\beta]_q = \frac{N_q(\alpha_{k-1}) + q^k N_q(\beta)}{D_q(\alpha_{k-1}) + q^k D_q(\beta)}$$

となる。よって，この場合，定理の主張は満たされている。

最後に，$[\alpha_{m-1}]_q, [\beta]_q, [\alpha_m]_q$ を頂点とする三角形を考える。この場合も，$\alpha_{m-1} = [c_1, \ldots, c_{i-1}, m]^-$，$\beta = [c_1, \ldots, c_{i-1}]^-$, $\alpha_m = \alpha_{m-1} \oplus \beta$ と補題 1-19 を合わせて

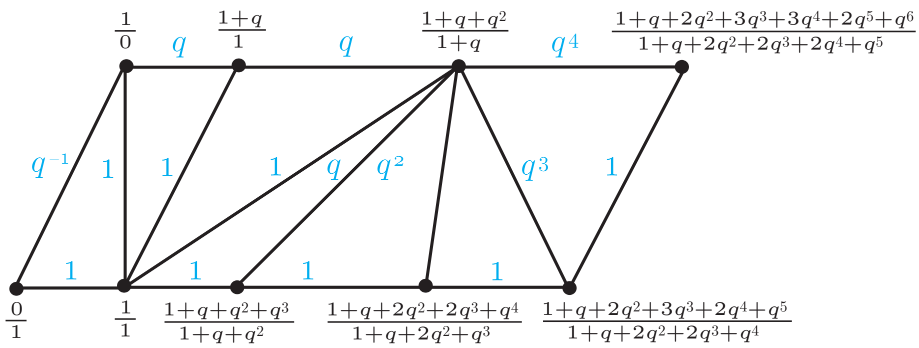
$$\alpha_m = [c_1, \ldots, c_{i-1}, m+1]^-$$

がわかる。したがって,

$$[\alpha_m]_q = [\alpha_{m-1}]_q \oplus [\beta]_q = \frac{N_q(\alpha_{m-1}) + q^m N_q(\beta)}{D_q(\alpha_{m-1}) + q^m D_q(\beta)}$$

となる。よって，この場合も定理の主張は満たされている。 □

例 4-19 重み付き Farey ボート $\mathrm{FBT}^q(\frac{13}{9})$ から q-有理数 $\left[\frac{13}{9}\right]_q$ が次図のように計算される。



よって,

$$\left[\frac{13}{9}\right]_q = \frac{1+q+2q^2+3q^3+3q^4+2q^5+q^6}{1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5}$$

である。また，計算の途中式より

$$\left[\frac{3}{2}\right]_q = \frac{1+q+q^2}{1+q},$$

$$\left[\frac{4}{3}\right]_q = \frac{1+q+q^2+q^3}{1+q+q^2},$$

$$\left[\frac{7}{5}\right]_q = \frac{1+q+2q^2+2q^3+q^4}{1+q+2q^2+q^3},$$

$$\left[\frac{10}{7}\right]_q = \frac{1+q+2q^2+3q^3+2q^4+q^5}{1+q+2q^2+2q^3+q^4}$$

などもわかる。 □

演習 4-4 有理数 $\alpha\ (>1)$ を $\alpha = [c_1, \ldots, c_l]^-$ と負連分数展開する。このとき,

$$\alpha + 1 = \begin{cases} [c_1+1, c_2, \ldots, c_l]^- & (l \geq 2 \text{ のとき}), \\ [c_1+1]^- & (l = 1 \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$[\alpha+1]_q = \begin{cases} [c_1+1, c_2, \ldots, c_l]_q^- = 1 + q[c_1, \ldots, c_l]_q^- & (l \geq 2 \text{ のとき}), \\ [c_1+1]_q & (l = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることを示せ。

● 4-5：$(0,1)$ 内の有理数に対する q-変形

$(0,1)$ 内の有理数 α の q-変形を定義しよう。

すでに，0 以上の整数 a に対して $[a]_q$ が定義されている。負の整数 a に対しては

$$[a]_q := -q^a[-a]_q$$

により定める。例えば,

$$\begin{aligned}
[-1]_q &= -q^{-1}[1]_q = -q^{-1}, \\
[-2]_q &= -q^{-2}[2]_q = -(q^{-1}+q^{-2}), \\
[-3]_q &= -q^{-3}[3]_q = -(q^{-1}+q^{-2}+q^{-3})
\end{aligned}$$

である。

$$-q^a[-a]_q = -q^a\frac{1-q^{-a}}{1-q} = \frac{1-q^a}{1-q}$$

のように書き換えられるから，任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

が成り立つ。

補題 4-20　任意の $a, n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[a+n]_q = q^n[a]_q + [n]_q. \tag{4.23}$$

(証明)

これは

$$q^n[a]_q + [n]_q = q^n\frac{1-q^a}{1-q} + \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^{a+n}}{1-q} = [a+n]_q$$

のように (4.23) は導かれる。 □

補題 4-21　(a,x) を $1 \leq a \leq x$ を満たす互いに素な自然数の組とし，x を

$$x = ca + r \ (0 \leq r < a)$$

のように表わす。このとき，$k := \left\lceil \dfrac{x}{a} \right\rceil$ とおくと

$$N_q\Big(\frac{x}{a}\Big) = [k]_q N_q\Big(\frac{a}{a-r}\Big) - q^{k-1}D_q\Big(\frac{a}{a-r}\Big), \tag{4.24}$$

$$D_q\Big(\frac{x}{a}\Big) = N_q\Big(\frac{a}{a-r}\Big). \tag{4.25}$$

(証明)

$x = ca + r$ より

$$\frac{x}{a} = c + \frac{r}{a}$$

となる。$a > 1$ ならば，$r > 0$ であるから，$\dfrac{r}{a} > 0$ である。よって，$a > 1$ ならば,

$$k = \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil = c + 1$$

となる。

$$\frac{x}{a} = \frac{(c+1)a + r - a}{a} = c + 1 - \frac{a-r}{a} = k - \frac{1}{\frac{a}{a-r}}$$

となる。$\dfrac{a}{a-r} = [c_1, \ldots, c_l]^-$ と負連分数で表わすと，上の等式より $\dfrac{x}{a} = [k, c_1, \ldots, c_l]^-$ であるから

$$\begin{aligned} M_q^-(k, c_1, \ldots, c_l)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= M_q^-(k)M_q^-(c_1, \ldots, c_l)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}[k]_q & -q^{k-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_q(\frac{a}{a-r})\\ D_q(\frac{a}{a-r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[k]_q N_q(\frac{a}{a-r}) - q^{k-1}D_q(\frac{a}{a-r})\\ N_q(\frac{a}{a-r})\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって，(4.24), (4.25) が成り立つ。 □

定義 4-22 ([44]) 有理数 $0 < \alpha < 1$ に対して，$N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ および $[\alpha]_q$ を

(4.26) $$N_q(\alpha+1) = qN_q(\alpha) + D_q(\alpha),$$

(4.27) $$D_q(\alpha+1) = D_q(\alpha)$$

(4.28) $$[\alpha+1]_q = q[\alpha]_q + 1$$

を満たすように定める。

補題 4-21 の公式と類似の次の公式が成り立つ。

補題 4-23 $1 \leq a \leq x$ を満たす互いに素な自然数の組 (a, x) に対して

(4.29) $$N_q\Big(\frac{a}{x}\Big) = N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big) - D_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big),$$

(4.30) $$D_q\Big(\frac{a}{x}\Big) = N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big).$$

(証明)

$$\frac{a}{x} + 1 = 2 - \frac{x-a}{x} = 2 - \frac{1}{\frac{x}{x-a}}$$

であるから，$\dfrac{x}{x-a} = [c_1, \ldots, c_l]^-$ $(c_j \geq 2\ (j = 1, \ldots, l))$ のように負連分数展開すると，$\dfrac{a}{x} + 1 = [2, c_1, \ldots, c_l]^-$ となる。よって，

$$\begin{pmatrix}N_q\Big(\frac{a}{x}+1\Big)\\ D_q\Big(\frac{a}{x}+1\Big)\end{pmatrix} = M_q^-(2)M_q^-(c_1, \ldots, c_l)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[2]_q & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big)\\ D_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big)\end{pmatrix}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} N_q\Big(\frac{a}{x}+1\Big) &= [2]_q N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big) - qD_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big),\\ D_q\Big(\frac{a}{x}+1\Big) &= N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big)\end{aligned}$$

が成り立つ。定義 4-22 より，左辺を書き換えて

$$(\sharp 1) \qquad qN_q\Big(\frac{a}{x}\Big) + D_q\Big(\frac{a}{x}\Big) = [2]_q N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big) - qD_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big),$$

$$(\sharp 2) \qquad D_q\Big(\frac{a}{x}\Big) = N_q\Big(\frac{x}{x-a}\Big)$$

を得る。($\sharp$2) を ($\sharp$1) に代入すると，(4.29) となる。 □

補題 4-23 を書き換えて直ちに次の系を得る。

系 4-24 $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ に対して

$$N_q(\alpha) = N_q\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big) - D_q\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big), \tag{4.31}$$

$$D_q(\alpha) = N_q\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big). \tag{4.32}$$

補題 4-25 任意の正の有理数 α と自然数 n に対して

$$N_q(\alpha+n) = q^n N_q(\alpha) + [n]_q D_q(\alpha), \tag{4.33}$$

$$D_q(\alpha+n) = D_q(\alpha), \tag{4.34}$$

$$[\alpha+n]_q = q^n[\alpha]_q + [n]_q. \tag{4.35}$$

(**証明**)

$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]$ $(a_1 \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{N}\ (i = 2, \ldots, 2m))$ と表わす。このとき，$\alpha + n = [a_1 + n, a_2, \ldots, a_{2m}]$ であり，命題 4-5 より

$$\begin{pmatrix} qN_q(\alpha+n) \\ qD_q(\alpha+n) \end{pmatrix} = \widetilde{M}_q(a_1+n, a_2, \ldots, a_{2m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで，

$$M_q(a_1+n) = \begin{pmatrix} [a+n]_q & q^{a+n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^n & [n]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a]_q & q^a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^n & [n]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_q(a_1)$$

であるから

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_q(a_1+n, a_2, \ldots, a_{2m}) &= q^{a_2+a_4+\cdots+a_{2m}} M_q(a_1+n) M_{q^{-1}}(a_2) M_q(a_3) M_{q^{-1}}(a_4) \cdots M_{q^{-1}}(a_{2m}) \\ &= \begin{pmatrix} q^n & [n]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{M}_q(a_1, a_2, \ldots, a_{2m}) \end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\begin{pmatrix} qN_q(\alpha+n) \\ qD_q(\alpha+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^n & [n]_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qN_q(\alpha) \\ qD_q(\alpha) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。この等式を成分で書いて，比較することにより，(4.33), (4.34) が得られる。(4.35) は (4.33), (4.34) の商をとれば直ちに得られる。 □

(4.34) より，互いに素な自然数の組 (a, x) および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_q\Big(\frac{x+na}{a}\Big) = D_q\Big(\frac{x}{a} + n\Big) = D_q\Big(\frac{x}{a}\Big)$$

が成立する。よって，$D_q(\alpha)$ にどのような多項式が現れるのかを知るためには α は $0 < \alpha < 1$ の範囲に限定しても差し支えない。

§5. 互いに素な自然数対によって定義される整数の q-変形とその応用

この節では，互いに素な自然数の対 (a,b) に対して，$a+b$ の q-変形とみなすことができる q に関する非負整数係数多項式 $(a,b)_q$ を定義し，その性質を調べる。この q-変形 $(a,b)_q$ は Morier-Genoud と Ovsienko [44; Sections 2.1–2.3] が導入した有理数の q-変形に対する Farey 和公式 (定理 4-12) を理解するために，[73] において導入された。実は，$(a,b)_q$ は $\left[\dfrac{a+b}{a}\right]_q$ の分子多項式に一致するが，分子多項式自体から導出しようとすると困難な等式がいくつもある。その 1 つが，q-有理数の分母多項式と分子多項式を $(a,b)_q$ を用いて直接計算する公式である。この節の前半部分ではその公式を導出する。続いて，q-有理数の分子多項式がいつ一致するかということに関わる算術的予想 [35] の十分性の $(a,b)_q$ を用いた証明を与える。最後に，$(a,b)_q$ に基づく Conway-Coxeter フリーズの q-変形の構成法を紹介する。

● 5-1：自然数対によって定義される整数の q-変形

[44] の有理数の q-変形における分子多項式と分母多項式から発想を得て，互いに素な自然数の組 (a,b) に対して，次の規則で帰納的に定義される非負整数係数の q に関する多項式 $(a,b)_q$ を導入する [73]：

$$(a,b)_q = \begin{cases} (a-r,r)_q + q(a,b-a)_q & (a<b \text{ のとき}), \\ (a-b,b)_q + q^e(r,b-r)_q & (a>b \text{ のとき}). \end{cases} \tag{5.1}$$

但し，r は $a<b$ のとき b を a で割ったときの余りであり，$a>b$ のとき a を b で割ったときの余りであり，$e=\lceil \frac{a}{b} \rceil$ である。

$q=1$ を代入すると，$(a,b)_1=a+b$ となるので，$(a,b)_q$ は整数 $a+b$ の q-変形とみなすことができる。$n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ に対して

$$(1,n)_q=(n,1)_q=1+q+q^2+\cdots+q^n \ (=[1+n]_q) \tag{5.2}$$

であるが，一般に $(a,b)_q\neq(b,a)_q$ である。例えば，$(2,3)_q=q^3+q^2+2q+1\neq q^3+2q^2+q+1=(3,2)_q$ となっている。これは，同じ整数 5 であっても，$5=2+3$ と見るか $5=3+2$ と見るかによって q-変形の値が異なることを意味している。

$(0)_q:=0$ と定め，$n\geq 1$ に対して，

$$(n)_q := [n]_q \tag{5.3}$$

とする。

1 以上の有理数 α,β が Farey 隣数であるとき，q-有理数 $[\alpha\oplus\beta]_q$ を計算するには，$[\alpha\oplus\beta]_q$ の (負) 連分数展開の情報と，$[\alpha]_q,[\beta]_q$ の分母と分子の情報が必要になる。次の定理は，$[\alpha\oplus\beta]_q$ の分母と分子は α,β の分母と分子から独立に計算することができることを主張している。

定理 5-1 ([73; Theorem 3.3]) 既約分数 $\alpha=\dfrac{x}{a}$, $\beta=\dfrac{y}{b}$ が 1 以上の有理数からなる Farey 隣数ならば，

$$D_q(\alpha\oplus\beta)=(a,b)_q, \qquad N_q(\alpha\oplus\beta)=(x,y)_q \tag{5.4}$$

となる。したがって，

$$[\alpha \oplus \beta]_q = \frac{(x,y)_q}{(a,b)_q}. \tag{5.5}$$

(証明)

数学的帰納法で示す。$\alpha = \dfrac{a}{c},\ \beta = \dfrac{b}{d}$ に対して (5.5) が成り立っているとする。c, d の値により場合分けで示す。

- 最初に，$c = d = 1$ でも $c = 1,\ d = 0$ でもない場合を考える。この場合，

$$a < b \iff c < d$$

が成り立つことがわかる。

今，$a < b$ の場合を考える。$c < d$ である。b を a で割ったときの余りを r とし，d を c で割ったときの余りを s とする。

$$b = a + (b-a),\ d = c + (d-c),\ c(b-a) - a(d-c) = cb - ad = 1$$

となるから $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b-a}{d-c}$ は Farey 隣数であり

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c} \oplus \frac{b-a}{d-c} \tag{5.6}$$

となる。同様に，

$$a = (a-r) + r,\ c = (c-s) + s,\ (c-s)r - (a-r)s = cr - as = 1$$

となる。したがって，$\dfrac{a-r}{c-s}, \dfrac{r}{s}$ は Farey 隣数であり

$$\frac{a}{c} = \frac{a-r}{c-s} \oplus \frac{r}{s} \tag{5.7}$$

となる。帰納法の仮定と (5.6), (5.7) より，$[\alpha]_q = \dfrac{(a-r,r)_q}{(c-s,s)_q},\ [\beta]_q = \dfrac{(a,b-a)_q}{(c,d-c)_q}$ となる。また，$\alpha \oplus \beta = [c_1, \ldots, c_l]^-$ と表わすと，$a < b$ なので補題 4- 14 により $c_l = 2$ である。したがって，

$$[\alpha \oplus \beta]_q = \frac{(a-r,r)_q + q(a,b-a)_q}{(c-s,s)_q + q(c,d-c)_q} = \frac{(a,b)_q}{(c,d)_q}$$

を得る。

次に，$a > b$ の場合を考える。すると，$c > d$ である。先ほどと同様に，$\dfrac{a-b}{c-d}, \dfrac{b}{d}$ は Farey 隣数であり

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{c-d} \oplus \frac{b}{d} \tag{5.8}$$

となり，$\dfrac{r}{s}, \dfrac{b-r}{d-s}$ は Farey 隣数であり

$$\frac{b}{d} = \frac{r}{s} \oplus \frac{b-r}{d-s} \tag{5.9}$$

となる。$c_l - 1 = \lceil \frac{a}{b} \rceil = e$ であるから

$$[\alpha \oplus \beta]_q = \frac{(a-b,b)_q + q^e(r,b-r)_q}{(c-d,d)_q + q^e(s,d-s)_q} = \frac{(a,b)_q}{(c,d)_q}$$

を得る。

• $c=d=1$ の場合を考える。この場合，$bc-ad=1$ より，$b-a=1$ となる。よって，$\alpha=\frac{a}{1}$, $\beta=\frac{a+1}{1}$ となる。$\alpha\oplus\beta=\frac{2a+1}{2}=(a+1)-\frac{1}{2}=[a+1,2]^{-}$ であるから

$$[\alpha\oplus\beta]_q=\left[\frac{2a+1}{2}\right]_q=[a+1]_q-\frac{q^a}{[2]_q}=\frac{[a+1]_q[2]_q-q^a}{[2]_q}$$

となる。一方，$(a,b)_q$ の定義より

$$\frac{(a,a+1)_q}{(1,1)_q}=\frac{(a-1,1)_q+q(a,1)_q}{[2]_q}=\frac{[a]_q+q[a+1]_q}{[2]_q}$$

である。よって，$[\alpha\oplus\beta]_q=\frac{(a,a+1)_q}{(1,1)_q}$ を示すには，$[a]_q+q[a+1]_q=[a+1]_q[2]_q-q^a$ を示せばい。これは次のように示される。

$$\begin{aligned}[a+1]_q[2]_q-q^a&=[a+1]_q(1+q)-q^a\\&=[a+1]_q-q^a+q[a+1]_q\\&=[a]_q+q[a+1]_q.\end{aligned}$$

• $c=1,\ d=0$ の場合を考える。この場合, $\alpha=\frac{a}{1}$, $\beta=\frac{1}{0}$ となる。$\alpha\oplus\beta=\frac{a+1}{1}=[a+1]^{-}$ であるから，$[\alpha\oplus\beta]_q=[a+1]_q$ である。よって，

$$\frac{(a,1)_q}{(1,0)_q}=[a+1]_q=[\alpha\oplus\beta]_q$$

となる。よって，$c=1,\ d=0$ の場合にも (5.5) は成立する。 □

● 5-2 : 自然数対によって定義される整数の q-変形の計算公式

この節では，第 5-1 節で導入した自然数対によって定義される整数の q-変形に対する様々な計算公式を導出する。まず，次の補題の (5.13) と (5.14) にあるように，$(a,x)_q$ と $(x,a)_q$ は "相反的 (reciprocal)" な関係にあることを示そう。

補題 5-2 $1\le a\le x$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,x) に対して，$x=ca+r\ (0\le r<a)$ と表わす。このとき，

(5.10) $$(a,x)_q=(a-r,r)_q(c)_q+q^c(a,r)_q,$$

(5.11) $$\deg(x-a,a)_q=\deg(a,x)_q-1,$$

(5.12) $$\deg(a-r,r)_q=\deg(a,x)_q-\left\lceil\frac{x}{a}\right\rceil,$$

(5.13) $$(x,a)_q=q^{\deg(x,a)_q}(a,x)_{q^{-1}},$$

(5.14) $$(a,x)_q=q^{\deg(a,x)_q}(x,a)_{q^{-1}}.$$

(証明)

(5.10) を示す。定義より

$$\begin{aligned}(a,x)_q &= (a-r,r)_q + q(a,x-a)_q \\ &= (a-r,r)_q(2)_q + q^2(a,x-2a)_q \\ &= \cdots\cdots \\ &= (a-r,r)_q(c)_q + q^c(a,x-ca)_q = (a-r,r)_q(c)_q + q^c(a,r)_q.\end{aligned}$$

次に，(5.11) を示す。k を 2 以上の自然数とし，$1 \le a \le x$, $a+x=k$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,x) に対して

$$(*) \qquad \deg(x,a)_q = \deg(a,x)_q = \deg(x-a,a)_q + 1$$

となることを，k に関する数学的帰納法で証明する。

$k=2,3$ のとき $(*)$ が成り立つことは直接確かめることができる。

$k>2$ とし，$1 \le a' \le x'$, $a'+x'<k$ を満たすすべての互いに素な自然数の組 (a',x') に対して，

$$\deg(x',a')_q = \deg(a',x')_q = \deg(x'-a',a')_q + 1$$

が成り立っていると仮定する。$1 \le a \le x$, $a+x=k$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,x) を任意にとり，$x=ca+r$ $(0 \le r < a)$ と表わす。(5.10) より，$(a,x)_q = (a-r,r)_q(c)_q + q^c(a,r)_q$ となる。帰納法の仮定より

$$\deg(a,r)_q = \deg(r,a)_q = \deg(a-r,r)_q + 1$$

であるから，$d := \deg(a,r)_q$ とおくと，

$$\begin{aligned}\deg\big((a-r,r)_q(c)_q\big) &= \deg(a-r,r)_q + (c-1) = c+d-2, \\ \deg\big(q^c(a,r)_q\big) &= c+d\end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\deg(a,x)_q = c+d = \deg(a,r)_q + c = \deg(a-r,r)_q + 1 + c$$

を得る。特に，$\deg(a,x)_q > \deg(a-r,r)_q$ であるから，$(a,x)_q = (a-r,r)_q + q(a,x-a)_q$ と合わせると，

$$\deg(a,x)_q = \deg\big(q(a,x-a)_q\big) = \deg(a,x-a)_q + 1$$

でなければならないことがわかる。

$$(x,a)_q = (x-a,a)_q + q^{\lceil \frac{x}{a} \rceil}(r,a-r)_q$$

であり，帰納法の仮定と上の計算結果より

$$\deg(x-a,a)_q = \deg(a,x-a)_q = \deg(a,x)_q - 1 = \deg(a-r,r)_q + c = \deg(r,a-r)_q + c$$

となる。

$a>1$ ならば $\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil = c+1$ であるから

$$\deg(x-a,a)_q < \deg(r,a-r)_q + c + 1 = \deg(r,a-r)_q + \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil$$

である。$(x,a)_q = (x-a,a)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil}(r,a-r)_q$ と合わせて

$$\deg(x,a)_q = \deg\bigl(q^{\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil}(r,a-r)_q\bigr) = \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil + \deg(r,a-r)_q = c+d = \deg(a,x)_q$$

を得る。

$a=1$ ならば，$(x,a)_q = (x+1)_q = (a,x)_q$ となる。よって，$\deg(x,a)_q = \deg(a,x)_q$ である。

以上より，帰納法は完成し，$(*)$ は $1 \leq a \leq x$ を満たすすべての互いに素な自然数の組 (a,x) に対して成立することがわかった。

次に，(5.12) が成り立つことを示す。(5.12) は次のように書き換えられる：

$$(\sharp) \qquad \deg(x,a)_q = \deg(a-r,r)_q + \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil .$$

$(x,a)_q = (x-a,a)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil}(r,a-r)_q$ であり，$\deg(x,a)_q > \deg(x-a,a)_q$ であるから

$$\deg(x,a)_q = \deg\bigl(q^{\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil}(r,a-r)_q\bigr) = \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil + \deg(r,a-r)_q$$

となる。よって，$(\sharp)$ が成り立つ。

次に，(5.13) と (5.14) を同時に示す。任意の自然数 k に対して，$1 \leq a \leq x$, $x+a \leq k$ を満たす互いに素なすべての自然数の組 (a,x) に対して 2 つの等式 (5.13) と (5.14) が成立することを，k に関する数学的帰納法で証明する。

I. $a=x=1$ のとき，$(x,a)_q = (2)_q = 1+q$ であるから，$\deg(x,a)_q = 1$ であり

$$(x,a)_q = 1+q = q(1+q^{-1}) = q^{\deg(x,a)_q}(a,x)_{q^{-1}}$$

が成り立つ。同様にして，$(a,x)_q = q^{\deg(x,a)_q}(x,a)_{q^{-1}}$ が成り立つこともわかる。

II. k を 2 以上の自然数とし，$1 \leq a \leq x$, $x+a \leq k$ を満たす互いに素なすべての自然数の組 (a,x) に対して 2 つの等式 (5.13) と (5.14) が成立すると仮定する。

(a,x) を $1 \leq a \leq x$, $a+x = k+1$ を満たす互いに素な自然数の組とし，x を a で割ったときの余りを r とする。このとき，

$$(a,x)_q = (a-r,r)_q + q(a,x-a)_q$$

である。ここで，$(a-r)+r = a < a+x$, $a+(x-a) = x < a+x$ であるから，帰納法の仮定により

$$(a-r,r)_q = q^{\deg(a-r,r)_q}(r,a-r)_{q^{-1}}, \qquad (a,x-a)_q = q^{\deg(x-a,a)_q}(x-a,a)_{q^{-1}}$$

が成り立つ。よって，

$$(a,x)_q = q^{\deg(a-r,r)_q}(r,a-r)_{q^{-1}} + q^{1+\deg(x-a,a)_q}(x-a,a)_{q^{-1}}$$

と表わされる。よって，(5.11) と (5.12) より

$$(a,x)_q = q^{\deg(a,x)_q}\bigl(q^{-\left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil}(r,a-r)_{q^{-1}} + (x-a,a)_{q^{-1}}\bigr) = q^{\deg(a,x)_q}(x,a)_{q^{-1}}$$

となる。この等式において q の代わりに q^{-1} を用いると

$$(a,x)_{q^{-1}} = q^{-\deg(a,x)_q}(x,a)_q$$

となるから

$$(x,a)_q = q^{\deg(a,x)_q}(a,x)_{q^{-1}}$$

も成り立つ。

以上で帰納法は完成し，補題は証明された。 □

注意 5-3 上の補題から，直ちに，互いに素な自然数 a, b に対して次が成り立つことがわかる。

(1) $a < b$ のとき $\deg(a,b)_q = \deg(a, b-a)_q + 1$.

