[1]

ON REPRESENTATION RINGS OF NON-SEMISIMPLE HOPF ALGEBRAS OF LOW DIMENSION

和久井道久 (MICHIHISA WAKUI)

Abstract. By using the classification results on all Hopf algebras of dimension ≤ 11 due to Williams, Masuoka and Ştefan, we investigate structures of representation rings of non-semisimple Hopf algebras of dimension ≤ 9 over an algebraically closed field $\boldsymbol{k}$ of characteristic 0.

Let $\mathrm{Rep}(A)$ denote the Green ring of a finite dimensional Hopf algebra A over $\boldsymbol{k}$