(2) $\deg(a,b)_q = \deg(b,a)_q$ であり，この値を d とするとき，すべての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対して，$\deg(a,b)_q$ における q^i の係数と，$\deg(b,a)_q$ における q^{d-i} の係数は一致する。

補題 5-4 Farey 隣数をなす正の有理数 $\dfrac{x}{a}$, $\dfrac{y}{b}$ に対して

$$\left\lceil \frac{x+y}{a+b} \right\rceil = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{x}{a} \right\rceil & (a > 1) \\ \left\lceil \dfrac{x}{a} \right\rceil + 1 & (a = 1) \end{cases} = \left\lfloor \frac{x}{a} + 1 \right\rfloor \tag{5.15}$$

である。ここで，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\lfloor \alpha \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq \alpha \,\}$ である。

(証明)

● $a > 1$ の場合を考える。

$b = 1$ の場合，$x = ay - 1$ である。このとき，

$$\frac{x+y}{a+b} = y - \frac{1}{a+1}$$

となる。よって，$\left\lceil \dfrac{x+y}{a+b} \right\rceil = y$ である。一方，$\dfrac{x}{a} = \dfrac{ay-1}{a} = y - \dfrac{1}{a}$ であるから $\left\lceil \dfrac{x}{a} \right\rceil = y$ となる。よって，

$$\left\lceil \frac{x+y}{a+b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{a} \right\rceil$$

が成り立つ。

次に，$b > 1$ とし，

$$x = ma + r \ (0 \leq r < a), \quad y = nb + s \ (0 \leq s < b)$$

と書く。$a > 1,\ b > 1$ より $r > 0,\ s > 0$ に注意する。

$x + y = ma + nb + r + s$ より，$m \geq n$ ならば，

$$\frac{x+y}{a+b} = n + \frac{(m-n)a + (r+s)}{a+b} \tag{$*$}$$

である。$ay - bx = 1$ より，$(nb+s)a - (ma+r)b = 1$ である。これより，

$$ab(n-m) + sa - rb = 1$$

を得る。よって，$(m-n)a=\dfrac{sa-rb-1}{b}$ となる。これより，

$$((*)\text{ の右辺の分子})=\frac{sa-rb-1}{b}+(r+s)=\frac{s(a+b)-1}{b}$$

となるので，

$$((*)\text{ の右辺})=n+\frac{s-\frac{1}{a+b}}{b}<n+\frac{s}{b}<n+1$$

である。よって，

$$\left\lceil\frac{x+y}{a+b}\right\rceil=n+1=\left\lceil\frac{y}{b}\right\rceil$$

となる。$m\geq n$ より $\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil\geq\left\lceil\dfrac{y}{b}\right\rceil$ に注意する。

一方，$\dfrac{x}{a}<\dfrac{y}{b}$ なので $\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil\leq\left\lceil\dfrac{y}{b}\right\rceil$ である。よって，$m+1=\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{y}{b}\right\rceil=n+1$ を得る。したがって，$m\geq n$ ならば，$m=n$ でなければならず，このとき，$\left\lceil\dfrac{x+y}{a+b}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{y}{b}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil$ が成り立つ。

$n>m$ ならば，

$$(**)\qquad \frac{x+y}{a+b}=m+\frac{(n-m)b+(r+s)}{a+b}$$

である。$ay-bx=1$ より，$(n-m)b=\dfrac{1-sa+rb}{a}$ となる。すると，

$$((**)\text{ の右辺})=m+\frac{1+r(a+b)}{a(a+b)}<m+1$$

である。何故ならば

$$\frac{1+r(a+b)}{a(a+b)}<1 \iff 1+r(a+b)<a(a+b)\iff 1<(a-r)(a+b)$$

となり，最後の不等式が成立するからである。したがって，

$$\left\lceil\frac{x+y}{a+b}\right\rceil=m+1=\left\lceil\frac{x}{a}\right\rceil$$

となる。なお，$n>m$ より $\left\lceil\dfrac{y}{b}\right\rceil\geq\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil$ に注意する。

- $a=1$ の場合を考える。$y-bx=1$ より $y=bx+1$ である。よって，

$$\frac{x+y}{a+b}=x+\frac{1}{b+1}$$

となるから

$$\left\lceil\frac{x+y}{a+b}\right\rceil=x+1=\left\lceil\frac{x}{a}\right\rceil+1$$

となる。$\alpha\notin\mathbb{Z}$ のとき $\lfloor\alpha+1\rfloor=\lceil\alpha\rceil$ であるから，$a=1$ の場合，$\left\lceil\dfrac{x}{a}\right\rceil+1=\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor$ のように書き換えることができる。 □

補題 5-5 Farey 隣数をなす 1 以上の有理数 $\dfrac{x}{a}$，$\dfrac{y}{b}$ に対して

$$(5.16)\qquad \deg(a+b,x+y)_q=\deg(b,y)_q+\left\lceil\frac{x}{y}\right\rceil$$

$$\text{(5.17)} \qquad \deg(a+b, x+y)_q = \deg(a,x)_q + \left\lfloor \frac{b}{a} + 1 \right\rfloor$$

である。

(証明)

任意の 3 以上の自然数 k に対して，$x+y=k$ かつ $ay-bx=1$, $1 \leq a \leq x$, $1 \leq b \leq y$ を満たす $a,b,x,y \in \mathbb{N}$ に対して (5.16) と (5.17) が成り立つことを k に関する帰納法で示す。

I. $k=3$ とする。$(x,y)=(1,2)$ であり，$(a,b)=(1,1)$ である。この場合，

$$\text{(5.16)}' \qquad \text{(5.16)} \iff \deg(2,3)_q = \deg(1,2)_q + 1,$$

$$\text{(5.17)}' \qquad \text{(5.17)} \iff \deg(2,3)_q = \deg(1,1)_q + 2$$

となる。ここで，定義より $(2,3)_q = 1+2q+q^2+q^3$ とわかるから，$\deg(2,3)_q = 3$ である。よって，(5.14)$'$, (5.17)$'$ は成立する。

II. $k>2$ とする。$x'+y'<k$ かつ $a'y'-b'x'=1$, $1 \leq a' \leq x'$, $1 \leq b' \leq y'$ を満たすすべての $a',b',x',y' \in \mathbb{N}$ に対して，(5.16), (5.17) が成り立つと仮定する。

$x+y=k$ かつ $ay-bx=1$, $1 \leq a \leq x$, $1 \leq b \leq y$ を満たす $a,b,x,y \in \mathbb{N}$ を任意に考える。$a+b<x+y$ であるから $x+y$ を $a+b$ で割ったときの余りを r とおくと

$$(a+b,x+y)_q = (a+b-r,r)_q + q(a+b,(x+y)-(a+b))_q$$

となる。(5.12) より $\deg(a+b-r,r)_q < \deg(a+b,x+y)_q$ であるから

$$(*) \qquad \deg(a+b,x+y)_q = 1 + \deg(a+b,(x+y)-(a+b))_q$$

である。

(i) $a<x-a$, $b<y-b$ のとき

$$1 < \frac{x-a}{a}, \quad \frac{x-a}{a} \oplus \frac{y-b}{b} = \frac{(x+y)-(a+b)}{a+b}, \quad (x-a)+(y-b) < x+y = k$$

であるから，帰納法の仮定により，

$$\begin{aligned}\deg(a+b,(x+y)-(a+b))_q &= \deg(a+b,(x-a)+(y-b))_q \\ &= \deg(b,y-b)_q + \left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil \\ &= \deg(a,x-a)_q + \left\lfloor \frac{b}{a} + 1 \right\rfloor\end{aligned}$$

である。ここで，(5.11) より $\deg(b,y-b)_q = -1+\deg(b,y)_q$ であり，補題5-4 より $\left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ であるから

$$\deg(a+b,x+y)_q = \deg(b,y)_q + \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$$

となる。また，(5.11) より $\deg(a,x-a)_q = -1+\deg(a,x)_q$ であるから

$$\deg(a+b,x+y)_q = \left\lfloor \frac{b}{a} + 1 \right\rfloor + \deg(a,x)_q$$

となる。

(ii) $a < x-a,\ b \geq y-b$ となることはない。実際，$2b-y = \dfrac{(2a-x)b-1}{a} < 0$ より，$b<y-b$ となる。

(iii) $a \geq x-a,\ b < y-b$ となることはない。実際，$2a-x = \dfrac{a(2b-y)+1}{b} < \dfrac{1}{b}$ となる。$2a-x$ は整数なので上の不等式が成立するのは $2a-x \leq 0$ のときである。x, a は互いに素であるから $x=2a$ となることはない。したがって，$2a<x$ であるが，これは $a \geq x-a$ に反する。

(iv) $a \geq x-a,\ b \geq y-b$ のとき，x, a は互いに素であるから $x=2a$ となることはない。よって，$a > x-a$ であり，同様に，$b>y-b$ である。

❶ $x-a>0,\ y-b>0$ のとき

$1 < \dfrac{b}{y-b}$，$\dfrac{b}{y-b} \oplus \dfrac{a}{x-a} = \dfrac{b+a}{(y-b)+(x-a)}$ である。$a+b < x+y = k$ であるから $\deg((y-b)+(x-a), b+a)_q$ に帰納法の仮定を適用することができる。すると，

$$\begin{aligned}\deg(a+b,(x-a)+(y-b))_q &= \deg((y-b)+(x-a),b+a)_q\\ &= \deg(x-a,a)_q + \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil\\ &= \deg(y-b,b)_q + \left\lfloor \frac{x-a}{y-b} + 1 \right\rfloor\end{aligned}$$

となる。ここで，(5.11) より $\deg(x-a,a)_q = \deg(a,x-a)_q = -1+\deg(a,x)_q$ であるから，$(*)$ より

$$\deg(a+b,x+y)_q = 1+\deg(a+b,(x-a)+(y-b))_q = \deg(a,x)_q + \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$$

を得る。$a=1$ であったすると，$1=a>x-a=x-1>0$ から $2>x>1$ が導かれて矛盾が生じる。したがって，$a>1$ である。$ay-bx=1$ より a, b は互いに素であるから，$\frac{b}{a} \notin \mathbb{Z}$ である。したがって，$\left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil = \left\lfloor \frac{b}{a}+1 \right\rfloor$ と書き換えられる。よって，

$$\deg(a+b,x+y)_q = \deg(a,x)_q + \left\lfloor \frac{b}{a}+1 \right\rfloor$$

が成り立つ。同様に，(5.11) より $\deg(y-b,b)_q = \deg(b,y-b)_q = -1+\deg(b,y)_q$ であるから補題 5-4 と $(*)$ より

$$\begin{aligned}\deg(a+b,x+y)_q &= 1+\deg(a+b,(x-a)+(y-b))_q\\ &= 1+\deg(y-b,b)_q + \left\lfloor \frac{x-a}{y-b}+1 \right\rfloor\\ &= \deg(b,y)_q + \left\lfloor \frac{x-a}{y-b}+1 \right\rfloor\end{aligned}$$

を得る。

(a) $y-b>1$ の場合，$a(y-b)-b(x-a)=1$ より $x-a, y-b$ は互いに素であるから，$\frac{x-a}{y-b} \notin \mathbb{Z}$ である。したがって，$\left\lfloor \frac{x-a}{y-b}+1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil$ となる。$\dfrac{x-a}{y-b} \oplus \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$ と補題 5-4 より $\left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ となるので

$$\deg(a+b,x+y)_q = \deg(b,y)_q + \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$$

が成り立つ。

(b) $y-b=1$ の場合，$\left\lfloor \frac{x-a}{y-b}+1 \right\rfloor = x-a+1 = \left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil + 1$ である。$\dfrac{x-a}{y-b} \oplus \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$ と補題 5-4 より $\left\lceil \frac{x-a}{y-b} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ と書き換えられるから

$$\deg(a+b, x+y)_q = \deg(b,y)_q + \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$$

が成り立つ。

❷ $y-b=0$ のとき，既約性から $y=b=1$ であるが，$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b} = \dfrac{1}{1}$ が 1 以上の Farey 隣数であることから，起こりえない。

❸ $x-a=0$ のとき，$x=a=1$ である。すると，$y=b+1$ となる。

$$(5.16) \iff \deg(b+1, b+2)_q = \deg(b, b+1)_q + 1,$$

$$(5.17) \iff \deg(b+1, b+2)_q = \deg(1,1)_q + b + 1$$

のように言い換えられる。各右辺は $(b, b+1)_q = (b)_q + q(b+1)_q$ より成立することがわかる。これで，帰納法が完成した。 □

定理 5-6 $1 \leq a \leq x$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,x) と $1 \leq b \leq y$ を満たす互いに素な自然数の組 (b,y) について，$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}$ は Farey 隣数をなしているとする。このとき，

$$(a+b, x+y)_q = (a,x)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil}(b,y)_q, \tag{5.18}$$

$$(a+b, x+y-(a+b))_q = (a, x-a)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil}(b, y-b)_q. \tag{5.19}$$

注意. 後の系 5-12 より，互いに素な自然数の組 (a,x) に対して $(a,x)_q = N_q\Bigl(\dfrac{a+x}{a}\Bigr)$ であることが示される (その証明には上の定理の (5.19) が使われる)。これを用いて (5.19) を N_q の等式に書き換えると，次のようになる：

$$N_q\Bigl(\frac{x+y}{a+b}\Bigr) = N_q\Bigl(\frac{x}{a}\Bigr) + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil} N_q\Bigl(\frac{y}{b}\Bigr). \tag{5.19$'$}$$

この等式は，(2.7) と同じである。なぜなら，$\dfrac{x}{a} \oplus \dfrac{y}{b} = [c_1, \ldots, c_l]^-$ $(c_j \geq 2\ (j=1,\ldots,l))$ と表わすと，(5.10) より $c_l - 1 = \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil$ と書き換えられるからである。

なお，(5.18) を N_q の等式に書き換えると次のようになる：

$$N_q\Bigl(\frac{a+b+x+y}{a+b}\Bigr) = N_q\Bigl(\frac{a+x}{a}\Bigr) + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil} N_q\Bigl(\frac{b+y}{b}\Bigr). \tag{5.18$'$}$$

この等式は，(5.19)$'$ において，x, y をそれぞれ $a+x, b+y$ に置き換えることにより得られる。

(**定理 5-6 の証明**)

(1) (5.18) は

$$\frac{(a+b, x+y)_q}{(a,x)_q} = 1 + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil} \frac{(b,y)_q}{(a,x)_q} \tag{5.20}$$

と書き換えられる。この等式が成り立つことを示す。仮定により，$a \leq x,\ b < y$ に注意する。

• $a+b \geq 3$ の場合を考える。この場合，定理 5-1 の証明より，

$$a<b \iff x<y$$

が成り立つ。

(i) $x<y$ の場合を考える。この場合，$\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil = 1$ であるから，

$$\begin{aligned}
((5.20)\text{ の右辺}) &= 1 + q\frac{(b,y)_q}{(a,x)_q} \\
&= 1 + q\left[\frac{b}{a}\right]_q \oplus \left[\frac{y}{x}\right]_q \\
&= 1 + q\frac{N_q\left(\frac{b}{a}\right) + qN_q\left(\frac{y}{x}\right)}{D_q\left(\frac{b}{a}\right) + qD_q\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (\because\ b<y) \\
&= \frac{D_q\left(\frac{b}{a}\right) + qD_q\left(\frac{y}{x}\right) + qN_q\left(\frac{b}{a}\right) + q^2N_q\left(\frac{y}{x}\right)}{D_q\left(\frac{b}{a}\right) + qD_q\left(\frac{y}{x}\right)}
\end{aligned}$$

である。一方，

$$((5.20)\text{ の左辺}) = \left[\frac{a+b}{a} \oplus \frac{x+y}{x}\right]_q = \left[\frac{a+b}{a}\right]_q \oplus \left[\frac{x+y}{x}\right]_q$$

である。ここで，

$$\left[\frac{a+b}{a}\right]_q = \left[1+\frac{b}{a}\right]_q = 1 + q\left[\frac{b}{a}\right]_q = \frac{D_q\left(\frac{b}{a}\right) + qN_q\left(\frac{b}{a}\right)}{D_q\left(\frac{b}{a}\right)},$$

$$\left[\frac{x+y}{x}\right]_q = \frac{D_q\left(\frac{y}{x}\right) + qN_q\left(\frac{y}{x}\right)}{D_q\left(\frac{y}{x}\right)}$$

であり，$a \leq x,\ b<y$ より $a+b<x+y$ であるから $\left\lceil \frac{a+b}{x+y} \right\rceil = 1$ である。これより，

$$((5.20)\text{ の左辺}) = \frac{D_q\left(\frac{a}{b}\right) + qN_q\left(\frac{a}{b}\right) + q\Big(D_q\left(\frac{y}{x}\right) + qN_q\left(\frac{y}{x}\right)\Big)}{D_q\left(\frac{b}{a}\right) + qD_q\left(\frac{y}{x}\right)} = ((5.20)\text{ の右辺})$$

を得る。

(ii) $x>y$ の場合を考える。定理の等式は

$$\frac{(a+b,x+y)_q}{(b,y)_q} = \frac{(a,x)_q}{(b,y)_q} + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil} \tag{5.21}$$

と書き換えられるから，この等式が成り立つことを示す。

$$\frac{(a,x)_q}{(b,y)_q} = \frac{q^{\deg(x,a)_q}(x,a)_{q^{-1}}}{q^{\deg(y,b)_q}(y,b)_{q^{-1}}},$$

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b,x+y)_q}{(b,y)_q} &= \frac{q^{\deg(x+y,a+b)_q}(x+y,a+b)_{q^{-1}}}{q^{\deg(y,b)_q}(y,b)_{q^{-1}}} \\
&= q^{\deg(x+y,a+b)_q - \deg(y,b)_q}\frac{(y+x,b+a)_{q^{-1}}}{(y,b)_{q^{-1}}}
\end{aligned}$$

である。ここで，$x>y$ より $a>b$ である。そこで，(i) の結果を適用すると

$$\frac{(a+b,x+y)_q}{(b,y)_q}=q^{\deg(x+y,a+b)_q-\deg(y,b)_q}\left(1+q^{-1}\frac{(x,a)_{q^{-1}}}{(y,b)_{q^{-1}}}\right)$$

と書き換えられる。よって，

$$((5.21)\text{ の左辺})=q^{\deg(x+y,a+b)_q-\deg(y,b)_q}+q^{\deg(x+y,a+b)_q-\deg(x,a)_q-1}\frac{(a,x)_q}{(b,y)_q}$$

となる。よって，(5.21) が成り立つことを示すには

$$\deg(x+y,a+b)_q=\deg(y,b)_q+\left\lceil\frac{x}{y}\right\rceil=\deg(x,a)_q+1$$

を示せばよい。互いに素な (x,y) に対して $\deg(x,y)_q=\deg(y,x)_q$ であるから，補題 5-5 の 2 つの等式から，上の等式が従う。

● $a+b=2$ すなわち，$a=b=1$ の場合を考える。この場合，$y=x+1$ である。よって，示すべき等式は

$$(2,2x+1)_q=(1,x)_q+q(1,x+1)_q$$

となる。$2x+1$ を 2 で割ったときの余りは 1 であるから，定義より

$$\begin{aligned}(2,2x+1)_q&=(1,1)_q+q(2,2x-1)_q=(2)_q+q\big((1,1)_q+q(2,2x-3)_q\big)\\&=(2)_q^2+q^2(2,2x-3)_q\\&=\cdots\cdots\\&=(2)_q(x+1)_q+q^{x+2}\end{aligned}$$

となることがわかる。一方，

$$(1,x)_q+q(1,x+1)_q=(x+1)_q+q\big((x+1)_q+q^{x+1}\big)=(2)_q(x+1)_q+q^{x+2}$$

である。したがって，$(2,2x+1)_q=(1,x)_q+q(1,x+1)_q$ が成り立つ。これで，(5.18) が成り立つことが示された。

(2) 次に，(5.19) を示す。$x':=x-a,\ y':=y-b$ とおくと，$y'a-x'b=ay-bx=1$ となるので，$\dfrac{x'}{y'},\dfrac{a}{b}$ は Farey 隣数である。

Farey 隣数の定義より，$\dfrac{x'}{y'}<1<\dfrac{a}{b}$ となることはない。そこで以下の 4 つの場合に分けて考察する。

$$\text{(i) }\frac{x'}{y'}=1\quad\text{(ii) }\frac{a}{b}=1\quad\text{(iii) }\frac{x'}{y'}>1\quad\text{(iv) }\frac{a}{b}<1$$

(i) のとき，$x'=y'$ であり，$1=ay'-x'b$ であるから，$1=x'(a-b)$ となる。よって，$x'=1,\ a-b=1$ であり，これより，$x=a+1,\ b=a-1,\ y=b+1=a$ を得る。よって，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{a+1}{a},\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{a}{a-1}$ の場合になる。このとき，(5.19) は

$$(2a-1,2)_q=(a,1)_q+q^2(a-1,1)_q \tag{5.22}$$

となる。(1) の証明の最後と同様にして，$2a-1$ を 2 で割ったときの余りは 1 であるから，定義より

$$\begin{aligned}(2a-1,2)_q &= (2a-3,2)_q + q^a(2)_q = (2a-5,2)_q + (q^{a-1}+q^a)(2)_q = \cdots\cdots \\ &= (0,1)_q + (q+q^2+\cdots+q^{a-1}+q^a)(2)_q \\ &= (a+1)_q + q^2(a)_q\end{aligned}$$

となり，(5.22) は成り立つ。

(ii) のとき，$a=b$ であり，$1=ay-bx=a(y-x)$ より，$a=1,\ y-x=1$ となる。したがって，$\dfrac{x}{a}=\dfrac{x}{1},\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{x+1}{1}$ の場合になる。このとき，(5.19) は

$$(2,2x-1)_q = (1,x-1)_q + q(1,x)_q$$

となる。これは，(1) の証明の最後に導いた等式で，$a=x-1$ を代入した式に一致しているから，成立する。

(iii) のとき，$y'=1$ のときと $y'>1$ のときに分けて考察する。

① $y'=1$ のとき：$\dfrac{x'}{y'},\dfrac{a}{b}$ は 1 より大きな有理数からなる Farey 隣数であるから，補題 5-4 より，$\left\lceil\dfrac{x}{y}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{x'}{y'}\right\rceil+1=x'+1$ が成り立ち，(5.19) は次のように書き換えられる。

$$(a+b,x'+1)_q = (a,x')_q + q^{x'+1}(b,1)_q.$$

$1=a-bx'$ より，上の等式は次のように書き換えられる。

$$(b(x'+1)+1,x'+1)_q = (bx'+1,x')_q + q^{x'+1}(b,1)_q. \tag{5.23}$$

(i) のときの (5.22) の証明と同様にして

$$\begin{aligned}(b(x'+1)+1,x'+1)_q &= (x'+2)_q + q^2(b)_q(x'+1)_q, \\ (bx'+1,x')_q + q^{x'+1}(b,1)_q &= (x'+2)_q + q^2(b)_q(x'+1)_q\end{aligned}$$

となることがわかるので，(5.23) は成立する。

② $y'>1$ のとき，$\dfrac{x'}{y'},\dfrac{a}{b}$ は 1 より大きな有理数からなる Farey 隣数であるから，補題 5-4 より，$\left\lceil\dfrac{x}{y}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{x'}{y'}\right\rceil$ が成り立ち，(5.18) は次のように書き換えられる。

$$(a+b,x'+y')_q = (a,x')_q + q^{\left\lceil\frac{x'}{y'}\right\rceil}(b,y')_q. \tag{5.24}$$

ここで，$ay'-bx'=ay-bx=1$ であるから，$\dfrac{x'}{a},\dfrac{y'}{b}$ は Farey 隣数である。したがって，$1\le\dfrac{x'}{a}$ のとき，(5.18) を適用することができて，(5.14) は成り立つことがわかる。

• $\dfrac{y'}{b}=1$ のとき，$y'=b$ より $y=2b$ である。また，$1=ay-xb=b(2a-x)$ であるから，$b=1,\ x=2a-1$ である。よって，$\dfrac{x'}{a}=\dfrac{a-1}{a},\ \dfrac{y'}{b}=\dfrac{1}{1}$ の場合になる。これは $y'>1$ に反する。

• $\dfrac{x'}{a}, \dfrac{y'}{b}$ がともに 1 より小さいとき，(5.14) が成り立つことを示す。まず，$\dfrac{x}{a} > 1$ であるから，$x' = x - a \geq 1$ を満たしていることに注意する。さらに，$\dfrac{b}{y'}, \dfrac{a}{x'}$ は 1 よりも大きい有理数のなす Farey 隣数である。したがって，(1) より

$$(y' + x', b + a)_{q^{-1}} = (y', b)_{q^{-1}} + q^{-\lceil \frac{b}{a} \rceil}(x', a)_{q^{-1}} \tag{5.25}$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}
(a + b, x' + y')_q &= q^{\deg(a+b, x'+y')_q}(y' + x', b + a)_{q^{-1}}, \\
(a, x')_q &= q^{\deg(a, x')_q}(x', a)_{q^{-1}}, \\
(b, y')_q &= q^{\deg(b, y')_q}(y', b)_{q^{-1}}
\end{aligned}$$

であるから，これらを (5.25) に代入して

$$(a + b, x' + y')_q = q^{\deg(a+b, x'+y')_q - \deg(b, y')_q}(b, y')_q + q^{\deg(a+b, x'+y')_q - \deg(a, x')_q - \lceil \frac{b}{a} \rceil}(a, x')_q$$

を得る。したがって，証明を完成させるには，次の 2 つの等式を示せばよい。

$$\left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil = \deg(a + b, x' + y')_q - \deg(a, x')_q, \tag{5.26}$$

$$\left\lceil \frac{x'}{y'} \right\rceil = \deg(a + b, x' + y')_q - \deg(b, y')_q. \tag{5.27}$$

$\dfrac{b}{y'}, \dfrac{a}{x'}$ は 1 よりも大きい Farey 隣数であるから，補題 5-5 の (5.16) より，

$$\left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil = \deg(y' + x', b + a)_q - \deg(x', a)_q$$

が成り立つ。よって，(5.26) は成立する。

また，$y' > 1$ なので，補題 5-4 の (5.17) より

$$\left\lceil \frac{x'}{y'} \right\rceil = \deg(y' + x', b + a)_q - \deg(y', b)_q$$

が成り立つ。よって，(5.19) は成立する。

(iv) のとき，$1 \leq \dfrac{x}{a}$ より $a \leq x$ であり，$\dfrac{a}{b} < 1$ より $a < b$ である。さらに，$\dfrac{x'}{y'} < 1$ より $x - a < y - b$ を得る。よって，$0 < b - a < y - x$ となっている。したがって,

$$1 = ya - bx > ya - ax = a(y - x) \geq a$$

となるから，$a = 1$ であり，このとき，$y = bx + 1$ となる。これより，$\lceil \frac{x}{y} \rceil = 1$ となり，(5.19) は

$$(b + 1, (b + 1)(x - 1) + 1)_q = (1, x - 1)_q + q(b, b(x - 1) + 1)_q \tag{5.28}$$

と書き換えられる。(5.1) を用いて両辺を計算すると，左辺も右辺も $(x-1)_q(b+1)_q + q^{x-1}(b+2)_q$ に一致することがわかる。よって，(5.28) は成立する。

(i), (ii), (iii), (iv) のいずれの場合でも成立するので，(5.19) は成り立つ。 $\square$

定理 5-6 の 1 番目の等式 (5.18) と補題 5-2 の (5.13) を用いて，次が得られる。

系 5-7　$1 \le a \le x$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,x) と $1 \le b \le y$ を満たす互いに素な自然数の組 (b,y) について，$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}$ は Farey 隣数をなしているとする。このとき，

$$(y+x, b+a)_q = (y,b)_q + q^{\left\lfloor \frac{b}{a}+1 \right\rfloor}(x,a)_q, \tag{5.29}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
(y+x,b+a)_q &= q^{\deg(a+b,x+y)_q}(a+b,x+y)_{q^{-1}} \quad (\because (5.13)) \\
&= q^{\deg(a+b,x+y)_q}\left((a,x)_{q^{-1}} + q^{-\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil}(b,y)_{q^{-1}}\right) \quad (\because \text{定理 5-5}) \\
&= q^{\deg(a,x)_q + \left\lfloor \frac{b}{a}+1 \right\rfloor}(a,x)_{q^{-1}} + q^{\deg(b,y)_q}(b,y)_{q^{-1}} \quad (\because \text{補題 5-4}) \\
&= q^{\left\lfloor \frac{b}{a}+1 \right\rfloor}(x,a)_q + (y,b)_q \quad (\because (5.13))
\end{aligned}$$

となる。　□

定理5-6の 1 番目の等式 (5.18) と系5-7の等式から，互いに素な自然数の 2 つの組 $(a,x),(b,y)$ であって，$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}$ が Farey 隣数をなすものに対して，***q*-Farey 和** $(a,x)_q \oplus (b,y)_q$ を次のように定義する：

$$(a,x)_q \oplus (b,y)_q := \begin{cases} (a,x)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil}(b,y)_q & (1 \le a \le x \text{ のとき}), \\ (a,x)_q + q^{\left\lfloor \frac{x}{y}+1 \right\rfloor}(b,y)_q & (1 \le y \le b \text{ のとき}). \end{cases} \tag{5.30}$$

$$(a,x)_q \oplus (b,y)_q = (a+b,x+y)_q \tag{5.31}$$

である。

Farey 和を用いて，$(a,x)_q$ を帰納的に計算していくことができる。

例 5-8　$\dfrac{8}{5} = \dfrac{3}{2} \oplus \dfrac{5}{3}$ より

$$(5,8)_q = (2,3)_q + q^{\left\lceil \frac{3}{5} \right\rceil}(3,5)_q = (2,3)_q + q(3,5)_q$$

である。ここで，$\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{2}{1}$，$\dfrac{5}{3} = \dfrac{3}{2} \oplus \dfrac{2}{1}$ より

$$\begin{aligned}
(2,3)_q &= (1,1)_q + q^{\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil}(1,2)_q = (2)_q + q(3)_q = 1 + 2q + q^2 + q^3, \\
(3,5)_q &= (2,3)_q + q^{\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil}(1,2)_q = (2,3)_q + q^2(3)_q = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4
\end{aligned}$$

である。よって，

$$\begin{aligned}
(5,8)_q &= 1 + 2q + q^2 + q^3 + q(1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + q^4) \\
&= 1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5
\end{aligned}$$

となる。

演習 5-1　Farey 和を用いて，$(5,2)_q, (7,3)_q, (9,4)_q$ を求めよ。

● 5-3：正規化された Jones 多項式の $(a,b)_q$ による計算公式

ここでは，$(a,b)_q$ に関する前節で導いた様々な公式を用いて，有理絡み目の正規化された Jones 多項式，q-有理数の分子，分母を $(a,b)_q$ を用いて表わす。

定理 5-9 $1 \le a < b$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,b) に対して

$$J_{\frac{b}{a}}(q) = q^2(a,b-a)_q - (q-1)(a,b)_q, \tag{5.32}$$

$$(a,b)_q = J_{\frac{b}{a}}(q) + q(a-r,r)_q \qquad (\text{但し，} r \text{ は } b \text{ を } a \text{ で割ったときの余り}). \tag{5.33}$$

(証明)

まず，(5.32) を証明する。

1 以上の任意の有理数は $\dfrac{b}{1}$ $(b \in \mathbb{N})$ の形の有理数から $\oplus$ を有限回施すことにより得られる。そこで，$\oplus$ の回数に関する帰納法により，(5.32) を示す。

● $a=1$ のときを考える。

$b=1$ の場合，

$$((5.32)\text{ の右辺}) = q^2(1,0)_q - (q-1)(1,1)_q = q^2 - (q-1)(1+q) = 1 = J_1(q)$$

となり，(5.32) は成立する。

$b>1$ の場合，

$$((5.32)\text{ の右辺}) = q^2(b)_q - (q-1)(b+1)_q = 1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^b = J_{\frac{b}{1}}(q)$$

となり，(5.32) は成立する。

● $\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\beta = \dfrac{d}{c}$ は Farey 隣数をなす 1 以上の既約分数とし，これらについては (5.32) が成立していると仮定する。このとき，$\alpha \oplus \beta = \dfrac{b+d}{a+c}$ に対しても (5.32) が成り立つことを示す。

(1) $a=b$ のとき，a,b が互いに素であることより $a=b=1$ でなければならない。さらに，$c=1,\ d=2$ である。すると，$\alpha \oplus \beta = \dfrac{3}{2}$ である。

$$((5.32)\text{ の右辺}) = q^2(2,3-2)_q - (q-1)(2,3)_q = 1 + q + q^3$$

となる。一方，$\dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{1} \oplus \dfrac{2}{1}$ であるから，

$$J_{\frac{3}{2}}(q) = J_1(q) + q^{\lceil \frac{1}{2} \rceil} J_2(q) = 1 + q(1+q^2) = 1 + q + q^3$$

である。よって，(5.32) は成立する。

(2) $a<b,\ d-c>1$ のとき

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\oplus\beta}(q) &= J_\alpha(q) + q^{\lceil \frac{b}{d} \rceil} J_\beta(q) \quad ((3.19)) \\
&= q^2(a,b-a)_q - (q-1)(a,b)_q + q^{\lceil \frac{b}{d} \rceil}\big(q^2(c,d-c)_q - (q-1)(c,d)_q\big) \\
&= q^2\big((a,b-a)_q + q^{\lceil \frac{b-a}{d-c} \rceil}(c,d-c)_q\big) \\
&\qquad - (q-1)\big((a,b)_q + q^{\lceil \frac{b}{d} \rceil}(c,d)_q\big) \quad \left(\frac{b}{d} = \frac{b-a}{d-c} \oplus \frac{a}{c},\ d-c>1,\ \text{補題 5-4}\right) \\
&= q^2(a+c,(b-a)+(d-c))_q - (q-1)(a+c,b+d)_q \quad (\text{定理 5-6})
\end{aligned}$$

となる。よって，

$$J_{\alpha\oplus\beta}(q) = q^2(a+c,(b+d)-(a+c))_q - (q-1)(a+c,b+d)_q$$

となり，$\alpha\oplus\beta$ に対しても (5.32) が成り立つ。

(3) $a<b,\ d-c=1$ のとき，上と同様にして

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\oplus\beta}(q) &= q^2\big((a,b-a)_q + q^{b-a+1}(c,1)_q\big)\\
&\qquad -(q-1)\big((a,b)_q + q^{\lceil \frac{b}{d}\rceil}(c,d)_q\big) \quad \Big(\frac{b}{d}=\frac{b-a}{d-c}\oplus\frac{a}{c},\ d-c=1,\ \text{補題 5-4}\Big)\\
&= q^2\big((a,b-a)_q + q^{\lceil \frac{b}{c+1}\rceil}(c,1)_q\big) - (q-1)(a+c,b+d)_q \quad (\text{定理 5-6})\\
&= q^2(a+c,b-a+1)_q - (q-1)(a+c,b+d)_q \quad (\text{定理 5-6})
\end{aligned}$$

となる。よって，$\alpha\oplus\beta$ に対しても (5.32) が成り立つ。

(4) $a<b,\ d=c$ のとき，c,d が互いに素であることより $c=d=1$ でなければならない。このとき，$ad-bc=1$ より $a=b+1$ となり，$a\le b$ に反する。よって，$d=c$ は起こらない。

以上より，(5.32) は $1\le a\le b$ を満たす互いに素な任意の自然数の組 (a,b) に対して成立することが示された。

(5.32) を利用して，(5.35) を証明する。

• $a=b$ のとき，a,b は互いに素であるから，$a=b=1$ である。$(1,1)_q=(2)_q=1+q,\ J_1(q)+q(1,0)_q=1+q$ となるので，(5.35) は成立する。

• $a<b$ のときを考える。このとき，$(a,b)_q$ の定義より，b を a で割ったときの余りを r とおくと，

$$(a,b)_q = (a-r,r)_q + q(a,b-a)_q$$

となる。よって，(5.32) より

$$J_{\frac{b}{a}}(q) + q(a-r,r)_q = J_{\frac{b}{a}}(q) + q(a,b)_q - q^2(a,b-a)_q = (a,b)_q$$

を得る。 □

注意 5-10

(1) 定理の等式 (5.33) は [44; p.45] の等式 $J_{\frac{r}{s}}(q)=\mathcal{R}'-q\mathcal{S}'$ に対応している。

(2) Bapat, Becker, Licata [3; Theorem A.3] により，$J_{\frac{r}{s}}(q)$ は $\dfrac{r}{s}$ (>1) の左 q-変形の分子多項式 $\mathcal{R}^{\flat}_{\frac{r}{s}}(q)$ に一致することが示されている ([62; Theorem 4.2] も参照)。

定理 5-11 $1\le a\le p$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,p) について

$$N_q\Big(\frac{p}{a}\Big) = (a,p-a)_q, \tag{5.34}$$

$$D_q\Big(\frac{p}{a}\Big) = (a-r,r)_q. \tag{5.35}$$

但し，r は p を a で割ったときの余りである。

(**証明**)

先に，(5.34) を示す。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = [n]_q = \frac{[n]_q}{1}$$

であるから，

$$N_q\left(\frac{n}{1}\right) = [n]_q = (n)_q = (1, n-1)_q$$

である。よって，(5.34) は $a = 1$ のとき成立する。

1 より大きい任意の有理数は，$\dfrac{n}{1}$ $(n \in \mathbb{N})$ から $\oplus$ を有限回施すことにより得られる。今，$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}$ が 1 より大きい有理数からなる Farey 隣数であるとする。

$$N_q\left(\frac{x}{a}\right) = (a, x-a)_q, \qquad N_q\left(\frac{y}{b}\right) = (b, y-b)_q$$

が成り立っていると仮定すると，

$$\begin{aligned} (a+b, x+y-(a+b))_q &= (a, x-a)_q + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil}(b, y-b)_q \quad (\text{定理 } 5\text{-}6) \\ &= N_q\left(\frac{x}{a}\right) + q^{\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil} N_q\left(\frac{y}{b}\right) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= N_q\left(\frac{x}{a} \oplus \frac{y}{b}\right) \quad (\text{定理 } 5\text{-}1) \\ &= N_q\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \end{aligned}$$

となり，Farey 和 $\dfrac{x}{a} \oplus \dfrac{y}{b}$ に対しても成り立つ。数学的帰納法により，$1 \leq a \leq p$ を満たす互いに素なすべての自然数の組 (a, p) について，(5.34) は成立する。

次に，(5.35) を示す。これは，以下のように，(5.34) から導くことができる。

定理 5-9 より，

$$(a, p)_q = J_{\frac{p}{a}}(q) + q(a-r, r)_q \tag{5.36}$$

となる。但し，r は p を a で割ったときの余りである。この式に (4.19) において $\alpha = \dfrac{p}{a}$ を代入した式を代入すると，

$$(a, p)_q = qN_q\left(\frac{p}{a}\right) + (1-q)D_q\left(\frac{p}{a}\right) + q(a-r, r)_q \tag{5.37}$$

を得る。この式より，

$$\begin{aligned} (1-q)D_q\left(\frac{p}{a}\right) &= (a, p)_q - q(a-r, r)_q - q(a, p-a)_q \quad (\because (5.34)) \\ &= (1-q)(a-r, r)_q \quad (\because a < p, \ (5.1)) \end{aligned}$$

より，$D_q\left(\dfrac{p}{a}\right) = (a-r, r)_q$ が成り立つ。 □

自然数 a, x は互いに素であるとき，$a, a+x$ も互いに素である。$1 \leq a \leq a+x$ であるから，定理 5-11 より次が成立する。

系 5-12 互いに素な自然数の組 (a, x) について，

$$(a, x)_q = N_q\left(\frac{a+x}{a}\right). \tag{5.38}$$

注意. 定理 5-1 より，1 以上の有理数 $\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}$ が Farey 隣数であるとき，

$$\left[\frac{x+y}{a+b}\right]_q = \frac{N_q\left(\frac{x+y}{x}\right)}{N_q\left(\frac{a+b}{a}\right)}. \tag{5.39}$$

● 5-4：q-有理数の分子・分母多項式に関する算術予想

2019 年頃，小木曽先生により q-有理数の分母は，分母が同じ整数であるような 2 つの有理数に対して，q の多項式として一致するときもあれば一致しないときもあり，どのようなときに q-有理数の分母が一致するのかという問題が提起された。小木曽先生の修士の学生だった櫻井武は，いくつかの具体的な計算を行い，修士論文において次の予想を立てた [64; 予想 4.3.1](彼と同級の任鑫の修士論文 [61] にも記載がある)。

予想 5-13 (**算術予想 [35, 61, 64]**) p を奇素数とする。$1 \leq a \leq b < p$ に対して $D_q\left(\dfrac{a}{p}\right) = D_q\left(\dfrac{b}{p}\right)$ となるための必要十分条件は $ab \equiv -1 \pmod p$ となることであろう。

この予想の十分性は，p を奇素数に限ることなく成立することが，[35] において証明され，[63] において別証明が与えられた。前者の論文の中では 2 つの証明が与えられているが，ここでは $(a, x)_q$ を用いた証明を紹介する。なお，算術予想の必要性については，宮本により奇素数でない場合に複数個の反例が発見されている [35] ので，素数という条件は外せない。しかし，この予想を金沢大学の集中講義で話させていただいたところ，門上先生や数論を研究している院生から，「素数の冪」ではどうか？ という質問があった。確かに，素数冪では反例見つかっていないので，上記の予想の必要性に関しては p を素数の冪として成立する余地がある。

予想 5-13 は次と同値である。

補題 5-14 p を奇素数とする。予想 5-13 は次と同値である：$1 \leq a \leq b < p$ に対して $\left[\dfrac{p}{a}\right]_q$ の分子と $\left[\dfrac{p}{b}\right]_q$ の分子が一致するための必要十分条件は $ab \equiv -1 \pmod p$ となることであろう。

(**証明**)

• 予想 5-13 が成り立つと仮定する。$N_q\left(\dfrac{p}{a}\right) = N_q\left(\dfrac{p}{b}\right)$ であるとする。このとき，補題 4-23 より $D_q\left(\dfrac{p}{p+a}\right) = D_q\left(\dfrac{p}{p+b}\right)$ である。予想 5-13 より $(p+a)(p+b) \equiv -1 \pmod p$ となるが，$(p+a)(p+b) \equiv -1 \pmod p$ は $ab \equiv -1 \pmod p$ と同値である。

逆に，$ab \equiv -1 \pmod p$ と仮定すると，$(p+a)(p+b) \equiv ab \equiv -1 \pmod p$ であるから，予想 5-13 より $D_q\left(\dfrac{p}{p+a}\right) = D_q\left(\dfrac{p}{p+b}\right)$ である。補題 4-23 より，この等式は $N_q\left(\dfrac{p}{a}\right) = N_q\left(\dfrac{p}{b}\right)$ のように書き換えられる。ゆえに，補題の分子多項式に関する予想が成り立つ。

• 補題の分子多項式に関する予想が成り立つと仮定する。$D_q\left(\dfrac{a}{p}\right) = D_q\left(\dfrac{b}{p}\right)$ であるとする。補題 4-23 より，この等式は $N_q\left(\dfrac{p}{p-a}\right) = N_q\left(\dfrac{p}{p-b}\right)$ と書き換えられる。仮定より $(p-a)(p-b) \equiv -1 \pmod p$ となるが，これは $ab \equiv -1 \pmod p$ に同値である。

逆に，$ab \equiv -1 \pmod{p}$ であると仮定すると，$(p-a)(p-b) \equiv -1 \pmod{p}$ となり，仮定より $N_q\left(\dfrac{p}{p-a}\right) = N_q\left(\dfrac{p}{p-b}\right)$ が成り立つ。これを補題 4-23 を用いて書き換えると，$D_q\left(\dfrac{a}{p}\right) = D_q\left(\dfrac{b}{p}\right)$ となる。よって，予想 5-13 が成り立つ。 □

補題 5-15 $p \geq 2$ は自然数であり，a, b は

① $ab \equiv -1 \pmod{p}$,

② $1 \leq a \leq b < p$

であるような自然数とする。このとき，$ab = kp - 1$ を満たす $k \in \mathbb{Z}$ が存在し，

$$N_q\left(\frac{p}{a}\right) = (b, p-b)_q, \quad N_q\left(\frac{p}{b}\right) = (a, p-a)_q, \tag{5.40}$$

$$D_q\left(\frac{p}{a}\right) = (k, a-k)_q, \quad D_q\left(\frac{p}{b}\right) = (k, b-k)_q. \tag{5.41}$$

(証明)

①より，$ab = kp - 1$ を満たす $k \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって，a と p は互いに素であり，b と p は互いに素であり，既約分数 $\dfrac{p}{a} \geq 1$ は

$$\frac{p}{a} = \frac{b}{k} \oplus \frac{p-b}{a-k}$$

のように Farey 和に分解される。したがって，定理 5-1 より

$$N_q\left(\frac{p}{a}\right) = (b, p-b)_q, \qquad D_q\left(\frac{p}{a}\right) = (k, a-k)_q$$

である。同様に，既約分数 $\dfrac{p}{b} \geq 1$ は

$$\frac{p}{b} = \frac{a}{k} \oplus \frac{p-a}{b-k}$$

のように Farey 和に分解される。したがって，定理 5-1 より

$$N_q\left(\frac{p}{b}\right) = (a, p-a)_q, \qquad D_q\left(\frac{p}{b}\right) = (k, b-k)_q$$

である。 □

定理 5-16 (Kogiso, Miyamoto, Ren, W. and Yanagawa [35]) 任意の自然数 $p \geq 2$ および $1 \leq a \leq b < p$ かつ $ab \equiv -1 \pmod{p}$ を満たす任意の自然数 a, b に対して $N_q\left(\dfrac{p}{a}\right) = N_q\left(\dfrac{p}{b}\right)$ が成り立つ。したがって，予想 5-13 の十分性は正しい。

(証明)

$(a, p)_q$ の定義より

$$(a, p)_q = (a-r, r)_q + q(a, p-a)_q$$

が成り立つ。補題 5-15 より $(a, p-a)_q = N_q\left(\dfrac{p}{b}\right)$ であるから，上式は

$$(a, p)_q = (a-r, r)_q + qN_q\left(\frac{p}{b}\right) \tag{5.42}$$

と書き換えることができる。(5.37) と (5.42) より

$$qN_q\left(\frac{p}{b}\right)+(1-q)(a-r,r)_q=qN_q\left(\frac{p}{a}\right)+(1-q)D_q\left(\frac{p}{a}\right) \tag{5.43}$$

を得る。定理 5-11 より $D_q\left(\frac{p}{a}\right)=(a-r,r)_q$ であるから，これを上式に代入すると，$qN_q\left(\frac{p}{b}\right)=qN_q\left(\frac{p}{a}\right)$, すなわち，$N_q\left(\frac{p}{b}\right)=N_q\left(\frac{p}{a}\right)$ が得られる。 □

例 5-17 (**宮本 [35]**) $(p,a,b)=(24,5,11)$ とする。このとき，定理 5-11 と補題 5-2 より

$$\begin{aligned}
N_q\left(\frac{p}{a}\right)&=(5,19)_q=(5-4,4)_q(3)_q+q^3(5,4)_q\\
&=(5)_q(3)_q+q^3(5)_q+q^5(4)_q\\
&=(5)_q(4)_q+q^5(4)_q\\
&=(6)_q(4)_q,\\
N_q\left(\frac{p}{b}\right)&=(11,13)_q=(9,2)_q+q\big((11-2,2)_q+q^6(1,1)_q\big)\\
&=(9,2)_q(2)_q+q^7(2)_q\\
&=\big((7,2)_q+q^5(2)_q+q^7\big)(2)_q\\
&\cdots\\
&=\big(1+q(2)_q+q^2(2)_q+q^3(2)_q+q^4(2)_q+q^5(2)_q+q^7\big)(2)_q\\
&=\big(1+q(2)_q(5)_q+q^7\big)(2)_q\\
&=\big(1+q(5)_q+q^2(5)_q+q^7\big)(2)_q\\
&=\big((6)_q+q^2((5)_q+q^5)\big)(2)_q\\
&=\big((6)_q+q^2(6)_q\big)(2)_q\\
&=(6)_q(1+q^2)(2)_q\\
&=(6)_q(4)_q
\end{aligned}$$

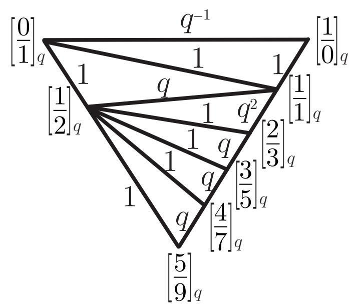
よって，$N_q\left(\frac{24}{5}\right)=N_q\left(\frac{24}{11}\right)$ である。しかしながら，$ab=55\equiv 7\not\equiv -1 \pmod{24}$ である。したがって，予想 5-13 の必要性は p が素数でないとき，成り立たない。 □

注意 5-18 q-有理数の分母多項式 $D_q(\alpha)$ と分子多項式 $N_q(\alpha)$ に関する，別の予想を Morier-Genoud と Ovsineko [44; Section 7] は立てている。この予想は，$D_q(\alpha), N_q(\alpha)$ における $1, q, q^2, \ldots$ の係数を取り出したとき，1 から増加して最大値をとり，そこから今度は減少して 1 の値を取るであろうという予想であり，McConville, Sagan, Smyth [41] により**階数ユニモダル予想** (rank-unimodality conjecture) と呼ばれている。この予想は 2023 年に Oğuz と Ravichandran [56] により肯定的に解決されているが，その証明はかなり技巧的なため，より明快な証明が求められる。

● **5-5：フリーズパターンの q-変形**

Conway-Coxeter フリーズの q-変形は，Morier-Genoud と Ovsienko [46] や小木曽岳義によって独立に考えられているが，ここでは，$(a,b)_q$ を用いた CCF の q-変形の構成方法を紹介する。

その構成方法を祖先三角形 $\mathrm{YAT}\left(\frac{5}{9}\right)$ を用いて説明しよう。$\mathrm{YAT}\left(\frac{5}{9}\right)$ の各頂点における有理数を q-有理数に置き換えたものを考える。



$$\left[\frac{0}{1}\right]_q = \frac{(0)_q}{(1)_q} = \frac{0}{1}, \qquad \left[\frac{1}{0}\right]_q = \frac{(1)_q}{(0)_q} = \frac{1}{0},$$
$$\left[\frac{1}{1}\right]_q = \frac{(0,1)_q}{(1,0)_q} = \frac{1}{1}, \qquad \left[\frac{1}{2}\right]_q = \frac{(0,1)_q}{(1,1)_q} = \frac{1}{(2)_q},$$
$$\left[\frac{2}{3}\right]_q = \frac{(1,1)_q}{(2,1)_q} = \frac{(2)_q}{(3)_q}, \qquad \left[\frac{3}{5}\right]_q = \frac{(1,2)_q}{(2,3)_q} = \frac{(3)_q}{(2,3)_q},$$
$$\left[\frac{4}{7}\right]_q = \frac{(1,3)_q}{(2,5)_q} = \frac{(4)_q}{(2,5)_q}, \qquad \left[\frac{5}{9}\right]_q = \frac{(1,4)_q}{(2,7)_q} = \frac{(5)_q}{(2,7)_q}.$$

各 q-有理数の分母に着目し，祖先三角形を正多角形の三角形分割とみなして CCF を構成したときと同様に，次のように q-有理数の分母を並べたものを考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & & & & \\
\hline
\cdots & & (3)_q & & & & & & \cdots \\
 & & & (2,3)_q & & & & & \\
\cdots & & & & (2,5)_q & & & & \cdots \\
 & & & & & (2,7)_q & & & \\
\cdots & & & & & & (2)_q & & \cdots \\
\hline
 & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

整数の CCF のときと同様に，各ダイヤモンド状に配置されている 4 つの多項式について，$ad-bc$ が q の冪になるように $(a,b)_q$ を埋めていく。すると，次のような表が得られる。

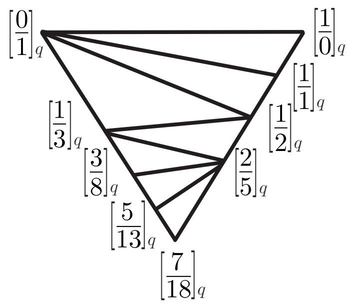
$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & \\
\hline
\cdots & & (3)_q & & (2)_q & & (2)_q & & (2)_q & & 1 & & (5)_q & & (2)_q & & 1 & & (3)_q & & & & & \cdots \\
 & & & (2,3)_q & & (3)_q & & (3)_q & & 1 & & (4)_q & & (4,5)_q & & 1 & & (2)_q & & (2,3)_q & & & & \\
 & & & & (2,5)_q & & (4)_q & & 1 & & (3)_q & & (3,4)_q & & (4)_q & & 1 & & (3)_q & & (2,5)_q & & & \cdots \\
 & & & & & (2,7)_q & & 1 & & (2)_q & & (2,3)_q & & (3)_q & & (3)_q & & 1 & & (4)_q & & (2,7)_q & & \\
 & & & & & & (2)_q & & 1 & & (3)_q & & (2)_q & & (2)_q & & (2)_q & & 1 & & (5)_q & & (2)_q & \cdots \\
\hline
 & & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

興味深いのは，これは q に関する多項式の繰り返し模様であるが，整数のときと違い，映進対称性を持っていないということである。q に 1 を代入したときに最大の整数となる，左上から右下へ伸ばした直線を含む「正弦曲線」上に並んだ多項式は

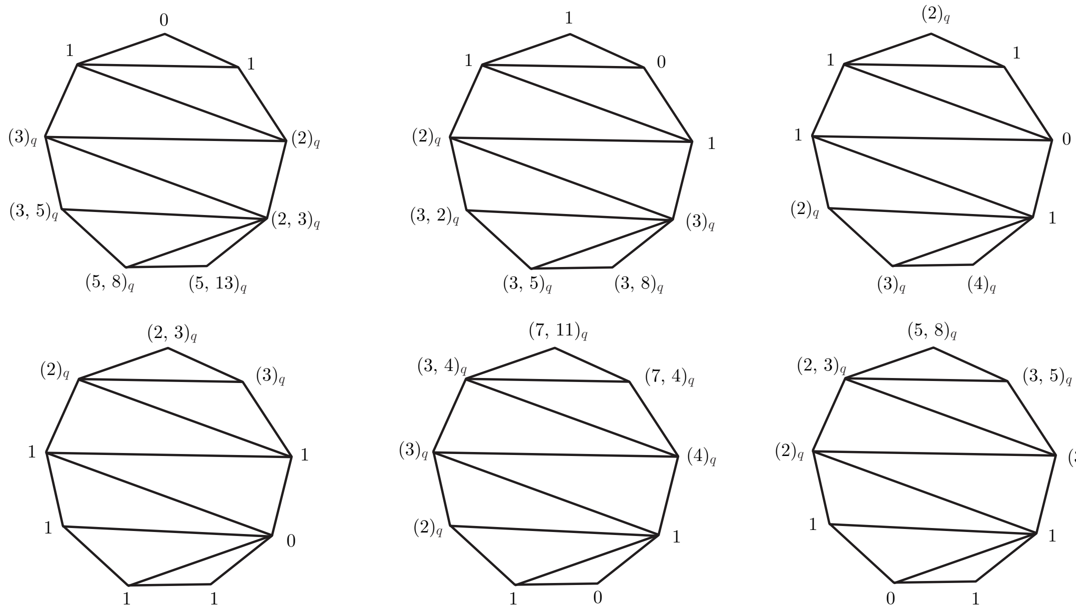
$$1, (3)_q, (2,3)_q, (2,5)_q, (2,7)_q, (2)_q, 1, 1, (3)_q, (2,3)_q, (3,4)_q, (4,5)_q, (2)_q, 1$$

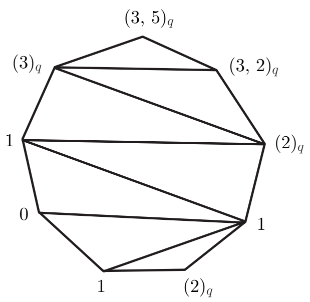
の繰り返しとなっていて，整数の場合には，ちょうど半分のところで数字も折り返しとなっていたが，今回はそうなっていない。

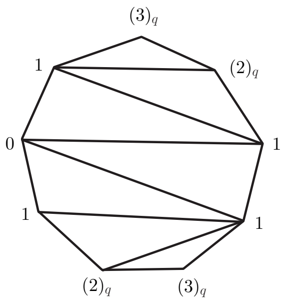
もう一つの例を考えよう。今度は，祖先三角形 $\mathrm{YAT}\left(\dfrac{7}{18}\right)$ の各頂点における有理数を q-有理数に置き換えたものを考える。

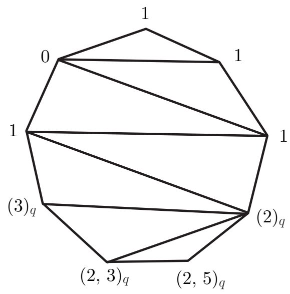


これを正 9 角形の形に整形して，各頂点に q-有理数の分母を配置すると，下図の一番左となり，時計回りに 0 の位置を 1 つずつずらしていって，規則 2，3 の「q-変形アナロジー」により頂点に q-多項式を配置していくと，下図の左から順に次のようになる。





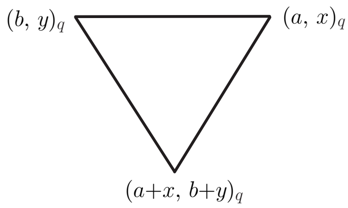




整数の CCF のときと同様に，各ダイヤモンド状に配置されている 4 つの多項式 a, b, c, d について，$ad - bc$ が q の冪になるように $(a, b)_q$ を埋めていくと次のような表が得られる。

	1		1		1		1		1		1		1		1		1							
1		$(2)_q$		$(3)_q$		$(4)_q$		1		$(2)_q$		$(2)_q$		$(3)_q$		$(3)_q$		1						$\cdots$
	1		$(2,3)_q$		$(3,8)_q$		$(3)_q$		1		$(3)_q$		$(2,3)_q$		$(3,5)_q$		$(2)_q$		1					
		$(2)_q$		$(5,13)_q$		$(3,5)_q$		$(2)_q$		1		$(3,4)_q$		$(5,8)_q$		$(3,2)_q$		1		$(2)_q$				$\cdots$
			$(2,5)_q$		$(5,8)_q$		$(3,2)_q$		1		$(2)_q$		$(7,11)_q$		$(3,5)_q$		$(2)_q$		1		$(2,5)_q$			
				$(2,3)_q$		$(3,5)_q$		$(2)_q$		1		$(2,3)_q$		$(7,4)_q$		$(3)_q$		1		$(3)_q$		$(2,3)_q$		$\cdots$
$\cdots$					$(3)_q$		$(3)_q$		1		$(2)_q$		$(3)_q$		$(4)_q$		1		1		$(2)_q$		$(3)_q$	
						1		1		1		1		1		1		1		1		1		1

注意. ほとんどは $a < b$ となる $(a, b)_q$ が配置されているが，$(3, 2)_q$ と $(7, 4)_q$ のように第 1 成分を大きくしないとうまくいかないところがある。因みに，$(7, 11)_q = (3, 4)_q + q(7, 4)_q$，$(7, 4)_q = (3, 4)_q + q^2(4)_q$，$(3, 2)_q = (3)_q + q^2(2)_q$，$(2, 3)_q = (2)_q + q(3)_q$ である。一般に，$(b, y)_q$ の配置された頂点を時計回りに回すと，$(a, x)_q$ の配置された頂点に移るとき，残りの頂点に $(a+x, b+y)_q$ を配置するという規則を設ける：



式で書くと，(4.19) 式のようになる。

- $a + x < b + y$ のとき

$$(a + x, b + y)_q = (a, x)_q + q(b, y)_q$$

  但し，$b = a + x$ である。

- $a + x > b + y$ のとき

$$(a + x, b + y)_q = (a, x)_q + q^e(b, y)_q$$

  但し，$x = b + y$, $e = \lceil \frac{a+x}{b+y} \rceil$ である。

このように配置すると，各ダイヤモンド状に配置されている 4 つの多項式 a, b, c, d について，$ad - bc$ が q の冪になることが予想される。実際，次が成り立つ。

注意 5-19 $ad-bc=1$ を満たす $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ を考える。$a=a_1+a_2,\ b=b_1+b_2,\ c=c_1+c_2,\ d=d_1+d_2$ とし, a_1,a_2 は互いに素, b_1,b_2 は互いに素, c_1,c_2 は互いに素, d_1,d_2 は互いに素であるとする。このとき, Morier-Genoud と Ovsienko の結果 (定理 4-11) より $(a_1,a_2)_q(d_1,d_2)_q-(b_1,b_2)_q(c_1,c_2)_q$ は q の冪乗となる。

§6. 有理数の祖先三角形からクラスター代数へ

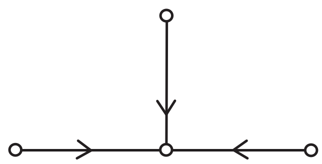
クラスター代数は日本語では団代数とも呼ばれ，Fomin と Zelevinsky [11,12] により 2000 年頃に導入された可換代数である。この代数は，クイバーと呼ばれる有向グラフとクラスターと呼ばれる変数の組を伴って定義され，変異と呼ばれる操作により生成される。昨年 (2024 年)，この分野の第一人者・中西知樹による著書 [54] が出版され，その基礎理論へのアクセスが容易になった。

クラスター代数は，可換代数，表現論，組合せ論，可積分系，圏論，双曲幾何，トポロジーをはじめとする数学の広汎な分野と関わりを持つ。そのエッセンスは，井上玲の集中講義録 [22] と解説記事 [23]，数理科学の特集 [75] や西山享の著書 [55] の後半等により知ることができる。少し発展的な内容を含む解説記事として，[36,42,53,57] がある。

この節では，クイバーとクラスター代数の定義と例を述べた後，有理数の祖先三角形から定まるクイバー上の A 型クラスター代数を考え，それに付随する特別な F-多項式の特殊化として，正規化された Jones 多項式に対する命題 3-24 の漸化式が得られることを示す。後半では，A 型クラスター代数における特別なクラスター変数に対する，永井渡と寺嶋郁二による状態和公式 [51] から上述の F-多項式を導く。

● 6-1：クイバー（箙）

日本語では箙 (えびら) とも呼ばれるクイバー (quiver) は，本来 “矢筒”（矢を収める筒状の入れ物）を意味するが，数学的には (有限個の頂点と辺からなる) 有向グラフのことを指す。



クイバーの厳密な定義は次の通りである。

定義 6-1 以下の条件を満たす 4 つ組 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ は**クイバー** (quiver) と呼ばれる：

(Q1) Q_0, Q_1 はそれぞれ集合である。

(Q2) $s,t:Q_1\longrightarrow Q_0$ はそれぞれ写像である。

Q_0 の元を**頂点** (vertex)，Q_1 の元を**矢** (arrow) といい，各 $\alpha\in Q_1$ に対して $s(\alpha),t(\alpha)$ をそれぞれ α の**始点** (starting point)，**終点** (terminal point) という。

矢 α を図示するときには，始点 $s(\alpha)$ から終点 $t(\alpha)$ に向かう矢印で表わす。

$$s(\alpha)\xrightarrow{\quad\alpha\quad}t(\alpha)$$

クイバー $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ が**有限** (finite) であるとは，Q_0,Q_1 がともに有限集合であるときをいう。このノートでは，**クイバーは常に有限であると仮定する**。

有向グラフと呼ばずにクイバーと呼ぶのは，それを単にグラフと考えるのではなく，頂点にベクトル空間を配置し，矢に線形写像を配置して，その表現論を展開することが目的だからである。その理論体系は1970年代初頭にGabriel [14] によって展開された。その方向に沿ったクイバーの表現論は，草場公邦によって書かれた [37; 第2章] により知ることができる。現在はクイバーに関するたくさんの入門書・専門書が出版されているが，その中から初学者向けにわかりやすく書かれたものとしてSchifflerによる著書 [65] を挙げておく。

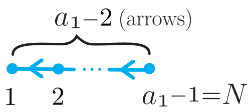
例6-2 自然数 N に対して，A 型Dynkin図形 A_N とは，次のような一直線に伸びる形をした，N 個の頂点からなる非有向グラフのことをいう。

$$\circ \text{———} \circ \text{———} \circ \text{——} \qquad \cdots\cdots \qquad \text{——} \circ \text{———} \circ$$

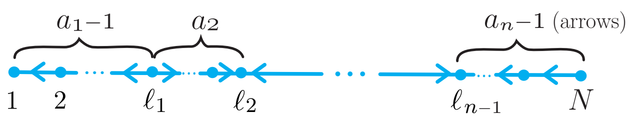
この各辺に任意に向きを与えて有向グラフにしたものを A_N 型クイバーまたは A 型クイバーと呼ぶ。

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ とし，クイバー $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を次のように定める：

- $n = 1$ の場合

$Q(a_1) =$ 

- $n > 1$ かつ奇数の場合

$Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$ 

但し，$\ell_k := a_1 + \cdots + a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$，$N = \ell_n - 1$ である。

$n > 1$ が偶数のときにも同様に定義される (最後の $(a_n - 1)$ 本の矢は右向きになる)。

クイバー Q における**ループ** (loop) とは，始点と終点が一致する矢のことをいう。**2-サイクル** (2-cycle) とは，異なる矢 α, β のなす組であって，$s(\alpha) = t(\beta)$，$t(\alpha) = s(\beta)$ を満たすもののことをいう。

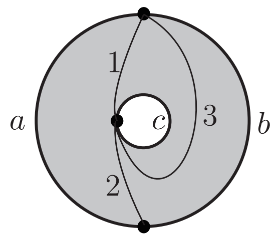
曲面の三角形分割からクイバーを構成する方法が，Fomin, Shapiro, Dylan Thurston [10] により与えられた。ここでは，少し限定された状況下での定義を与える。

S をコンパクトな境界のある曲面とし，S には境界に含まれる有限集合 M が指定されているものとする。さらに，M は S の境界 ∂S の各連結成分上の点を含むものとする。このとき，組 (S, M) を**マーク付き曲面** (surface with marked points) と呼ぶ。マーク付き曲面 (S, M) に，すべての頂点が M に属するような S の三角形分割 T が与えられたとする。ここでの三角形分割においては，各辺は自己交差を持たない曲線でよい。そこで，その三角形分割における辺のことを**弧** (arc) と呼ぶことにしょう。

マーク付き曲面 (S,M) の三角形分割 T から以下のようにして，ループと 2-サイクルを持たないクイバー Q_T を構成することができる。

T の弧を $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ とする。Q_T の頂点は，$i \longleftrightarrow \gamma_i$ という対応づけにより，1 から n までの整数である。i,j に対して，γ_i,γ_j は T の三角形の辺であり，時計回りに γ_i,γ_j の順であるとき，矢 $i \longrightarrow j$ を引く。このようにして得られる 2-サイクルない有向グラフが Q_T である。

例 6-3　次図で表わされたマーク付き曲面の三角形分割 T を考える。



このとき，クイバー Q_T は次のように作られる：

- $\triangle a12$ に対応して，矢 $1 \longrightarrow 2$ を引く。
- $\triangle 13c$ に対応して，矢 $1 \longrightarrow 3$ を引く。
- $\triangle 23b$ に対応して，矢 $2 \longrightarrow 3$ を引く。

$$Q_T = \begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \underset{2}{\bullet} \arrow[r] & \underset{3}{\bullet} \end{tikzcd}$$

例 6-4　有理数 $\alpha > 0$ に対して，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ を，M をその頂点集合として 2 次元閉円板を三角形分割したマーク付き曲面の三角形分割とみなす。よって，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ からクイバー $Q_\alpha := Q_{\mathrm{YAT}(\alpha)}$ が定まる。

$0 < \alpha < 1$ のとき，$\alpha = [0, a_1, \dots, a_n]$ $(a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N})$ のように連分数展開し，$\alpha > 1$ のとき，$\alpha = [a_1,\dots,a_n]$ $(a_1,\dots,a_n \in \mathbb{N})$ のように連分数展開する。$0 < \alpha < 1$ であっても $\alpha > 1$ であっても $N = a_1 + \cdots + a_n - 1$ とおき，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ を構成している基本三角形を上から順に $T_1,\dots,T_N$ とおく。T_{i-1} と T_i の共通辺のラベルを i と定めると，クイバー Q_α は，その構成方法から A_N 型であって，それは以下の規則により得られることがわかる。

- Q_α の頂点集合は $\{1,\dots,N\}$ である。$1,\dots,N$ を横一列に並べておく。
- 各 $i = 1,\dots,N-1$ に対して，T_i が右三角形ならば，$i+1$ から i へ矢 $i+1 \longrightarrow i$ を引き，T_i が左三角形ならば，i から $i+1$ へ矢 $i \longrightarrow i+1$ を引く。

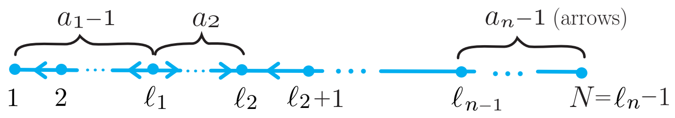
$\alpha = \dfrac{7}{19}$ の場合，T_1, T_3, T_4 は右三角形で，T_2, T_5, T_6 は左三角形であるから，

$$Q_{\frac{7}{19}} \quad = \quad \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ} \longleftarrow \underset{5}{\circ} \longrightarrow \underset{6}{\circ}$$

$\alpha = \dfrac{13}{9}$ の場合，$\dfrac{13}{9} = [1, 2, 3, 1]$ であるから，

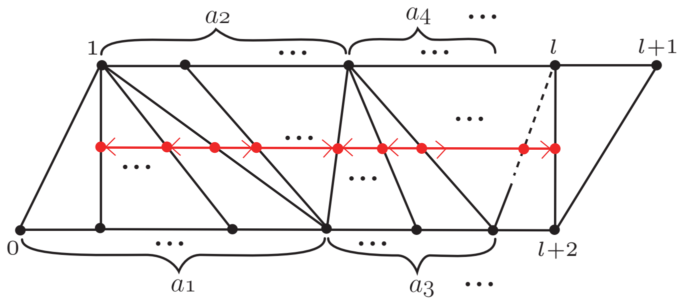
$$Q_{\frac{13}{9}} \;=\; \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ} \longleftarrow \underset{5}{\circ} \longleftarrow \underset{6}{\circ}$$

一般に，$0 < \alpha < 1$ のとき，クイバー Q_α は次の形をしている。



但し，$\ell_i := a_1 + \cdots + a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ である ([39; 6.2] も参照)。

また，$\alpha > 1$ のとき，クイバー Q_α は，Farey ボート FBT(α) から次図のように得られる。



よって，Q_α は，例 6-2 で与えられた $Q(a_1, \ldots, a_n)$ と同じである。

● 6-2：互いに素な自然数対の q 変形の組合せ論的な意味

Morier-Genoud と Ovsienko [44; Sections 3.1–3.2] は，有理数 $\alpha > 1$ に対して，$N_q(\alpha), D_q(\alpha)$ における q^i の係数の A 型クイバーによる解釈を与えている。その方法と適用例を述べる。

定義 6-5 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする。$C \subset Q_0$ が**閉包** (closure) とは，C の元から出て $Q_0 - C$ の元に入るような辺が存在しないときをいう。閉包 C が ℓ 個の元からなるとき，C を **ℓ-頂点閉包** (ℓ-vertex closure) と呼ぶ。特に，1-頂点閉包に含まれる頂点は**シンク** (sink) と呼ばれる。

定理 6-6 (Morier-Genoud and Ovsienko [44; Theorem 4]) 有理数 α (> 1) を $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}]$ $(a_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \ldots, 2m))$ と書く。$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m} + 2$ とおくと，$N_q(\alpha)$，$D_q(\alpha)$ は次のように表わされる：

$$N_q(\alpha) = 1 + \rho_1 q + \rho_2 q^2 + \cdots + \rho_{n-4} q^{n-4} + q^{n-3},$$
$$D_q(\alpha) = 1 + \sigma_1 q + \sigma_2 q^2 + \cdots + \sigma_{n-a_1-4} q^{n-a_1-4} + q^{n-a_1-3},$$

但し，

$$\rho_i = \sharp\{\ Q_\alpha \text{ の } i\text{-頂点閉包の全体}\ \} \quad (1 \le i \le n-4),$$
$$\sigma_i = \sharp\{\ \widetilde{Q}_\alpha \text{ の } i\text{-頂点閉包の全体}\ \} \quad (1 \le i \le n-a_1-4)$$

であり，$\widetilde{Q}_\alpha$ は Q_α から最初の a_1 個の矢を取り除いて得られるクイバーを表わす。 $\square$

例 6-7　$\alpha = \dfrac{13}{9} = [1,2,3,1]$ の場合を考える。クイバー $Q_{\frac{13}{9}}$ の頂点に次のように番号を振っておく。$n = 1+2+3+1+2 = 9$ であるから，$n-3=6$ である。

$$Q_{\frac{13}{9}} \qquad \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ$$

$$\widetilde{Q}_{\frac{13}{9}} \qquad \circ \longrightarrow \circ \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ \longleftarrow \circ$$

$Q_{\frac{13}{9}}$ において

- シンクは，“3”のみである。
- 2-頂点閉包は，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$ の 2 つである。
- 3-頂点閉包は，$\{1,2,3\}$，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$ の 3 つである。
- 4-頂点閉包は，$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4,5\}$，$\{3,4,5,6\}$ の 3 つである。
- 5-頂点閉包は，$\{1,2,3,4,5\}$，$\{2,,3,4,5,6\}$ の 2 つである。

よって，定理 6-6 を適用して

$$N_q\left(\frac{13}{9}\right) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6$$

を得る。

$$\widetilde{Q}_{\frac{13}{9}} \qquad \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ} \longleftarrow \underset{5}{\circ} \longleftarrow \underset{6}{\circ}$$

において

- シンクは，“3”のみである。
- 2-頂点閉包は，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$ の 2 つである。
- 3-頂点閉包は，$\{2,3,4\}$，$\{3,4,5\}$ の 2 つである。
- 4-頂点閉包は，$\{2,3,4,5\}$，$\{3,4,5,6\}$ の 2 つである。

よって，定理 6-6 を適用して

$$D_q\left(\frac{13}{9}\right) = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5$$

を得る。 □

定理 6-6 を $N_q\left(\dfrac{a+x}{a}\right)$ に適用することにより，系 5-12 の応用として次の結果が得られる。

系 6-8 (Morier-Genoud and Ovsienko [44; Theorem 4])　互いに素な自然数の組 (a,x) について，$\dfrac{x}{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}]$ $(a_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a_i \in \mathbb{N},\ i = 2, \ldots, 2m))$ と書き，$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m}$ とおく。このとき，

$$(a,x)_q = 1 + \rho_1 q + \rho_2 q^2 + \cdots + \rho_{n-1} q^{n-1} + q^n$$

と表わすと，

$$\rho_i = \sharp\left\{\ \widetilde{Q}_{\frac{x}{a}} \text{ の } i\text{-頂点閉包の全体}\ \right\} \quad (1 \le i \le n-1) \tag{6.1}$$

である。 $\square$

注意. [44; Proposition A.3&Examples A.4] において $J_{\frac{x}{a}}(q)$ の q^i の係数が (6.1) で与えられるとの記述がある。ただし，クイバー $\widetilde{Q}_{\frac{x}{a}}$ における左端の頂点が孤立しているものは閉包に含めないという条件のもとで数える必要があるようである。実際，論文において $J_{\frac{15}{4}}(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 2q^6 + q^7$ の例が与えられているが，

$$\widetilde{Q}_{\frac{15}{4}} \qquad \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longleftarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ} \longrightarrow \underset{5}{\circ} \longleftarrow \underset{6}{\circ} \longleftarrow \underset{7}{\circ}$$

において 2-閉包は $\{1,2\}$，$\{1,5\}$，$\{5,6\}$ の 3 つであるが $\{1,5\}$ は 1 が孤立しているので除外すると，$J_{\frac{15}{4}}(q)$ の q^2 の係数に一致する。同様に，3-閉包は $\{1,2,3\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,5,6\}$，$\{5,6,7\}$ の 4 つであるが，$\{1,5,6\}$ は 1 が孤立しているので除外すると，$J_{\frac{15}{4}}(q)$ の q^3 の係数に一致する。一方，$(4,15)_q$ の係数には以下のように無条件に一致する：$\dfrac{15}{4} = \dfrac{11}{3} \oplus \dfrac{4}{1}$，$\dfrac{11}{3} = \dfrac{7}{2} \oplus \dfrac{4}{1}$ より

$$\begin{aligned}
(4,15)_q &= (3,11)_q + q^{\lceil \frac{11}{4} \rceil}(1,4)_q \\
&= (2,7)_q + q^{\lceil \frac{7}{4} \rceil}(1,4)_q + q^3(1,4)_q \\
&= 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 3q^5 + 2q^6 + q^7.
\end{aligned}$$

例 6-9 (1) $\alpha = \dfrac{10}{7} = [1,2,2,1]$ の場合を考える。クイバー $\widetilde{Q}_{\frac{10}{7}}$ の頂点に次のように番号を振っておく。$n = 1+2+2+1 = 6$ である。

$$\widetilde{Q}_{\frac{10}{7}} \qquad \underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \longrightarrow \underset{4}{\circ} \longleftarrow \underset{5}{\circ} \longleftarrow \underset{6}{\circ}$$

$\widetilde{Q}_{\frac{10}{7}}$ において

- シンクは，“$1,4$”の 2 つである。
- 2-頂点閉包は，$\{1,4\}$，$\{3,4\}$，$\{4,5\}$ の 3 つである。
- 3-頂点閉包は，$\{1,3,4\}$，$\{1,4,5\}$，$\{3,4,5\}$，$\{4,5,6\}$ の 4 つである。
- 4-頂点閉包は，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,3,4,5\}$，$\{1,4,5,6\}$，$\{3,4,5,6\}$ の 4 つである。
- 5-頂点閉包は，$\{1,2,3,4,5\}$，$\{1,3,4,5,6\}$ の 2 つである。

よって，系 6-8 を適用して

$$(*1) \qquad (7,10)_q = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 4q^4 + 2q^5 + q^6$$

を得る。一方，

$$\begin{aligned}
(7,10)_q &= (7-3,3)_q + q(7,10-7)_q = (4,3)_q + q(7,3)_q \\
&= 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 4q^4 + 2q^5 + q^6
\end{aligned}$$

となる。これは $(*1)$ に一致している。

(2) $\alpha = \dfrac{4}{9} = [0, 2, 3, 1]$ の場合を考える。クイバー $\widetilde{Q}_{\frac{4}{9}}$ の頂点に次のように番号を振っておく。$n = 0 + 2 + 3 + 1 = 6$ である。

$$\widetilde{Q}_{\frac{4}{9}} \qquad \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r] & \underset{2}{\circ} \arrow[r] & \underset{3}{\circ} & \underset{4}{\circ} \arrow[l] & \underset{5}{\circ} \arrow[l] & \underset{6}{\circ} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\widetilde{Q}_{\frac{4}{9}}$ において

- シンクは，“3” の 1 つである。
- 2-頂点閉包は，$\{2, 3\}$ の 1 つである。
- 3-頂点閉包は，$\{1, 2, 3\}$，$\{2, 3, 4\}$，$\{3, 4, 5\}$ の 3 つである。
- 4-頂点閉包は，$\{1, 2, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4, 5\}$，$\{3, 4, 5, 6\}$ の 3 つである。
- 5-頂点閉包は，$\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$\{2, 3, 4, 5, 6\}$ の 2 つである。

よって，系 6-8 を適用して

$$(*2) \qquad (9, 4)_q = 1 + q + q^2 + 3q^3 + 3q^4 + 2q^5 + q^6$$

を得る。

● 6-3：クイバーに対するミューテーション操作

ループ や 2-サイクル を持たないクイバーから 1 つの頂点においてミューテーションと呼ばれる操作を施して新しいクイバーを構成することができる。ミューテーションの操作は Formin と Zelevinsky [11] によって導入された。

定義 6-10 (Formin and Zelevinsky [11; Definition 4.2]) $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を 2-サイクルとループを持たないクイバーとし，$k \in Q_0$ とする。このとき，次の手順により作られるクイバー $\mu_k(Q) = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ を Q の**頂点 k におけるミューテーションまたは変異** (mutation at k) と呼ぶ。

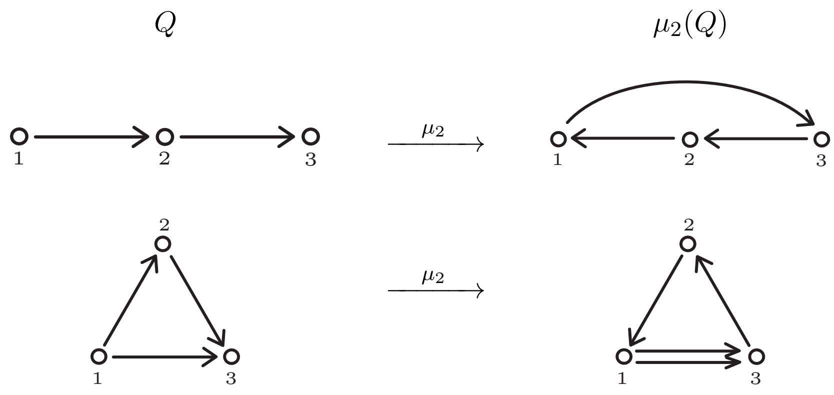
- $Q'_0 = Q_0$
- Q'_1, s', t' は以下のように定める。

  Step 1. k に出入りする長さ 2 の各道 $i \longrightarrow k \longrightarrow j$ に対して，新たに矢 $i \longrightarrow j$ を追加する。

  Step 2. k を始点または終点に持つすべての矢の向きを逆にする。

  Step 3. その結果，2-サイクルが生じた場合，その組を次々と取り除いて，2-サイクルのないクイバーにする。

頂点集合が J のクイバーを J 上のクイバーと呼ぶ。

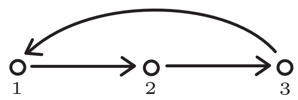


クイバー Q の有限の長さの頂点列 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_T)$ を**ミューテーション列** (mutation sequence) と呼ぶ。ミューテーション列 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_T)$ から定まるクイバーの変換

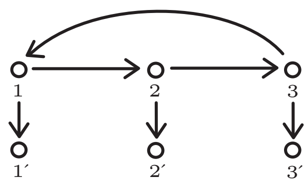
$$\mu_{\boldsymbol{m}} := \mu_{m_T} \circ \cdots \circ \mu_{m_2} \circ \mu_{m_1}$$

を Q に施して得られるクイバーをミューテーション列 $\boldsymbol{m}$ から定まる**終クイバー** (final quiver) と呼ぶ。

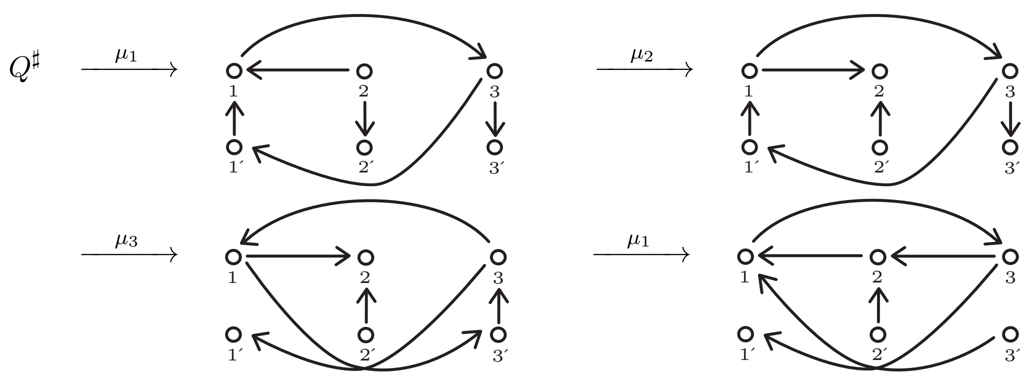
例 6-11　$A_2^{(1)}$-クイバー

$Q =$ 

を枠化して得られるクイバー

$Q^\sharp =$ 

を考える。これにミューテーション列 $\boldsymbol{m} = (1, 2, 3, 1)$ を施すと次のようになる。



● 6-4：クラスター代数と F-多項式の定義

有限集合 $J = \{1, \ldots, N\}$ を考え，各 $j \in J$ に対して，記号 y_j を用意し，これらで自由に生成される (乗法的な) 自由アーベル群を考える。これを

$$\mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_N) \tag{6.2}$$

で表わす。この自由アーベル群上に二項演算 $\oplus$ を次のように定める：

$$\prod_{j=1}^{N} y_j^{a_j} \oplus \prod_{j=1}^{N} y_j^{b_j} = \prod_{j=1}^{N} y_j^{\min\{a_j,b_j\}}. \tag{6.3}$$

このとき，$(\mathrm{Trop}(y_1,\ldots,y_N),\oplus,\cdot)$ は半体をなす。すなわち，$\mathbb{P} := \mathrm{Trop}(y_1,\ldots,y_N)$ とおくと，次が成り立つ。

(SF0) $\mathbb{P}$ は $\cdot$ を乗法的な積とするアーベル群である。

(SF1) 組 $\oplus$ は結合法則，交換法則を満たす。

(SF2) $\oplus$ と積 $\cdot$ との間に分配法則が成り立つ。

この半体を**トロピカル半体** (tropical semifield) と呼ぶ。

半体 $(\mathbb{P},\oplus,\cdot)$ において乗法群 $(\mathbb{P},\cdot)$ は捻れ元を持たないので，(加法 $\oplus$ の構造を忘れて) $\cdot$ を用いて定義される群環

$$\mathbb{ZP} = \Big\{ \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{P}} r_{\mathbf{y}}\mathbf{y} \;\Big|\; r_{\mathbf{y}} \in \mathbb{Z}, \text{但し，有限個の } \mathbf{y}\in\mathbb{P} \text{ を除いて } r_{\mathbf{y}} = 0 \Big\}$$

は整域である (証明は [54; 命題 1.10] を参照)。よって，群環 $\mathbb{ZP}$ の商体を考えることができる。群環 $\mathbb{ZP}$ の商体を係数環とする N 変数の有理関数体 $(\mathbb{QP})(x_1,\ldots,x_N)$ を $\mathcal{F}$ と記す：

$$\mathcal{F} := (\mathbb{QP})(x_1,\ldots,x_N).$$

ここで，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_N)$ は商体 $\mathbb{QP}$ 上で代数的に独立な元の組であることに注意する。この $\mathbf{x}$ と $J = \{1,\ldots,N\}$ 上の 2-サイクルとループを持たないクイバー Q との組 $\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$ を **初期種 (子)**(initial seed) と呼び，$\mathbf{x}$ を Σ の**初期クラスター** (initial cluster) といい，その各要素 x_i $(1 \le i \le N)$ を**初期クラスター変数** (initial cluster variable) という。

$\mathbb{QP}$ 上で代数的に独立な $\mathcal{F}$ の元の組 $\mathbf{x}' = (x'_1,\ldots,x'_N)$ であり，$(\mathbb{QP})(x_1,\ldots,x_N) = (\mathbb{QP})(x'_1,\ldots,x'_N)$ を満たすものを，Σ に変異と呼ばれる以下の操作を施すことにより生み出すことができる (証明は [54; 命題 2.4] を参照)。

頂点 $k \in J$ での Σ の**変異** (mutation at k) または**ミューテーション**とは，$\mu_k(\Sigma) = (\mathbf{x}', \mu_k(Q))$ によって与えられる $\mu_k(\Sigma)$ のことを意味する。ここで，$\mathbf{x}' = (x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x_{k+1},\ldots,x_N)$ であり，

$$x'_k = \frac{y_k \prod_{i\to k} x_i + \prod_{k\to i} x_i}{(y_k \oplus 1)x_k} \tag{6.4}$$

である。$\mathbf{x}'$ を $\mu_k(\mathbf{x})$ と書く。$\mathbf{x}'$ を**クラスター**，その各要素を**クラスター変数**と呼び，$\mu_k(\Sigma) = (\mu_k(\mathbf{x}'), \mu_k(Q))$ を**種 (子)**(seed) と呼ぶ。

定義より $\mathcal{F} = (\mathbb{QP})(x'_1,\ldots,x'_N)$ となるので，$\mu_k(\Sigma) = (\mathbf{x}', \mu_k(Q))$ を初期種として Q の任意の頂点での変異を考えることができる。

定義 6-12 (Formin and Zelevinsky [11]) 初期種 $\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$ から出発して，有限回変異を施すことにより得られるクラスター変数の全体からなる集合を $\mathcal{C}$ とおく。$\mathcal{C}$ によって $\mathbb{ZP}$ 上で

生成される $\mathcal{F}$ の部分代数を $\mathcal{A}(\Sigma)$ によって表わし，Σ を初期種とする**団代数** (cluster algebra) または**クラスター代数**という。

μ_k は対合である，すなわち，任意の種 Σ' に対して $\mu_k(\mu_k(\Sigma')) = \Sigma'$ が成り立つ。

定義 6-13 (**Formin and Zelevinsky [11]**) $\mathbb{P} = \mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_N)$ をトロピカル半体とし，$\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$ を $\mathcal{F} = (\mathbb{QP})(x_1, \ldots, x_N)$ の初期種とする。$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ を初期種 Σ の**初期係数組** (initial coefficient tuple) といい，各 y_i を $\boldsymbol{y}$**-変数** (y-variable) と呼ぶ。

各 $k \in Q_0 = \{1, \ldots, N\}$ に対して, 次のように定義される $\mathbb{P}$ の元の組 $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_k, \ldots, y'_N)$ を k での**変異**または**ミューテーション**と呼び，$\mu_k(\mathbf{y})$ により表わす：

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & (j = k \text{ のとき}), \\ y_j \prod_{k \to j} y_k (y_k \oplus 1)^{-1} \prod_{j \to k} (y_k \oplus 1) & (j \neq k \text{ のとき}). \end{cases} \tag{6.5}$$

ここで，$\prod_{k \to j}$，$\prod_{j \to k}$ はそれぞれクイバー Q において頂点 k から出る矢 $k \to j$ のすべてに渡る積および頂点 k に入る矢 $j \to k$ のすべてに渡る積を意味する。

変異および変異列は係数組を含めて考えることが多い。この場合，初期種とは $\Sigma = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q)$ のことであり，k での変異とは，$\mu_k(\Sigma) = (\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(\mathbf{y}), \mu_k(Q))$ のことである。$\mu_k(\mathbf{y})$ を**係数組** (coefficient tuple) という。

注意. Q は 2-サイクルを含まないので, (6.5) の $j \neq k$ の場合において, 2 つの積 $\prod_{k \to j} y_k(y_k \oplus 1)^{-1}$，$\prod_{j \to k} (y_k \oplus 1)$ のうちの一方は常に 1 である。

例 6-14 $\alpha = [3]$ の場合

$$Q_{[3]} = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ である。

初期種 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q_{[3]})$ に 1 でのミューテーション μ_1 を施す。$(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, Q^{(1)}) := \mu_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q_{[3]})$ とおくと，これらは次のようになる。

$$Q^{(1)} = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{y_1 x_2 + 1}{x_1}, x_2, x_3\right), \quad \mathbf{y}^{(1)} = \left(\frac{1}{y_1}, y_2, y_3\right)$$

次に，種 $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, Q^{(1)})$ に 2 でのミューテーション μ_2 を施し，それによって得られる種を $(\mathbf{x}^{(1,2)}, \mathbf{y}^{(1,2)}, Q^{(1,2)})$ とおく。すると，これらは次で与えられる：

$$Q^{(1,2)} = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \qquad \mathbf{x}^{(1,2)} = \left(x_1^{(1)}, \frac{y_2 x_1^{(1)} x_3 + 1}{x_2}, x_3\right), \quad \mathbf{y}^{(1,2)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, y_3\right)$$

ここで，$x_1^{(1)}$ は $\mathbf{x}^{(1)}$ における第 1 番目の変数を表わす。

次に，種 $(\mathbf{x}^{(1,2)}, \mathbf{y}^{(1,2)}, Q^{(1,2)})$ に 3 でのミューテーション μ_3 を施し，それによって得られる種を $(\mathbf{x}^{(1,2,3)}, \mathbf{y}^{(1,2,3)}, Q^{(1,2,3)})$ とおく。すると，これらは次で与えられる：

$$Q^{(1,2,3)} = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \qquad \mathbf{x}^{(1,2,3)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, \frac{y_3 x_2^{(1,2)} x_4 + 1}{x_3}\right), \quad \mathbf{y}^{(1,2,3)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}\right)$$

ここで，$x_2^{(1,2)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2)}$ における第 2 番目の変数を表わす。

一般に，$\alpha = [N+1]$ $(N \in \mathbb{N})$ の場合

$$Q_{[N+1]} =$$


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ であり，これに 1 でのミューテーション，2 でのミューテーションの順にミューテーションを行い，最後に N でのミューテーションを施し，それによって得られる種を $(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,N)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,N)}, Q^{(1,2,\ldots,N)})$ とおくと，これらは次で与えられることがわかる：

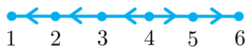
$$Q^{(1,2,\ldots,N)} =$$


$$\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,N)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, \ldots, x_{N-1}^{(1,2,\ldots,N-1)}, \frac{y_N x_{N-1}^{(1,2,\ldots,N-1)} + 1}{x_N}\right)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,\ldots,N)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \ldots, \frac{1}{y_N}\right)$$

但し，$x_j^{(1,2,\ldots,j)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,j)}$ における第 j 番目の変数を表わす。

例 6-15　$\alpha = [4,3]$ の場合

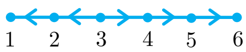
$$Q_\alpha =$$


$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_6)$ である。$Q = Q_\alpha$ と略記する。

初期種 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q_\alpha)$ から始めて，帰納的に $j = 1,2,3$ に対してミューテーション $\mu_1, \ldots, \mu_j$ を順次施すことにより，種

$$(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,j)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,j)}, Q^{(1,2,\ldots,j)})$$

が定義され，例 6-14 と同様の計算により

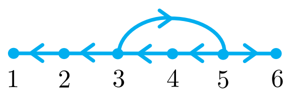
$$Q^{(1,2,3)} =$$


$$\mathbf{x}^{(1,2,3)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, \frac{y_3 x_2^{(1,2)} x_4 + 1}{x_3}, x_4\right)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,3)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, y_4\right)$$

となる。但し，$j = 1,2,3$ に対して $x_j^{(1,2,\ldots,j)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,j)}$ における第 i 番目の変数を表わす。

次に，$(\mathbf{x}^{(1,2,3)}, \mathbf{y}^{(1,2,3)}, Q^{(1,2,3)})$ に，4 でのミューテーション μ_4 を施すことによって種 $(\mathbf{x}^{(1,2,3,4)}, \mathbf{y}^{(1,2,3,4)}, Q^{(1,2,3,4)})$ を定義する。これらは次で与えられる：

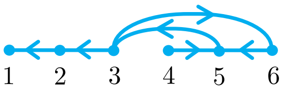
$$Q^{(1,2,3,4)} =$$


$$\mathbf{x}^{(1,2,3,4)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, \ldots, x_3^{(1,2,3)}, \frac{y_4 x_3^{(1,2,3)} + x_5}{x_4}, x_5, x_6\right)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,3,4)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}, y_4 y_5, y_6\right)$$

次に，$(\mathbf{x}^{(1,2,3,4)}, \mathbf{y}^{(1,2,3,4)}, Q^{(1,2,3,4)})$ に，5 でのミューテーション μ_5 を施すことによって種 $(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,5)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,5)}, Q^{(1,2,\ldots,5)})$ を定義する。これらは次で与えられる：

$Q^{(1,2,\ldots,5)} =$



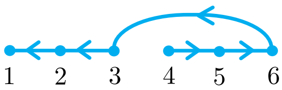
$$\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,5)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, x_3^{(1,2,3)}, x_4^{(1,2,3,4)}, \frac{y_4y_5x_3^{(1,2,3)} + x_4^{(1,2,3,4)}x_6}{x_5}, x_6\right)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,\ldots,5)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, y_5, \frac{1}{y_4y_5}, y_4y_5y_6\right)$$

ここで，$x_4^{(1,2,3,4)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2,3,4)}$ における第 4 番目の変数を表わす。

最後に，種 $(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,5)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,5)}, Q^{(1,2,\ldots,5)})$ に 6 でのミューテーション μ_6 を施し，それによって得られる種を $(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,6)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,6)}, Q^{(1,2,\ldots,6)})$ とおく。すると，これらは次で与えられる：

$Q^{(1,2,\ldots,6)} =$



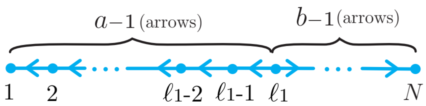
$$\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,6)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, x_3^{(1,2,3)}, x_4^{(1,2,3,4)}, x_5^{(1,2,\ldots,5)}, \frac{y_4y_5y_6x_3^{(1,2,3)} + x_5^{(1,2,\ldots,5)}}{x_6}\right)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,\ldots,6)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}, y_5, y_6, \frac{1}{y_4y_5y_6}\right)$$

ここで，$x_5^{(1,2,\ldots,5)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,5)}$ における第 5 番目の変数を表わす。

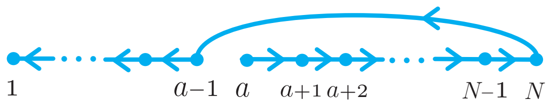
一般に，$\alpha = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{N},\ b \geq 2)$ の場合，$\ell_1 = a$，$N = a + b - 1$ とおくと，

$Q_\alpha =$



$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ である。$Q = Q_\alpha$ と略記し，$\mu_1, \ldots, \mu_N$ の順にミューテーションを施し，それによって得られる種を $(\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,N)}, \mathbf{y}^{(1,2,\ldots,N)}, Q^{(1,2,\ldots,N)})$ とおく。すると，これらは次で与えられる：

$Q^{(1,2,\ldots,N)} =$



$$\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,N)} = \Bigg(x_1^{(1)}, x_2^{(1,2)}, \ldots, x_{a-1}^{(1,2,\ldots,a-1)}, x_a^{(1,2,\ldots,a)}, x_{a+1}^{(1,2,\ldots,a+1)}, \ldots, x_{N-1}^{(1,2,\ldots,N-1)}, \frac{y_ay_{a+1}\cdots y_Nx_{a-1}^{(1,2,\ldots,a-1)} + x_{N-1}^{(1,2,\ldots,N-1)}}{x_N}\Bigg)$$

$$\mathbf{y}^{(1,2,\ldots,N)} = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \ldots, \frac{1}{y_{a-1}}, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{N-1}, y_N, \frac{1}{y_ay_{a+1}\cdots y_N}\right)$$

ここで，$j = 1, \ldots, N-1$ に対して $x_j^{(1,2,\ldots,j)}$ は $\mathbf{x}^{(1,2,\ldots,j)}$ における第 j 番目の変数を表わす。

クラスター代数は Laurent 現象と正値性と呼ばれる際立った性質を持つ。

定理 6-16 (Laurent 現象 [11] と正値性 [15]) $\mathbb{P} = \mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_N)$ をトロピカル半体，$\Sigma = (\mathbf{x}, Q)$ を $\mathcal{F} = (\mathbb{QP})(x_1, \ldots, x_N)$ の初期種とし，z を $\mathcal{A}(\Sigma)$ のクラスター変数とする。この

とき，多項式 $P_z(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}[x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N]$ とベクトル $\mathbf{d}_z=(d_j)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N$ であって，次の 2 条件を満たすものが存在する：

- $P_z(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N)$ は任意の x_i,y_i $(i=1,\dots,N)$ で割り切れない。
- $z=\dfrac{P_z(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N)}{x_1^{d_1}\cdots x_N^{d_N}}$ と表わされる。

注意 6-17 ([13; Conjecture 7.6]) $\mathbf{d}_z$ はクラスター変数 z の**分母ベクトル** (denominator vector) と呼ばれる。異なるクラスター変数は異なる分母ベクトルを持つことが予想されている。

定義 6-18 Σ を $\mathcal{F}$ の初期種とし，z を $\mathcal{A}(\Sigma)$ におけるクラスター変数とする。z の初期種 Σ に関する ***F*-多項式** (F-polynomial) とは，$P_z(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N)$ における初期クラスター変数 $x_1,\dots,x_N$ に 1 を代入することにより得られる $y_1,\dots,y_N$ に関する多項式

$$F_z(y_1,\dots,y_N)=P_z(1,\dots,1,y_1,\dots,y_N) \tag{6.6}$$

のことをいう。

注意 6-19 クラスター代数 $\mathcal{A}(\Sigma)$ において F-多項式を求めることは重要である。というのは，Fomin と Zelevinsky [13] により，任意のクラスター変数が F-多項式と ***g*-ベクトル** (g-vector) と呼ばれる整数成分のベクトルから決まることが示されているからである (正確な主張と証明は [54; 定理 4.16] を参照)。

● 6-5：1 より大きい有理数から定まるクラスター代数と *F*-多項式

ここでは，1 より大きい有理数に付随して定まるクイバーおよびクラスター代数に対して，特別なミューテーション列を考え，それによって生成されるクラスター変数の F-多項式に対する計算公式を導出する。

命題 6-20 $\alpha>1$ を有理数とし，$\alpha=[a_1,a_2,\dots,a_n]$ のように正則連分数で表わし，$N=a_1+\cdots+a_n-1$ とおく。

$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_N)$，$\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_N)$ とし，$(\mathbf{x},\mathbf{y},Q_\alpha)$ を初期種としてクラスター代数 $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y},Q_\alpha)$ を定める。この初期種にミューテーション列 $\boldsymbol{m}=(1,2,\dots,N-1,N)$ によって定義されるミューテーションの合成 $\mu_{\boldsymbol{m}}=\mu_N\circ\mu_{N-1}\circ\cdots\circ\mu_2\circ\mu_1$ を施したものを

$$(\mathbf{x}^{(\natural)},\mathbf{y}^{(\natural)},Q_\alpha^{(\natural)}):=\mu_{\boldsymbol{m}}(\mathbf{x},\mathbf{y},Q_\alpha). \tag{6.7}$$

とおき，$\mathbf{x}^{(\natural)}$ の中の第 N 番目の変数を X_α で表わし，そのクラスター変数において $x_j=1$ $(j=1,\dots,N)$ を代入して得られる F-多項式を $F_{[a_1,a_2,\dots,a_n]}$ と記す。このとき，以下の漸化式が成り立つ：

$$F_{[a_1]}=1+y_N+y_{N-1}y_N+\cdots+y_2\cdots y_N+y_1y_2\cdots y_N, \tag{6.8}$$

$$F_{[a_1,\dots,a_{n-2},a_{n-1},1]}=F_{[a_1,\dots,a_{n-2},a_{n-1}+1]}, \tag{6.9}$$

$$
(6.10) \qquad F_{[a_1,\dots,a_n]} = \begin{cases} F_{[a_1,\dots,a_{n-1}]} + y_N F_{[a_1,\dots,a_n-1]} & (n \text{ は奇数}), \\ \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,\dots,a_{n-1}]} + F_{[a_1,\dots,a_n-1]} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}
$$

但し，$a_n = 1$ のとき $F_{[a_1,\dots,a_n-1]} = 1$ と解釈する。

(**証明**)

$n = 1, 2$ の場合は演習問題として残す。以下，$n \geq 3$ とし，$j = 1, \dots, N$ に対して

$$
(\mathbf{x}^{(1,\dots,j)}, \mathbf{y}^{(1,\dots,j)}, Q^{(1,\dots,j)}) := (\mu_j \circ \cdots \circ \mu_2 \circ \mu_1)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q_\alpha).
$$

とおき，$j = 1, \dots, N-1$ に対して $\mathbf{x}^{(1,\dots,j)}$ における j 番目のクラスター変数を $x_j^{(1,\dots,j)}$ と記し，$\mathbf{y}^{(1,\dots,j)}$ における $(j+1)$ 番目の y-変数を $y_{j+1}^{(1,\dots,j)}$ と記す。

- n が奇数で，$\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ $(a_i \in \mathbb{N}\ (i = 1, \dots, n),\ a_n \geq 2)$ のときを考える。

$$
X_\alpha = \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_N}
$$

である。ここで

$$
\begin{aligned}
X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} &= \frac{y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{N-2}^{(1,\dots,N-2)} + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_{N-1}}, \\
x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} &= \frac{y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{N-2}^{(1,\dots,N-2)} x_N + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_{N-1}}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\big(x_{N-1} X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} - x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}\big) x_N = x_{N-1} x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} - x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}
$$

である。よって，

$$
x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} = \frac{\big(x_{N-1} X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} - x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}\big) x_N + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_{N-1}}
$$

と表わされる。これより，

$$
\begin{aligned}
X_\alpha &= \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_N} \\
&= y_N^{(1,\dots,N-1)} X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)} (1 - x_N)}{x_{N-1} x_N} + \frac{x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_N}
\end{aligned}
$$

となる。上式に $x_i = 1$ $(i = 1, \dots, N)$ を代入すると，F-多項式の漸化式

$$
\begin{aligned}
F_\alpha &= y_N^{(1,\dots,N-1)} F_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} + x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}|_{x_1=\cdots=x_{\ell_{n-1}}=1} \\
&= y_N F_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} + F_{[a_1,\dots,a_{n-1}]}
\end{aligned}
$$

が得られる。この等式は $a_n = 1$ でも成立する。

- n が偶数で，$\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ $(a_i \in \mathbb{N}\ (i = 1, \dots, n),\ a_n \geq 2)$ のときを考える。

$$
X_\alpha = \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)} + x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)}}{x_N}
$$

である。ここで

$$X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} = \frac{y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)} + x_{N-2}^{(1,\dots,N-2)}}{x_{N-1}},$$

$$x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} = \frac{y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)} + x_{N-2}^{(1,\dots,N-2)} x_N}{x_{N-1}}$$

であるから，

$$\big(x_{N-1}X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} - y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}\big)x_N = x_{N-1}x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} - y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}$$

である。よって，

$$x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)} = \frac{\big(x_{N-1}X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} - y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}\big)x_N + y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_{N-1}}$$

と表わされる。これより，

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)} + x_{N-1}^{(1,\dots,N-1)}}{x_N} \\ &= \frac{y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}}{x_N} + X_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{y_{N-1}^{(1,\dots,N-2)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}(1-x_N)}{x_{N-1}x_N} \end{aligned}$$

となる。上式に $x_i = 1$ $(i = 1, \dots, N)$ を代入すると，F-多項式の漸化式

$$\begin{aligned} F_\alpha &= y_N^{(1,\dots,N-1)} x_{\ell_{n-1}-1}^{(1,\dots,\ell_{n-1}-1)}|_{x_1=\cdots=x_{\ell_{n-1}}=1} + F_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} \\ &= \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,\dots,a_{n-1}]} + F_{[a_1,\dots,a_{n-1},a_n-1]} \end{aligned}$$

が得られる。この等式は $a_n = 1$ でも成立する。 □

注意 6-21

(1) 純粋に組合せ論的視点から，上の命題と同値な公式が Rabideau [59; (2.1)] によって導かれている。

(2) 命題 6-20 で与えられた有理数 $0 < \alpha < 1$ に対応する F-多項式 F_α について，小木曽は [30] において $F_{\underline{\mathtt{i}}(\alpha)}, F_{\underline{\mathtt{r}}(\alpha)}, F_{\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)}$ が F^α から y-変数の単純な置き換えにより得られることを指摘している。

定理 6-22 クイバー $Q_{[a_1,a_2,\dots,a_n]}$ に，ミューテーション列 $\boldsymbol{m} = (N, N-1, \dots, 2, 1)$ によって定義されるクイバーの変換 $\mu_{\boldsymbol{m}} = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \cdots \circ \mu_{N-1} \circ \mu_N$ を施して得られる F-多項式 $F_{[a_1,a_2,\dots,a_n]}$ において，変数の置き換え

$$y_j \quad \longleftrightarrow \quad \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big)/y_j \tag{6.11}$$

を施したものを $F^{[a_1,a_2,\dots,a_n]}$ と記す：

$$\Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,a_2,\dots,a_n]}(y_1^{-1}, \dots, y_N^{-1}) = F^{[a_1,a_2,\dots,a_n]}. \tag{6.12}$$

このとき，

$$F^{[a_1]} = 1 + y_1 + y_1y_2 + \cdots + y_1y_2\cdots y_N, \tag{6.13}$$

$$F^{[a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1},1]} = F^{[a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}+1]}, \tag{6.14}$$

$a_n \geq 2$ のとき

$$F^{[a_1,\ldots,a_n]} = \begin{cases} F^{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + y_N F^{[a_1,\ldots,a_n-1]} & (n \text{ は偶数のとき}), \\ \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) F^{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + F^{[a_1,\ldots,a_n-1]} & (n \text{ は奇数のとき}) \end{cases} \tag{6.15}$$

(**証明**)

連分数 $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ の長さ n と最後の自然数 a_n に関する二重帰納法で証明する。(6.12) と (6.9) を比較すると，(6.13) は成り立っていることがわかる。

$n > 1$ とし，長さが $(n-1)$ の連分数に対して，(6.13) は成り立っていると仮定する。このとき，

$$\begin{aligned} F^{[a_1,\ldots,a_{n-1},1]} &= \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,\ldots,a_{n-1},1]}(y_1^{-1}, \ldots, y_N^{-1}) \quad (\because (6.12)) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,\ldots,a_{n-1}+1]}(y_1^{-1}, \ldots, y_N^{-1}) \quad (\because (6.9)) \\ &= F^{[a_1,\ldots,a_{n-1}+1]} \quad (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

となり，(6.14) は成立する。

次に，$n > 1, m \geq 1$ とし，長さが $(n-1)$ の連分数，および，$a_n \leq m$ を満たす長さ n の連分数に対して，(6.15) は成り立っていると仮定し，$a_n = m+1$ を満たす長さ n の連分数について考える。

n が奇数のとき

$$\begin{aligned} &F^{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]} \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big) F_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]}(y_1^{-1}, \ldots, y_N^{-1}) \quad (\because (6.12)) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{N} y_i\Big)\Big(F_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}(y_1^{-1}, \ldots, y_{\ell_{n-1}-1}^{-1}) + y_N^{-1} F_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}(y_1^{-1}, \ldots, y_{N-1}^{-1})\Big) \quad (\because (6.10)) \\ &= \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) F^{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + \Big(\prod_{i=1}^{N-1} y_i\Big) F_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}(y_1^{-1}, \ldots, y_{N-1}^{-1}) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) F^{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + F^{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]} \quad (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

である。

n が偶数のときも同様にして，(6.15) が成り立つことがわかる。 □

変数変換 (6.11) を施した後の F-多項式 F^{α} の特殊化として，正規化された Jones 多項式 $J_{\alpha}(q)$ が得られる。詳しくは次が成り立つ。

系 6-23 (Lee and Schiffler [39; Proposition 6.4&Theorem 7.1]) 有理数 $\alpha > 1$ を $\alpha = [a_1, \dots, a_{2m-1}]$ $(a_1, \dots, a_{2m-1} \in \mathbb{N},\ m \geq 2)$ のように連分数により表わす。定理 6-22 における F-多項式 $F^{[a_1,\dots,a_{2m-1}]}$ において，$y_1 = q^2,\ y_2 = \cdots = y_N = q$ を代入したものは，$J_{\alpha}(q)$ に等しい：

$$F^{[a_1,\dots,a_{2m-1}]}|_{y_1=q^2,\ y_2=\cdots=y_N=q} = J_{[a_1,\dots,a_{2m-1}]}(q). \tag{6.16}$$

(**証明**)

$\alpha = [a_1] \in \mathbb{N}$ のとき，(6.13) の F-多項式 F^{α} に $y_1 = q^2,\ y_2 = \cdots = y_N = q$ を代入すると，正規化された Jones 多項式 $J_{\alpha}(q)$ になることがわかる。さらに，帰納法により，命題 3-24 の (3.21) は定理 6-22 の (6.14) と (6.15) の n が偶数のときから，命題 3-24 の (3.22) は定理 6-22 の (6.15) の n が奇数のときから得られる。 □

注意. 上の結果と類似して，永井と寺嶋 [51; Theorem 4.10] により，F-多項式の別の特殊化として有理絡み目の Alexander 多項式が導かれることが示されている。

● 6-6：有理数の祖先三角形に基づく寺嶋-永井両氏による F-多項式の公式

永井と寺嶋 [51; Corollary 3.6] により，命題 6-20 と同等の結果が示されている。但し，彼らの結果及び定式化は $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ に対するもののため，ここでは，$\alpha \in (1,\infty)$ に対する結果に書き換えたものを紹介する。そのために，祖先三角形から導かれるクラスター変数 [51] について説明しよう。

有理数 α $(\alpha > 1)$ の祖先三角形 YAT(α) における基本三角形を上から順に，$T_0, T_1, \dots, T_N$ で表わす。$\Delta_1, \dots, \Delta_n$ を α の連分数展開 $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ から定まる三角形列とすると

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= T_0 \cup T_1 \cup \cdots \cup T_{a_1-1}, \\
\Delta_2 &= T_{a_1} \cup T_{a_1+1} \cup \cdots \cup T_{a_1+a_6-1}, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\Delta_l &= T_{a_1+\cdots+a_{n-1}} \cup T_{a_1+\cdots+a_{n-1}+1} \cup \cdots \cup T_N
\end{aligned}$$

となる。よって，$N = a_1 + \cdots + a_n - 1$ である。

不定元 $x_1, x_2, \dots, x_N$ および $y_1, y_2, \dots, y_N$ を用意する。各基本三角形 T_i $(i = 1, \dots, N)$ に対して**重み** (weight) $\mathrm{wt}(T_i)$ を帰納的に以下の規則により定める：

まず，$\mathrm{wt}(T_1)$ を次で定義する。

$$\mathrm{wt}(T_1) = \begin{cases} y_1 x_2 & (T_1 \text{ が左三角形のとき}), \\ \frac{y_1}{x_2} & (T_1 \text{ が右三角形のとき}) \end{cases} \tag{6.17}$$

$i=2,\dots,N$ に対して $\mathrm{wt}(T_i)$ を次で定義する。

$$\mathrm{wt}(T_i)=\begin{cases}\frac{y_i x_{i+1}}{x_{i-1}} & (T_{i-1},T_i \text{ ともに左三角形のとき}),\\ y_i x_{i-1}x_{i+1} & (T_{i-1} \text{ は右三角形で } T_i \text{ は左三角形のとき}),\\ \frac{y_i}{x_{i-1}x_{i+1}} & (T_{i-1} \text{ は左三角形で } T_i \text{ は右三角形のとき}),\\ \frac{y_i x_{i-1}}{x_{i+1}} & (T_{i-1},T_i \text{ ともに右三角形のとき})\end{cases} \tag{6.18}$$

但し，$x_{N+1}=1$ と考える。

$\mathrm{YAT}(\alpha)$ における $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道 γ (但し，$\dfrac{1}{0}$ から $\dfrac{1}{1}$ へ進む下降道は含まない) に対しては

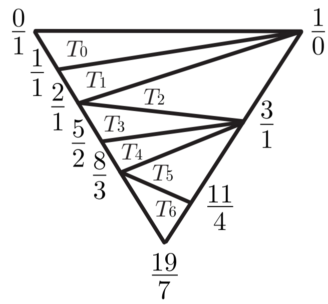
$$S_\gamma=\{\ \gamma \text{ の右側にある基本三角形全体 }\}$$

と定めて，**重み** $\mathrm{wt}(\gamma)$ を次で定める：

$$\mathrm{wt}(\gamma)=\prod_{T\in S_\gamma}\mathrm{wt}_\gamma(T).$$

γ の出発点が $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ なので，T_0 が S_γ に含まれることはない。

例 6-24 $\mathrm{YAT}\left(\dfrac{19}{7}\right)$ の場合，7 個の基本三角形からなる。上から順に $T_0,T_1,\dots,T_6$ とおく。このとき，T_0 を除く各 T_i $(i=1,\dots,6)$ の重みは次のようになる。



$\mathrm{wt}(T_1)=y_1x_2,$

$\mathrm{wt}(T_2)=\dfrac{y_2}{x_1x_3},$

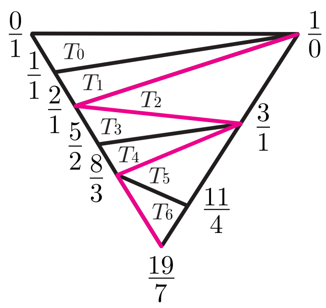
$\mathrm{wt}(T_3)=y_3x_2x_4,$

$\mathrm{wt}(T_4)=\dfrac{y_4x_5}{x_3},$

$\mathrm{wt}(T_5)=\dfrac{y_5}{x_4x_6},$

$\mathrm{wt}(T_6)=\dfrac{y_6x_5}{1}=y_6x_5.$

γ を連分数展開 $\dfrac{19}{7}=[2,1,2,2]$ から定まる連分数道とすると，



$$S_\gamma=\{T_2,T_5,T_6\}$$

であるから，

$$\mathrm{wt}(\gamma)=\mathrm{wt}(T_2)\mathrm{wt}(T_5)\mathrm{wt}(T_6)=\frac{y_2y_5y_6x_5}{x_1x_3x_4x_6}$$

である。

次の定理は，永井と寺嶋による定理 [51; Theorem 3.3] における $\alpha\in(0,1)$ を $\alpha\in(1,\infty)$ の場合に書き換えたものである。

定理 6-25 (Nagai and Terashima [51; Theorem 3.3]) α を $\alpha>1$ を満たす有理数とし，$\mathrm{YAT}(\alpha)$ における基本三角形を上から順に $T_0,T_1,\dots,T_N$ とおく。Γ_α を，祖先三角形 $\mathrm{YAT}(\alpha)$ において，$\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道全体のなす集合とする。但し，$\dfrac{1}{0}$ から

$\frac{1}{1}$ へ進む下降道は含まないものとする。クラスター代数 $\mathcal{A}(\mathbf{x},\mathbf{y},Q_\alpha)$ における (6.7) によって定義されるクラスター $\mathbf{x}^{(\natural)}$ の中の第 N 番目の変数を X_α で表わす。このとき，

$$X_\alpha = \frac{D}{x_1x_2\cdots x_N}\sum_{\gamma\in\Gamma_\alpha}\mathrm{wt}(\gamma) \tag{6.19}$$

である，但し，

$$D = \prod_{i=1}^{N}(\mathrm{wt}(T_i)\ \text{の分母}) \tag{6.20}$$

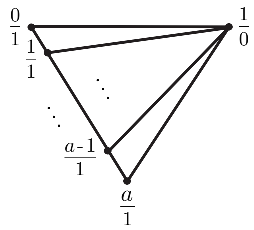
である。特に，X_α から (6.6) のように得られる F-多項式 F_α は

$$F_\alpha = \sum_{\gamma\in\Gamma_\alpha}\prod_{T_i\in S_\gamma} y_i \tag{6.21}$$

によって与えられる。 □

上の定理を例を見ることで確認しよう。

例 6-26 $\alpha=[a]$ $(a\in\mathbb{N})$ の場合に，X_α と F_α を求める。この場合の祖先三角形 YAT(α) は次のようになる。



$N=a-1$ である。YAT(α) における基本三角形を上から順に $T_0,T_1,\ldots,T_N$ とおく。T_i はすべて左三角形であるから

$$\mathrm{wt}(T_1)=y_1x_2,\ \mathrm{wt}(T_2)=\frac{y_2x_3}{x_1},\ \mathrm{wt}(T_3)=\frac{y_3x_4}{x_2},\ldots,\mathrm{wt}(T_{a-1})=\frac{y_{a-1}x_a}{x_{a-2}}=\frac{y_{a-1}}{x_{a-2}}$$

となる。よって，

$$D = 1\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_{a-2} = x_1x_2\cdots x_{a-2}$$

である。

YAT(α) において，$\frac{1}{0}$ または $\frac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道は全部で a 個あり，それらは次で与えられる。

$$\gamma_0 : \frac{1}{1}\longrightarrow\frac{2}{1}\longrightarrow\frac{3}{1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\frac{a}{1}$$
$$\gamma_k : \frac{1}{0}\longrightarrow\frac{k}{1}\longrightarrow\frac{k+1}{1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\frac{a}{1}\quad (k=2,\ldots,a)$$

このとき，

$$\mathrm{wt}(\gamma_0)=\prod_{i=1}^{a-1}\mathrm{wt}(T_i)=\frac{y_1y_2\cdots y_{a-1}x_2x_3\cdots x_{a-1}}{x_1x_2\cdots x_{a-2}}=\frac{y_1y_2\cdots y_{a-1}x_{a-1}}{x_1},$$

$$\mathrm{wt}(\gamma_k)=\prod_{i=k}^{a-1}\mathrm{wt}(T_i)=\frac{y_k\cdots y_{a-1}x_{k+1}\cdots x_{a-1}}{x_{k-1}\cdots x_{a-2}}=\frac{y_k\cdots y_{a-1}x_{a-1}}{x_{k-1}x_k}\quad(k=2,\ldots,a)$$

但し，$y_a=x_a=1$ とする。

よって，

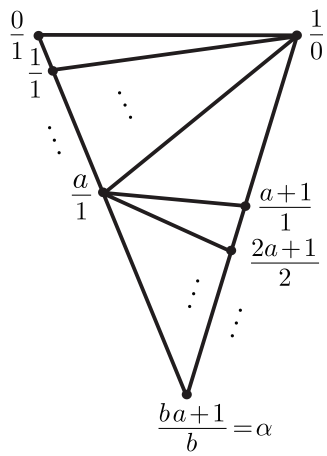
$$X_a=\frac{1}{x_{a-1}}\left(\frac{y_1y_2\cdots y_{a-1}x_{a-1}}{x_1}+\sum_{k=2}^{a}\frac{y_k\cdots y_{a-1}x_{a-1}}{x_{k-1}x_k}\right)$$

であり，

$$\begin{aligned}F_a&=y_1y_2\cdots y_{a-1}+\sum_{k=2}^{a}y_k\cdots y_{a-1}\\&=y_1y_2\cdots y_{a-1}+y_2\cdots y_{a-1}+\cdots+y_{a-1}+1\end{aligned}$$

である。

例 6-27　$\alpha=[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{N})$ の場合に，X_α と F_α を定理 6-25 の公式に基づいて求める。この場合の祖先三角形 YAT(α) は次のようになる。



$N=a+b-1$ である。YAT(α) における基本三角形を上から順に $T_0,T_1,\ldots,T_N$ とおく。T_i $(i=1,\ldots,a-1)$ は左三角形であり，T_j $(j=a,\ldots,N)$ は右三角形である。よって，

$$\mathrm{wt}(T_1)=y_1x_2,\qquad \mathrm{wt}(T_i)=\frac{y_ix_{i+1}}{x_{i-1}}\ (i=2,\ldots,a-1),$$

$$\mathrm{wt}(T_a)=\frac{y_a}{x_{a-1}x_{a+1}},\qquad \mathrm{wt}(T_j)=\frac{y_jx_{j-1}}{x_{j+1}}\ (i=a+1,\ldots,N)$$

(但し，$x_{N+1}=1$) であるから，

$$D=1\cdot x_1\cdots x_{a-2}\cdot x_{a-1}x_{a+1}\cdot x_{a+2}\cdots x_N=\frac{\prod_{i=1}^{N}x_i}{x_a}$$

である。YAT(α) における $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道を列挙すると次のいずれかとなる。

$$\gamma_{0,0} : \frac{1}{1} \longrightarrow \frac{2}{1} \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ba+1}{b}$$
$$\gamma_{0,j} : \frac{1}{1} \longrightarrow \frac{2}{1} \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ja+1}{j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{ba+1}{b} \quad (j = 1, \ldots, b-1)$$
$$\gamma_{k,0} : \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{k}{1} \longrightarrow \frac{k+1}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ba+1}{b} \quad (k = 2, \ldots, a)$$
$$\gamma_{k,j} : \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{k}{1} \longrightarrow \frac{k+1}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ja+1}{j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{ba+1}{b} \quad \begin{pmatrix} k = 2, \ldots, a, \\ j = 1, \ldots, b-1 \end{pmatrix}$$

$b \geq 2$ とし，$\alpha' = [a, b-1]$ とおく。YAT(α') における $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α' へ至る下降道を列挙すると次のいずれかとなる。

$$\gamma'_{0,0} : \frac{1}{1} \longrightarrow \frac{2}{1} \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{(b-1)a+1}{b-1}$$
$$\gamma'_{0,j} : \frac{1}{1} \longrightarrow \frac{2}{1} \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ja+1}{j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{(b-1)a+1}{b-1} \quad (j = 1, \ldots, b-2)$$
$$\gamma'_{k,0} : \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{k}{1} \longrightarrow \frac{k+1}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{(b-1)a+1}{b-1} \quad (k = 2, \ldots, a)$$
$$\gamma'_{k,j} : \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{k}{1} \longrightarrow \frac{k+1}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \longrightarrow \frac{ja+1}{j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{(b-1)a+1}{b-1} \quad \begin{pmatrix} k = 2, \ldots, a, \\ j = 1, \ldots, b-2 \end{pmatrix}$$

$j = 1, \ldots, b-2, k = 2, \ldots, a$ に対して

$$\gamma_{0,j} :\ \gamma'_{0,j} \longrightarrow \frac{ba+1}{b},$$
$$\gamma_{k,j} :\ \gamma'_{k,j} \longrightarrow \frac{ba+1}{b}$$

となっているから，

$$\mathrm{wt}(\gamma_{0,j}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{0,j}), \quad \mathrm{wt}(\gamma_{k,j}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{k,j})$$

である。また，$k = 2, \ldots, a$ に対して $S_{\gamma_{0,0}} = S_{\gamma'_{0,0}} \cup \{T_N\}$，$S_{\gamma_{k,0}} = S_{\gamma'_{k,0}} \cup \{T_N\}$ であるから

$$\mathrm{wt}(\gamma_{0,0}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}) \frac{y_N x_{N-1}}{1}, \quad \mathrm{wt}(\gamma_{k,0}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0}) \frac{y_N x_{N-1}}{1}$$

となり，$S_{\gamma_{0,b-1}} = S_{\gamma'_{0,0}}$，$S_{\gamma_{k,b-1}} = S_{\gamma'_{k,0}}$ であるから

$$\mathrm{wt}(\gamma_{0,b-1}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}), \quad \mathrm{wt}(\gamma_{k,b-1}) = \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0}) \quad (k = 2, \ldots, a)$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}
X_\alpha &= \frac{1}{x_a} \Bigl(\sum_{j=0}^{b-1} \mathrm{wt}(\gamma_{0,j}) + \sum_{k=2}^{a} \sum_{j=0}^{b-1} \mathrm{wt}(\gamma_{k,j}) \Bigr) \\
&= \frac{1}{x_a} \Bigl(\mathrm{wt}(\gamma'_{0,0})(1 + y_N x_{N-1}) + \sum_{j=1}^{b-2} \mathrm{wt}(\gamma'_{0,j}) + \sum_{k=2}^{a} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0})(1 + y_N x_{N-1}) + \sum_{k=2}^{a} \sum_{j=1}^{b-2} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,j}) \Bigr) \\
&= \frac{1}{x_a} \Bigl(\mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}) y_N x_{N-1} + \sum_{j=0}^{b-2} \mathrm{wt}(\gamma'_{0,j}) + \sum_{k=2}^{a} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0}) y_N x_{N-1} + \sum_{k=2}^{a} \sum_{j=0}^{b-2} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,j}) \Bigr)
\end{aligned}$$

$$= X_{\alpha'} + \frac{1}{x_a}\Big(\mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}) + \sum_{k=2}^{a} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0})\Big) y_N x_{N-1}$$

となる。ここで，YAT($[a]$) において $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α' へ至る下降道を考える。それらは次で与えられる。

$$\gamma_0 : \frac{1}{1} \longrightarrow \frac{2}{1} \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1}$$
$$\gamma_k : \frac{1}{0} \longrightarrow \frac{k}{1} \longrightarrow \frac{k+1}{1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{a}{1} \quad (k = 2, \ldots, a)$$

すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}) &= \mathrm{wt}(\gamma_0)\mathrm{wt}(T_a)\mathrm{wt}(T_{a+1}) \cdots \mathrm{wt}(T_{N-1}) \\ &= \mathrm{wt}(\gamma_0)\frac{y_a y_{a+1} \cdots y_{N-1} x_a}{x_{a-1} x_{N-1} x_N}\end{aligned}$$

となる。同様に，$k = 2, \ldots, a$ に対して

$$\mathrm{wt}(\gamma'_{k,0}) = \mathrm{wt}(\gamma_k)\frac{y_a y_{a+1} \cdots y_{N-1} x_a}{x_{a-1} x_{N-1} x_N}$$

となることがわかる。故に，

$$\frac{1}{x_a}\Big(\mathrm{wt}(\gamma'_{0,0}) + \sum_{k=2}^{a} \mathrm{wt}(\gamma'_{k,0})\Big) y_N x_{N-1} = \frac{1}{x_N}\Big(\prod_{i=a}^{N} y_i\Big) X_{[a]}$$

と表わされる。以上より，等式

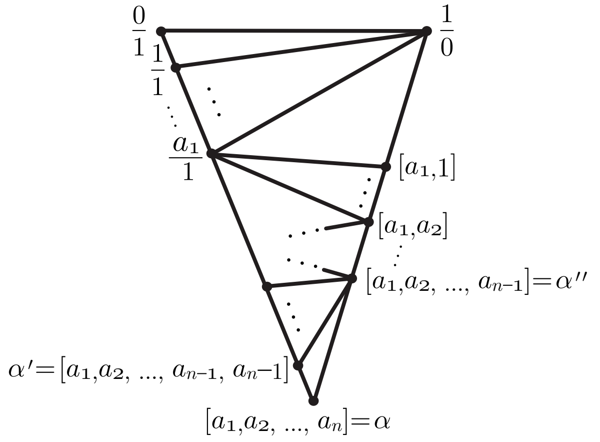
$$X_{[a,b]} = X_{[a,b-1]} + \frac{1}{x_N}\Big(\prod_{i=a}^{N} y_i\Big) X_{[a]}$$

の成立が確かめられた。 □

最後に，定理 6-25 の (6.19) に基づいて，有理数 $\alpha > 1$ に対応するクラスター変数 X_α について，命題 6-20 における (6.10) のような，Farey 和分解に基づく公式を導出しよう。

長さ n の連分数 $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$ を考える。$a_n > 1$ とする。

• n が奇数のとき，YAT(α) は次図のようになる。



YAT(α) における $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道は，次のいずれかである。

① $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して $\alpha' := [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1]$ へ至り，それに $\alpha' \longrightarrow \alpha$ を付け加えたもの。

② $\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して $\alpha'' := [a_1, \ldots, a_{n-1}]$ へ至り，それに $\alpha'' \longrightarrow \alpha$ を付け加えたもの。

$N = a_1 + \cdots + a_n - 1$ である。$\ell_k = a_1 + \cdots + a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ とおく。$\mathrm{YAT}(\alpha)$ における基本三角形を上から順に $T_0, T_1, \ldots, T_N$ とおく。T_{i_1} $(i_1 = 1, \ldots, a_1 - 1)$ は左三角形であり，T_{i_2} $(i_2 = a_1, \ldots, \ell_6 - 1)$ は右三角形であり，T_{i_3} $(i_3 = \ell_2, \ldots, \ell_3 - 1)$ は左三角形であり，$\cdots$，T_{i_n} $(i_n = \ell_{n-1}, \ldots, \ell_n - 1)$ は左三角形である。$\alpha, \alpha', \alpha''$ に対する (6.20) における D をそれぞれ D, D', D'' とおく。

$$\mathrm{wt}(T_{\ell_{n-1}}) = y_{\ell_{n-1}} x_{\ell_{n-1}-1} x_{\ell_{n-1}+1}, \qquad \mathrm{wt}(T_i) = \frac{y_i x_{i+1}}{x_{i-1}} \quad (i = \ell_{n-1} + 1, \ldots, N)$$

(但し，$x_{N+1} = 1$) である。$\mathrm{wt}'(T_i)$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ を $\mathrm{YAT}(\alpha')$ における T_i の重みとすると，$\mathrm{YAT}(\alpha')$ においては $x_N = 1$ と約束するため

$$\begin{gathered}\mathrm{wt}'(T_{N-1}) = \frac{y_{N-1} x_N}{x_{N-2}} = \frac{y_{N-1}}{x_{N-2}} = \frac{\mathrm{wt}(T_{N-1})}{x_N}, \\ \mathrm{wt}'(T_i) = \mathrm{wt}(T_i) \ \ (i = 1, \ldots, N-2)\end{gathered}$$

であり，$\mathrm{wt}''(T_i)$ $(i = 1, \ldots, \ell_{n-1} - 1)$ を $\mathrm{YAT}(\alpha'')$ における T_i の重みとすると，$\mathrm{YAT}(\alpha'')$ においては $x_{\ell_{n-1}} = 1$ と約束するため

$$\begin{gathered}\mathrm{wt}''(T_{\ell_{n-1}-1}) = \frac{y_{\ell_{n-1}-1} x_{\ell_{n-1}-2}}{x_{\ell_{n-1}}} = y_{\ell_{n-1}-1} x_{\ell_{n-1}-2} = \mathrm{wt}(T_{\ell_{n-1}-1}) x_{\ell_{n-1}}, \\ \mathrm{wt}''(T_i) = \mathrm{wt}(T_i) \ \ (i = 1, \ldots, \ell_{n-1} - 2)\end{gathered}$$

となる。したがって，$\alpha, \alpha', \alpha''$ に対する (6.20) における D をそれぞれ D, D', D'' とおくと，

$$\begin{aligned}&D = D' \cdot (\mathrm{wt}(T_N) \text{ の分母}) = D' x_{N-1}, \\ &D = D'' x_{\ell_{n-1}} \cdot \Bigl(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} (\mathrm{wt}(T_i) \text{ の分母}) \Bigr) \\ &\quad = D'' x_{\ell_{n-1}} \cdot 1 \cdot x_{\ell_{n-1}} x_{\ell_{n-1}+1} \cdots x_{N-1} = x_{\ell_{n-1}} D'' \Bigl(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N-1} x_i \Bigr)\end{aligned}$$

である。

$\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道 γ が①のタイプの場合，α' へ至るまでの下降道を γ' とおくと，$S_\gamma = S_{\gamma'} \cup \{T_N\}$ となる。

❶ γ' が α'' を経由する場合，すなわち，$\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α'' へ到達した後，$\alpha'' \to \alpha'$ と進む場合，$T_{N-1} \notin S_\gamma = S_{\gamma'}$ であり，

❷ γ' が α'' を経由しない場合，$T_{N-1} \in S_\gamma = S_{\gamma'}$ である。

よって，$\mathrm{wt}'(\gamma')$ を，$S_{\gamma'}$ に属する $\mathrm{YAT}(\alpha')$ における基本三角形の重みの積とすると，❶の場合，

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}'(\gamma')\frac{y_N}{x_{N-1}}$$

となり，❷の場合，

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}'(\gamma')\frac{y_N x_N}{x_{N-1}}$$

となる。

$\dfrac{1}{0}$ または $\dfrac{1}{1}$ から出発して α へ至る下降道 γ が②のタイプの場合，α'' へ至るまでの下降道を γ'' とおくと，$S_\gamma = S_{\gamma''}$ であるが，

❶ γ'' が $\alpha''' := [a_1, \ldots, a_{n-2}]$ を経由する場合，$T_{\ell_{n-1}-1} \in S_\gamma = S_{\gamma''}$ であり，

❷ γ'' が α''' を経由しない場合，$T_{\ell_{n-1}-1} \notin S_\gamma = S_{\gamma''}$ である。

よって，$\mathrm{wt}''(\gamma'')$ を，$S_{\gamma''}$ に属する $\mathrm{YAT}(\alpha'')$ における基本三角形の重みの積とすると，

❶の場合

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}''(\gamma'')\frac{1}{x_{\ell_{n-1}}}$$

❷の場合

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}''(\gamma'')$$

となる。

以上の結果より

$$\Gamma_{\alpha',\alpha''} := \{\, \gamma' \in \Gamma_{\alpha'} \mid \gamma' \text{ は } \alpha'' \text{ を経由 } \},$$
$$\Gamma_{\alpha'',\alpha'''} := \{\, \gamma'' \in \Gamma_{\alpha''} \mid \gamma'' \text{ は } \alpha''' \text{ を経由 } \}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
X_\alpha &= \frac{D}{\prod_{i=1}^{N} x_i} \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \mathrm{wt}(\gamma) \\
&= \frac{y_N D'}{x_N \prod_{i=1}^{N-1} x_i} \sum_{\gamma' \in \Gamma_{\alpha',\alpha''}} \mathrm{wt}'(\gamma') + \frac{y_N D'}{\prod_{i=1}^{N-1} x_i} \sum_{\gamma' \in \Gamma_{\alpha'} - \Gamma_{\alpha',\alpha''}} \mathrm{wt}'(\gamma') \\
&\quad + \frac{D''}{x_N \prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'') + \frac{x_{\ell_{n-1}} D''}{x_N \prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha''} - \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'') \\
&= y_N X_{\alpha'} + \frac{1 - x_N}{x_N} \cdot \frac{y_N D'}{\prod_{i=1}^{N-1} x_i} \sum_{\gamma' \in \Gamma_{\alpha',\alpha''}} \mathrm{wt}'(\gamma') \\
&\quad + \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X_{\alpha''} + \frac{1 - x_{\ell_{n-1}}}{x_N} \cdot \frac{D''}{\prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'')
\end{aligned}$$

を得る。

$$X^{\mathrm{R}}_{\alpha'} := \frac{D'}{\prod_{i=1}^{N-1} x_i} \sum_{\gamma' \in \Gamma_{\alpha',\alpha''}} \mathrm{wt}'(\gamma')$$
$$X^{\mathrm{L}}_{\alpha''} := \frac{D''}{\prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'')$$

とおくと，上式は

$$X_\alpha = y_N X_{\alpha'} + \frac{y_N(1-x_N)}{x_N} X^{\mathrm{R}}_{\alpha'} + \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X_{\alpha''} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X^{\mathrm{L}}_{\alpha''}$$

と書き換えられる。なお，X^{R}_α を同様の意味で用いれば，X_α の式より

$$X^{\mathrm{R}}_\alpha = \frac{D''}{x_N \prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'') = \frac{1}{x_N} X_{\alpha''}$$

である。

- n が偶数のときも同様の考察により，

$$X^{\mathrm{L}}_{\alpha'} := \frac{D'}{\prod_{i=1}^{N-1} x_i} \sum_{\gamma' \in \Gamma_{\alpha',\alpha''}} \mathrm{wt}'(\gamma'),$$
$$X^{\mathrm{R}}_{\alpha''} := \frac{D''}{\prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'')$$

とおくと，

$$X_\alpha = X_{\alpha'} + \frac{1-x_N}{x_N} X^{\mathrm{L}}_{\alpha'} + \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N} \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X_{\alpha''} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_N} \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X^{\mathrm{R}}_{\alpha''}$$

と書き表わされることがわかる。なお，X^{L}_α を同様の意味で用いれば，X_α の式より

$$X^{\mathrm{L}}_\alpha = \frac{D''}{x_N \prod_{i=1}^{\ell_{n-1}-1} x_i} \sum_{\gamma'' \in \Gamma_{\alpha'',\alpha'''}} \mathrm{wt}''(\gamma'') \Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) = \frac{\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i}{x_N} X_{\alpha''}$$

である。

以上の計算により，定理 6-25 の系として次が示される。

系 6-28 $\alpha > 1$ を満たす有理数 $\alpha = [a_1, \dots, a_n]$ $(a_1, \dots, a_n \geq 1)$ に対して，$\ell_k = a_1 + \cdots + a_k$ $(k = 1, \dots, n)$，$N = \ell_n - 1$ とおき，クラスター代数 $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q_\alpha)$ における (6.7) によって定義されるクラスター $\mathbf{x}^{(\natural)}$ の中の第 N 番目の変数を X_α で表わす。このとき，このクラスター変数は次の漸化式を満足する：任意の $a_1, \dots, a_n \geq 1$ に対して，

• n が奇数のとき

$$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]} = y_N X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{y_N(1-x_N)}{x_{N-1}x_N} X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} \tag{6.22}$$
$$+ \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_{\ell_{n-1}-1}x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-2}}^{\ell_{n-1}-1} y_i\Big) X_{[a_1,\ldots,a_{n-2}]}.$$

• n が偶数のとき

(6.23)

$$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]} = X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{1-x_N}{x_{N-1}x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N-1} y_i\Big) X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}$$
$$+ \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_{\ell_{n-1}-1}x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X_{[a_1,\ldots,a_{n-2}]}.$$

(**証明**)

n が奇数のとき $X^{\mathrm{R}}_{[a_1,\ldots,a_n]}$ を

$$X^{\mathrm{R}}_{[a_1,\ldots,a_n]} = \frac{1}{x_N} X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]},$$

n が偶数のとき $X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_n]}$ を

$$X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_n]} = \frac{\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i}{x_N} X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}$$

によって定義すると，系の直前の考察により，

• n が奇数のとき

$$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]} = y_N X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{y_N(1-x_N)}{x_N} X^{\mathrm{R}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}$$
$$+ \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_N} X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}.$$

であり，

• n が偶数のとき

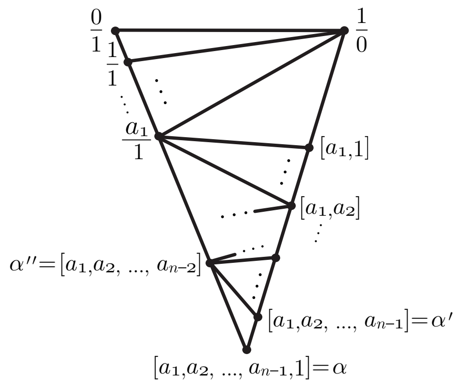
$$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n]} = X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]} + \frac{1-x_N}{x_N} X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}$$
$$+ \frac{x_{\ell_{n-1}}}{x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]} + \frac{1-x_{\ell_{n-1}}}{x_N}\Big(\prod_{i=\ell_{n-1}}^{N} y_i\Big) X^{\mathrm{R}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}.$$

である。

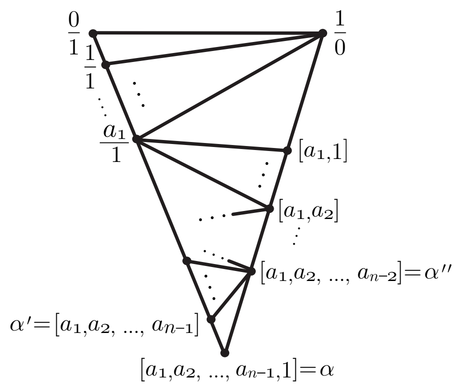
したがって，n が奇数のとき (6.22) が成り立ち，n が偶数のとき (6.23) が成り立つ。となる。 □

注意 6-29 $a_n = 1$ のとき，$N = \ell_{n-1}$ であり，YAT(α) はそれぞれ次図のようになる。

● n が奇数のとき



● n が偶数のとき



系 6- 28 は，$a_n = 1$ のときにも成立する。その場合，$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}$，$X^{\mathrm{R}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}$，$X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1},a_n-1]}$ などはすべて 1 と解釈する。$n=1$ のときには，ℓ_{n-1}，$X_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}$，$X^{\mathrm{L}}_{[a_1,\ldots,a_{n-1}]}$ などはすべて 1 と解釈する。特に，$a \geq 2$ に対して

$$X_{[a]} = y_{a-1}X_{[a-1]} + \frac{y_{a-1}(1-x_{a-1})}{x_{a-2}x_{a-1}} + \frac{1}{x_{a-1}} \tag{6.24}$$

である。但し，$X_{[1]}=1$，$X_{[2]}=\dfrac{y_1+1}{x_1}$ とする。

注意 6-30 系 6-28 において $x_i=1$ を代入すると，命題 6-20 における F-多項式の等式 (6.8), (6.9), (6.10) が導かれる。このようにして，[51; Corollay 3.6] と同等な結果が得られる。この事実と系 6-23 を合わせることにより，有理絡み目の正規化された Jones 多項式が，特別なクラスター変数の特殊化として得られることがわかる。

問題 6-31 $\mathrm{YAT}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ に対する F-多項式を計算する公式を与えよ。

このノートでは取り上げることができなかったが，クラスター代数は，双曲幾何，特に，結び目の補空間の体積とも深く関わっており，近年めざましい発展がある。これらの話題については，樋上・井上 [18,19]，長尾・寺嶋・山崎 [52,75] 等を参照されたい。

Appendix. 自然数対から定まる q-変形と正規化された Jones 多項式の値の一覧

この付録では，互いに素で小さな値の自然数の対 (a,b) に対して，q-変形 $(a,b)_q$ と正規化された Jones 多項式 $J_{\frac{b}{a}}(q)$ $(a<b)$ の値の一覧を掲載する。最後のページに $\frac{1}{2}$ から第 7 階までの Stern-Brocot 木を付す。

自然数対から定まる整数の q-変形の値の一覧

(a,b)	$(a,b)_q$	再帰式
$(1,1)$	$q+1$	$(1,0)_q+q(1,0)_q=(0,1)_q+q(0,1)_q$
$(1,2)$	q^2+q+1	$(1,0)_q+q(1,1)_q$
$(2,1)$	q^2+q+1	$(1,1)_q+q^2(0,1)_q$
$(1,3)$	q^3+q^2+q+1	$(1,0)_q+q(1,2)_q$
$(3,1)$	q^3+q^2+q+1	$(2,1)_q+q^3(0,1)_q$
$(1,4)$	$q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,3)_q$
$(2,3)$	q^3+q^2+2q+1	$(1,1)_q+q(2,1)_q$
$(3,2)$	q^3+2q^2+q+1	$(1,2)_q+q^2(1,1)_q$
$(4,1)$	$q^4+q^3+q^2+q+1$	$(3,1)_q+q^4(0,1)_q$
$(1,5)$	$q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,4)_q$
$(5,1)$	$q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(4,1)_q+q^5(0,1)_q$
$(1,6)$	$q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,5)_q$
$(2,5)$	$q^4+q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,3)_q$
$(3,4)$	$q^4+q^3+2q^2+2q+1$	$(2,1)_q+q(3,1)_q$
$(4,3)$	$q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,3)_q+q^2(1,2)_q$
$(5,2)$	$q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(3,2)_q+q^3(1,1)_q$
$(6,1)$	$q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(5,1)_q+q^6(0,1)_q$
$(1,7)$	$q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,6)_q$
$(3,5)$	$q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,2)_q+q(3,2)_q$
$(5,3)$	$q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(2,3)_q+q^2(2,1)_q$
$(7,1)$	$q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(6,1)_q+q^7(0,1)_q$
$(1,8)$	$q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,7)_q$
$(2,7)$	$q^5+q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,5)_q$
$(4,5)$	$q^5+q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(3,1)_q+q(4,1)_q$
$(5,4)$	$q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,4)_q+q^2(1,3)_q$
$(7,2)$	$q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(5,2)_q+q^4(1,1)_q$
$(8,1)$	$q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(7,1)_q+q^8(0,1)_q$

(a,b)	$(a,b)_q$	再帰式
$(1,9)$	$q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,8)_q$
$(3,7)$	$q^5+q^4+2q^3+3q^2+2q+1$	$(2,1)_q+q(3,4)_q$
$(7,3)$	$q^5+2q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(4,3)_q+q^3(1,2)_q$
$(9,1)$	$q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(8,1)_q+q^9(0,1)_q$
$(1,10)$	$q^{10}+q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,9)_q$
$(2,9)$	$q^6+q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,7)_q$
$(3,8)$	$q^5+2q^4+2q^3+3q^2+2q+1$	$(1,2)_q+q(3,5)_q$
$(4,7)$	$q^5+2q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(1,3)_q+q(4,3)_q$
$(5,6)$	$q^6+q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(4,1)_q+q(5,1)_q$
$(6,5)$	$q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,5)_q+q^2(1,4)_q$
$(7,4)$	$q^5+2q^4+2q^3+3q^2+2q+1$	$(3,4)_q+q^2(3,1)_q$
$(8,3)$	$q^5+2q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(5,3)_q+q^3(2,1)_q$
$(9,2)$	$q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(7,2)_q+q^5(1,1)_q$
$(10,1)$	$q^{10}+q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(9,1)_q+q^{10}(0,1)_q$
$(1,11)$	$q^{11}+q^{10}+q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,10)_q$
$(5,7)$	$q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(3,2)_q+q(5,2)_q$
$(7,5)$	$q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(2,5)_q+q^2(2,3)_q$
$(11,1)$	$q^{11}+q^{10}+q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1$	$(10,1)_q+q^{11}(0,1)_q$
$(1,12)$	$q^{12}+q^{11}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,11)_q$
$(2,11)$	$q^7+q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,9)_q$
$(3,10)$	$q^6+q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(2,1)_q+q(3,7)_q$
$(4,9)$	$q^6+q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(3,1)_q+q(4,5)_q$
$(5,8)$	$q^5+2q^4+3q^3+3q^2+3q+1$	$(2,3)_q+q(5,3)_q$
$(6,7)$	$q^7+q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(5,1)_q+q(6,1)_q$
$(7,6)$	$q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,6)_q+q^2(1,5)_q$
$(8,5)$	$q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(3,5)_q+q^2(3,2)_q$
$(9,4)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(5,4)_q+q^3(1,3)_q$
$(10,3)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(7,3)_q+q^4(1,2)_q$
$(11,2)$	$q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(9,2)_q+q^6(1,1)_q$
$(12,1)$	$q^{12}+q^{11}+\cdots+q^2+q+1$	$(11,1)_q+q^{12}(0,1)_q$
$(1,13)$	$q^{13}+q^{12}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,12)_q$
$(3,11)$	$q^6+2q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(1,2)_q+q(3,8)_q$
$(5,9)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(1,4)_q+q(5,4)_q$
$(9,5)$	$q^6+2q^5+2q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(4,5)_q+q^2(4,1)_q$

(a,b)	$(a,b)_q$	再帰式
$(11,3)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(8,3)_q+q^4(2,1)_q$
$(13,1)$	$q^{13}+q^{12}+\cdots+q^2+q+1$	$(12,1)_q+q^{13}(0,1)_q$
$(1,14)$	$q^{14}+q^{13}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,13)_q$
$(2,13)$	$q^8+q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,11)_q$
$(4,11)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(1,3)_q+q(4,7)_q$
$(7,8)$	$q^8+q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(6,1)_q+q(7,1)_q$
$(8,7)$	$q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,7)_q+q^2(1,6)_q$
$(11,4)$	$q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(7,4)_q+q^3(3,1)_q$
$(13,2)$	$q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(11,2)_q+q^7(2)_q$
$(14,1)$	$q^{14}+q^{13}+\cdots+q^2+q+1$	$(13,1)_q+q^{14}(0,1)_q$
$(1,15)$	$q^{15}+q^{14}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,14)_q$
$(3,13)$	$q^7+q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(2,1)_q+q(3,10)_q$
$(5,11)$	$q^7+q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(4,1)_q+q(5,6)_q$
$(7,9)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(5,2)_q+q(7,2)_q$
$(9,7)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(2,7)_q+q^2(2,5)_q$
$(11,5)$	$q^7+2q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(6,5)_q+q^3(1,4)_q$
$(13,3)$	$q^7+2q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(10,3)_q+q^5(1,2)_q$
$(15,1)$	$q^{15}+q^{14}+\cdots+q^2+q+1$	$(14,1)_q+q^{15}(0,1)_q$
$(1,16)$	$q^{16}+q^{15}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,15)_q$
$(2,15)$	$q^9+q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(1,1)_q+q(2,13)_q$
$(3,14)$	$q^7+2q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(1,2)_q+q(3,11)_q$
$(4,13)$	$q^7+q^6+2q^5+3q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(3,1)_q+q(4,9)_q$
$(5,12)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+2q+1$	$(3,2)_q+q(5,7)_q$
$(6,11)$	$q^7+2q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(1,5)_q+q(6,5)_q$
$(7,10)$	$q^6+2q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(4,3)_q+q(7,3)_q$
$(8,9)$	$q^9+q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1$	$(7,1)_q+q(8,1)_q$
$(9,8)$	$q^9+2q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(1,8)_q+q^2(1,7)_q$
$(10,7)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+2q+1$	$(3,7)_q+q^2(3,4)_q$
$(11,6)$	$q^7+2q^6+2q^5+3q^4+3q^3+3q^2+2q+1$	$(5,6)_q+q^2(5,1)_q$
$(12,5)$	$q^6+2q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(7,5)_q+q^3(2,3)_q$
$(13,4)$	$q^7+2q^6+3q^5+4q^4+3q^3+2q^2+q+1$	$(9,4)_q+q^4(1,3)_q$
$(14,3)$	$q^7+2q^6+3q^5+3q^4+3q^3+2q^2+2q+1$	$(11,3)_q+q^5(2,1)_q$
$(15,2)$	$q^9+2q^8+2q^7+2q^6+2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+q+1$	$(13,2)_q+q^8(1,1)_q$
$(16,1)$	$q^{16}+q^{15}+\cdots+q^2+q+1$	$(15,1)_q+q^{16}(0,1)_q$

(a,b)	$(a,b)_q$	再帰式
$(1,17)$	$q^{17}+q^{16}+\cdots+q^2+q+1$	$(1,0)_q+q(1,16)_q$
$(5,13)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+3q+1$	$(2,3)_q+q(5,8)_q$
$(7,11)$	$q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+3q+1$	$(3,4)_q+q(7,4)_q$
$(11,7)$	$q^6+3q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(4,7)_q+q^2(4,3)_q$
$(13,5)$	$q^6+3q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1$	$(8,5)_q+q^3(3,2)_q$
$(17,1)$	$q^{17}+q^{16}+\cdots+q^2+q+1$	$(16,1)_q+q^{17}(0,1)_q$

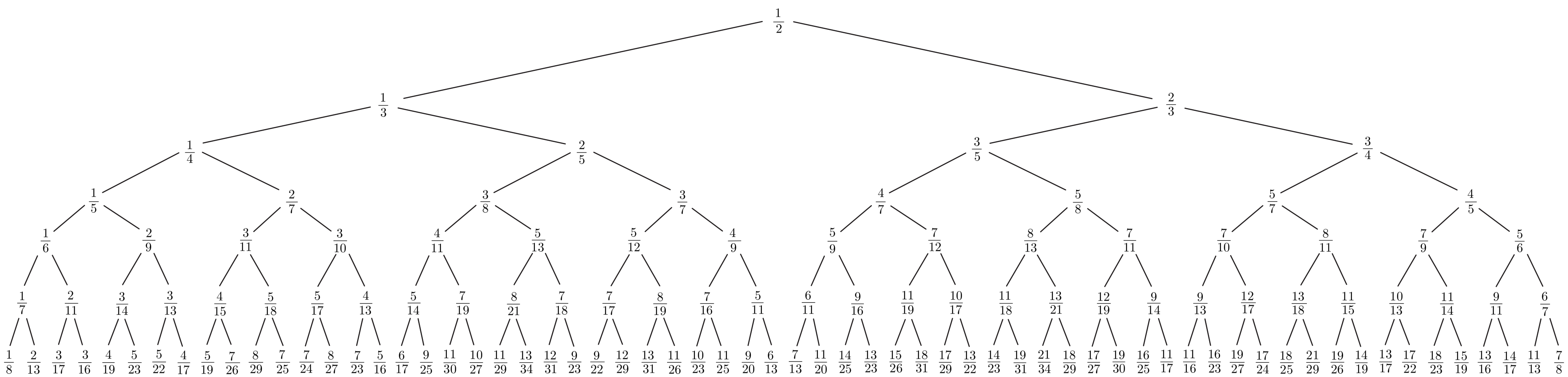
Farey 和分解，負連分数展開，正規化された Jones 多項式の値の一覧

α	Farey 和分解	負連分数表示	$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$	$\underline{\mathtt{r}}(\alpha)$	$\underline{\mathtt{i}}(\alpha)$	$J_\alpha(q)$
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}\oplus\frac{1}{0}$	$[2]^-$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$1+q^2$
$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{1}\oplus\frac{1}{0}$	$[3]^-$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$1+q^2+q^3$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}\oplus\frac{2}{1}$	$[2,2]^-$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	$1+q+q^3$
$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{1}\oplus\frac{1}{0}$	$[4]^-$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{3}$	$1+q^2+q^3+q^4$
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{1}\oplus\frac{3}{2}$	$[2,2,2]^-$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{1}$	$1+q+q^2+q^4$
$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{1}\oplus\frac{3}{1}$	$[3,2]^-$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$1+q+q^2+q^3+q^4$
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}\oplus\frac{2}{1}$	$[2,3]^-$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$1+q+q^2+q^3+q^4$
$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{1}\oplus\frac{1}{0}$	$[5]^-$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{4}$	$1+q^2+q^3+q^4+q^5$
$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{1}\oplus\frac{4}{3}$	$[2,2,2,2]^-$	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{1}$	$1+q+q^2+q^3+q^5$
$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{1}\oplus\frac{4}{1}$	$[4,2]^-$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$1+q+q^2+2q^3+q^4+q^5$
$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{1}\oplus\frac{5}{2}$	$[3,2,2]^-$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{4}$	$1+q+2q^2+q^3+q^4+q^5$
$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{3}\oplus\frac{2}{1}$	$[2,4]^-$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$1+q+q^2+2q^3+q^4+q^5$
$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}\oplus\frac{3}{2}$	$[2,2,3]^-$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{2}$	$1+q+2q^2+q^3+q^4+q^5$
$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}\oplus\frac{3}{1}$	$[3,3]^-$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{5}$	$1+q+2q^2+q^3+2q^4+q^5$
$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{2}\oplus\frac{5}{3}$	$[2,3,2]^-$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{3}$	$1+2q+q^2+2q^3+q^4+q^5$
$\frac{6}{1}$	$\frac{5}{1}\oplus\frac{1}{0}$	$[6]^-$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{5}$	$1+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6$
$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{1}\oplus\frac{5}{4}$	$[2,2,2,2,2]^-$	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{1}$	$1+q+q^2+q^3+q^4+q^6$
$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{1}\oplus\frac{5}{1}$	$[5,2]^-$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{7}$	$1+q+q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$
$\frac{9}{4}$	$\frac{2}{1}\oplus\frac{7}{3}$	$[3,2,2,2]^-$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{5}$	$1+q+2q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6$
$\frac{9}{5}$	$\frac{7}{4}\oplus\frac{2}{1}$	$[2,5]^-$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$	$1+q+q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$
$\frac{9}{7}$	$\frac{5}{4}\oplus\frac{4}{3}$	$[2,2,2,3]^-$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	$1+q+2q^2+2q^3+q^4+q^5+q^6$
$\frac{10}{3}$	$\frac{3}{1}\oplus\frac{7}{2}$	$[4,2,2]^-$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$
$\frac{10}{7}$	$\frac{7}{5}\oplus\frac{3}{2}$	$[2,2,4]^-$	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$

α	Farey 和分解	負連分数表示	$\underline{\texttt{ir}}(\alpha)$	$\underline{\texttt{r}}(\alpha)$	$\underline{\texttt{i}}(\alpha)$	$J_\alpha(q)$
$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{2} \oplus \frac{4}{1}$	$[4,3]^-$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{8}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6$
$\frac{11}{4}$	$\frac{8}{3} \oplus \frac{3}{1}$	$[3,4]^-$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{7}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6$
$\frac{11}{7}$	$\frac{3}{2} \oplus \frac{8}{5}$	$[2,3,2,2]^-$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{11}{4}$	$1+2q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$
$\frac{11}{8}$	$\frac{4}{3} \oplus \frac{7}{5}$	$[2,2,3,2]^-$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{11}{3}$	$1+2q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6$
$\frac{12}{5}$	$\frac{7}{3} \oplus \frac{5}{2}$	$[3,2,3]^-$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{7}$	$1+q+3q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6$
$\frac{12}{7}$	$\frac{5}{3} \oplus \frac{7}{4}$	$[2,4,2]^-$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{12}{5}$	$1+2q+2q^2+2q^3+3q^4+q^5+q^6$
$\frac{13}{5}$	$\frac{5}{2} \oplus \frac{8}{3}$	$[3,3,2]^-$	$\frac{13}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{8}$	$1+2q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6$
$\frac{13}{8}$	$\frac{8}{5} \oplus \frac{5}{3}$	$[2,3,3]^-$	$\frac{13}{8}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{13}{5}$	$1+2q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6$
$\frac{7}{1}$	$\frac{6}{1} \oplus \frac{1}{0}$	$[7]^-$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{6}$	$1+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7$
$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{1} \oplus \frac{6}{5}$	$[2,2,2,2,2,2]^-$	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{1}$	$1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^7$
$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{1} \oplus \frac{6}{1}$	$[6,2]^-$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{9}$	$1+q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{11}{9}$	$\frac{6}{5} \oplus \frac{5}{4}$	$[2,2,2,2,3]^-$	$\frac{11}{6}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{2}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6+q^7$
$\frac{11}{6}$	$\frac{9}{5} \oplus \frac{2}{1}$	$[2,6]^-$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{5}$	$1+q+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{11}{5}$	$\frac{2}{1} \oplus \frac{9}{4}$	$[3,2,2,2,2]^-$	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{11}{6}$	$1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6+q^7$
$\frac{13}{3}$	$\frac{4}{1} \oplus \frac{9}{2}$	$[5,2,2]^-$	$\frac{13}{4}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{13}{10}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{13}{10}$	$\frac{9}{7} \oplus \frac{4}{3}$	$[2,2,2,4]^-$	$\frac{13}{9}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{13}{3}$	$1+q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{7} \oplus \frac{3}{2}$	$[2,2,5]^-$	$\frac{13}{10}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{13}{4}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{1} \oplus \frac{10}{3}$	$[4,2,2,2]^-$	$\frac{13}{3}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{13}{9}$	$1+q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{14}{3}$	$\frac{9}{2} \oplus \frac{5}{1}$	$[5,3]^-$	$\frac{14}{9}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{14}{11}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7$
$\frac{14}{11}$	$\frac{5}{4} \oplus \frac{9}{7}$	$[2,2,2,3,2]^-$	$\frac{14}{5}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{14}{3}$	$1+2q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{14}{5}$	$\frac{11}{4} \oplus \frac{3}{1}$	$[3,5]^-$	$\frac{14}{11}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{9}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7$
$\frac{14}{9}$	$\frac{3}{2} \oplus \frac{11}{7}$	$[2,3,2,2,2]^-$	$\frac{14}{3}$	$\frac{14}{11}$	$\frac{14}{5}$	$1+2q+2q^2+3q^3+2q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{15}{4}$	$\frac{11}{3} \oplus \frac{4}{1}$	$[4,4]^-$	$\frac{15}{11}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{11}$	$1+q+2q^2+3q^3+2q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{15}{11}$	$\frac{4}{3} \oplus \frac{11}{8}$	$[2,2,3,2,2]^-$	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{11}$	$\frac{15}{4}$	$1+2q+3q^2+2q^3+3q^4+2q^5+q^6+q^7$
$\frac{16}{7}$	$\frac{9}{4} \oplus \frac{7}{3}$	$[3,2,2,3]^-$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{16}{9}$	$1+q+3q^2+3q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7$
$\frac{16}{9}$	$\frac{7}{4} \oplus \frac{9}{5}$	$[2,5,2]^-$	$\frac{16}{7}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{7}$	$1+2q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6+q^7$
$\frac{17}{5}$	$\frac{10}{3} \oplus \frac{7}{2}$	$[4,2,3]^-$	$\frac{17}{10}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{12}$	$1+q+3q^2+3q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{17}{12}$	$\frac{7}{5} \oplus \frac{10}{7}$	$[2,2,4,2]^-$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{17}{5}$	$1+2q+3q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6+q^7$
$\frac{17}{7}$	$\frac{12}{5} \oplus \frac{5}{2}$	$[3,2,4]^-$	$\frac{17}{12}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{17}{10}$	$1+q+3q^2+3q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{17}{10}$	$\frac{5}{3} \oplus \frac{12}{7}$	$[2,4,2,2]^-$	$\frac{17}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{17}{7}$	$1+2q+3q^2+3q^3+3q^4+3q^5+q^6+q^7$
$\frac{18}{5}$	$\frac{7}{2} \oplus \frac{11}{3}$	$[4,3,2]^-$	$\frac{18}{7}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{18}{13}$	$1+2q+2q^2+4q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{18}{13}$	$\frac{11}{8} \oplus \frac{7}{5}$	$[2,2,3,3]^-$	$\frac{18}{11}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{18}{5}$	$1+2q+3q^2+3q^3+4q^4+2q^5+2q^6+q^7$
$\frac{18}{11}$	$\frac{13}{8} \oplus \frac{5}{3}$	$[2,3,4]^-$	$\frac{18}{13}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{7}$	$1+2q+2q^2+4q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{18}{7}$	$\frac{5}{2} \oplus \frac{13}{5}$	$[3,3,2,2]^-$	$\frac{18}{5}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{18}{11}$	$1+2q+3q^2+3q^3+4q^4+2q^5+2q^6+q^7$

α	Farey 和分解	負連分数表示	$\underline{\mathtt{ir}}(\alpha)$	$\underline{\mathtt{r}}(\alpha)$	$\underline{\mathtt{i}}(\alpha)$	$J_\alpha(q)$
$\frac{19}{7}$	$\frac{8}{3} \oplus \frac{11}{4}$	$[3,4,2]^-$	$\frac{19}{8}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{19}{12}$	$1+2q+3q^2+3q^3+4q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{19}{12}$	$\frac{11}{7} \oplus \frac{8}{5}$	$[2,3,2,3]^-$	$\frac{19}{11}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{19}{7}$	$1+2q+3q^2+4q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{19}{11}$	$\frac{12}{7} \oplus \frac{7}{4}$	$[2,4,3]^-$	$\frac{19}{12}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{8}$	$1+2q+3q^2+3q^3+4q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{19}{8}$	$\frac{7}{3} \oplus \frac{12}{5}$	$[3,2,3,2]^-$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{19}{11}$	$1+2q+3q^2+4q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{21}{8}$	$\frac{13}{5} \oplus \frac{8}{3}$	$[3,3,3]^-$	$\frac{21}{13}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{13}$	$1+2q+3q^2+4q^3+4q^4+3q^5+3q^6+q^7$
$\frac{21}{13}$	$\frac{8}{5} \oplus \frac{13}{8}$	$[2,3,3,2]^-$	$\frac{21}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{21}{8}$	$1+3q+3q^2+4q^3+4q^4+3q^5+2q^6+q^7$
$\frac{17}{3}$	$\frac{11}{2} \oplus \frac{6}{1}$	$[6,3]^-$	$\frac{17}{11}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{17}{14}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+3q^5+2q^6+2q^7+q^8$
$\frac{17}{4}$	$\frac{4}{1} \oplus \frac{13}{3}$	$[5,2,2,2]^-$	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{13}$	$\frac{17}{13}$	$1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7+q^8$
$\frac{17}{6}$	$\frac{14}{5} \oplus \frac{3}{1}$	$[3,6]^-$	$\frac{17}{14}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{17}{11}$	$1+q+2q^2+2q^3+3q^4+3q^5+2q^6+2q^7+q^8$
$\frac{17}{11}$	$\frac{3}{2} \oplus \frac{14}{9}$	$[2,3,2,2,2,2]^-$	$\frac{17}{3}$	$\frac{17}{14}$	$\frac{17}{6}$	$1+2q+2q^2+3q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8$
$\frac{17}{13}$	$\frac{13}{10} \oplus \frac{4}{3}$	$[2,2,2,5]^-$	$\frac{17}{13}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{17}{4}$	$1+q+2q^2+3q^3+3q^4+3q^5+2q^6+q^7+q^8$
$\frac{17}{14}$	$\frac{6}{5} \oplus \frac{11}{9}$	$[2,2,2,2,3,2]^-$	$\frac{17}{6}$	$\frac{17}{11}$	$\frac{17}{3}$	$1+2q+2q^2+3q^3+3q^4+2q^5+2q^6+q^7+q^8$

$\frac{1}{2}$ から第 7 階までの Stern-Brocot 木



参 考 文 献

[1] C.C. Adams, "The knot book", W.H. Freeman & Co., New York, 1994. (金信泰造・訳『結び目の数学—結び目理論への初等的入門』培風館, 1998 ／原書改訂版, 丸善出版, 2021.)

[2] M. Aigner, *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture*, Springer, 2013.

[3] A. Bapat, L. Becker and A. M. Licata, *q-deformed rational numbers and the* 2*-Calabi–Yau category of type* A_2, Forum Math. Sigma **11** (2023), Paper No. e47, 41 pp.

[4] A. Brocot, *Calcul des rouages par approximation, Nouvelle méthode*, Revue chronomeétrique **3** (1861), 186–194.

[5] A.N. Chávez, *On the* c*-vectors and* g*-vectors of the Markov cluster algebra*, Sém. Lothar. Combin. **69** (2013), Art. B69d, 12 pp.

[6] H.S.M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.

[7] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94, 175–183.

[8] H.S.M. Coxeter and J.F. Rigby, *Frieze patterns, triangulated polygons and dichromatic symmetry*, The Lighter side of Math. 15–27.

[9] C. Ernst and D.W. Sumners, *A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 489–515.

[10] S. Fomin, M. Shapiro and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.

[11] S. Formin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2001), 497–529.

[12] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algberas II. Finite type classification*, Invent Math. **154** (2003), 977–1018.

[13] S. Formin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.

[14] P. Gabriel, *Unzerlegbare darstellungen I*, manuscripta math. **6** (1972), 71–103.

[15] M. Gross, P. Hacking, S. Keel and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 497–608.

[16] A. Hatcher and U. Ortel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology **28** (1989), 453–480.

[17] C.-S. Henry, *Coxeter friezes and triangulations of polygons*, Amer. Math Monthly **120** (2013), 553–558.

[18] K. Hikami and R. Inoue, *Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundles and* 2*-bridge links*, J. Knot Theory Ramif. **23** (2014), 1450006 (33 pages).

[19] K. Hikami and R. Inoue, *Braids, complex volume and cluster algebras*, AGT **15** (2015), 2175–2194.

[20] F.E.P. Hirzebruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. (2) **19** (1973), 183–281.

[21] F.E.P. Hirzebruch and D. Zagier, *Classification of Hilbert modular surfaces*, in "Complex analysis and algebraic geometry," Collected papers II, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, 43–77.

[22] 井上玲（神保道夫・記）『クラスター代数入門』(立教大学数理物理学研究センター Lecture Notes 3), 2016.

[23] 井上玲, 「現代数学への誘い–クラスター代数入門」, 現代数学 2024 年 11 月号, 8–13.

[24] V.F.R. Jones, *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras*, Bull. of A.M.S. **129** (1985), 103–112.

[25] T. Kanenobu, *Jones and Q-polynomials for 2-bridge knots and links*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 835–841.

[26] L.H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.

[27] L.H. Kauffman and S. Lambropoulou, *Hard unknots and collapsing tangles*, in: 'Introductory lectures on knot theory', 187–247, Ser. Knots Everything, 46, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.

[28] 河内明夫『レクチャー結び目理論』(共立叢書 現代の潮流) 共立出版, 2007.

[29] 小木曽岳義, 「Conway-Coxeter Frieze を用いた有理絡み目図式の Kauffman bracket 多項式の計算レシピ」, 『研究集会「結び目の数学 X」報告集』所収, 2018, 91–118.

[30] 小木曽岳義, 「cluster 代数、連分数、有理タングル、2 次無理数への応用」, 大阪大学特別講義, 2021, 大阪大学理学研究科.

[31] T. Kogiso, *q-deformations and t-deformations of the Markov triples*, arXiv:2008.12913, 2020.

[32] T. Kogiso and M. Wakui, *Kauffman bracket polynomials of Conway-Coxeter Friezes*, in "Proceedings of the Meeting for Study of Number Theory, Hopf algebras and Related Topics (2017)", edited by H. Yamane, T. Kogiso, Y. Koga and I. Kimura, Yokohama Publ., 2019, 51–79.

[33] T. Kogiso and M. Wakui, *A bridge between Conway-Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials*, J. Knot Theory Ramif. **28** (2019), 1950083 (40 pages).

[34] T. Kogiso and M. Wakui, *A characterization of Conway-Coxeter friezes of zigzag-type by rational links*, Osaka J. Math. **59** (2022), 341–362.

[35] T. Kogiso, K. Miyamoto, X. Ren, M. Wakui and K. Yanagawa, *Arithmetic on q-deformed rational numbers*, arxiv:2403.08446, to appear Arnold J. Math.

[36] 黒木玄, 「フリーズパターン–数の繰返し模様の不思議」, 2013 年 7 月 7 日, http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf.

[37] 草場公邦, 『行列特論』裳華房, 1979.

[38] E. Lee, S. Y. Lee and M. Seo, *A recursive formula for the Jones polynomial of 2-bridge links and applications*, J. Korean Math. Soc. **46** (2009), 919–947.

[39] K. Lee and R. Schiffler, *Cluster algebras and Jones polynomials*, Selecta Math. (N.S.) **25** (2019), Paper No.58, 41pp.

[40] W.B.R. Lickorish and M.B.Thistlethwaite, *Some links with non-trivial polynomials and their corssing-numbers*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 527–539.

[41] T. McConville, B. E. Sagan and C. Smyth, *On a renk-unimodality conjecture of Morier-Genoud and Ovsienko*, Discrete Math. **344** (2021), 112483, 13 pages.

[42] S. Morier-Genoud, *Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics*, Bull. London Math. Soc. **47** (2015), 895–938.

[43] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *Farey boat: Continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **121** (2019), 91–136.

[44] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *q-deformed rationals and q-continued fractions*, Forum Math. Sigma **8** (2020), e13, 55 pages.

[45] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *On q-deformed real numbers*, Experiment. Math. **31** (2022), 652–660.

[46] S. Morier-Genoud and V. Ovsienko, *Quantum numbers and q-deformed Conway-Coxeter friezes*, arXiv2011.10809, 2021.

[47] G. Muller, *The existence of a maximal green sequences is not invariant under quiver mutation*, Electron. J. Combin. **23** (2016), #P2.47, 23 pages.

[48] 村杉邦男『結び目理論とその応用』日本評論社, 1993.

[49] S. Nakabo, *Formulas on the HOMFLY and Jones polynomials of 2-bridge knots and links*, Kobe J. Math. **17** (2000), 131–144.

[50] S. Nakabo, *Explicit description of the HOMFLY polynomials for 2-bridge knots and links*, J. Knot Theory Ramif. **11** (2002), 565–574.

[51] W. Nagai and Y. Terashima, *Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials*, Adv. Math. **363** (2020), articleID: 106965.

[52] K. Nagao, Y. Terashima and M. Yamazaki, *Hyperbolic* 3*-manifolds and cluster algebras*, Nagoya Math. J. **235** (2019), 1–25.

[53] 中島啓「ディンキン図式をめぐって–数学におけるプラトン哲学」, 平成 21 年度 (第 31 回) 数学入門公開講座公開テキスト, 京都大学数理解析研究所, 2009.

[54] 中西知樹『団代数論の基礎』東京大学出版会, 2024.

[55] 西山享『フリーズの数学　スケッチ帖　数と幾何のきらめき』共立出版, 2022.

[56] E. Oğuz and M. Ravichandran, *Rank polynomials of fence posets are unimodal*, Discrete Math. **346** (2023), 113218, 20 pages.

[57] M. Pressland, *From frieze patterns to cluster categories*, 2020, https://www.icms.org.uk/sites/default/files/downloads/Workshops/Oct-2020/pressland.pdf.

[58] K. Qazaqzeh, M. Yasein and M. Abu-Qamar, *The Jones polynomial of rational links*, Kodai Math. J. **39** (2016), 59–71.

[59] M. Rabideau, *F-polynomial formula from continued fractions*, J. Algebra **509** (2018), 467–475.

[60] K. Reidemeister, *Elemntare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), 24–32.

[61] X. Ren（任鑫）「q-有理数と q-無理数のいくつかの考察」学位論文 (修士), 城西大学大学院理学研究科, 2021.

[62] X. Ren, *On q-deformed Farey sum and a homological interpretation of q-deformed real quadratic irrational numbers*, Preprint (2022), arXiv:2210.06056.

[63] X. Ren and K. Yanagawa, *Transposes in q-deformed modular group and their application to q-deformed rational numbers*, arXiv:2502.02974, 2025.

[64] 櫻井武「箙の変異と多角形三角形分割の flip と q-連分数との関係」学位論文 (修士), 城西大学大学院理学研究科, 2021.

[65] R. Schiffler, *Quiver representations*, (CMS Books in Math.) Springer, 2014.

[66] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Zeit. **66** (1956), 133–170.

[67] M.A. Stern, *Ueber eine zahlentheoretische Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **55** (1858), 193–220.

[68] M.B.Thistlethwaite, *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, Invent. Math. **93** (1988), 285–296.

[69] 富田誠「祖先三角形と有理絡み目」修士論文, 大阪大学大学院理学研究科, 2024.

[70] I. Torisu, *A remark on 2-adjacency relation between Montesinos knots and 2-bridge knots*, Top. Appl. **198** (2016), 34–37.

[71] S. Nybø Vagstad, *Frieze patterns and triangulated polygons*, Norges tenisk-naturvitenskapelige universitet, 2015.

[72] 和久井道久, 「結び目と連分数」, 平成 28 年度金沢大学理工学域数物科学類計算科学特別講義のために作成したノート, 2017, http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/˜wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf.

[73] M. Wakui, *q-deformed integers derived from pairs of coprime integers and its applications*, arXiv: 2209.07724, 2022, to appear in "Low Dimensional Topology and Number Theory" Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.

[74] 山田修司, 「２橋結び目の Jones 多項式」, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集, 1996 年 2 月, 92–96.

[75] 数理科学 2015 年 3 月号 特集・団代数をめぐって—新たな共通言語の認識—, サイエンス社.

索　　引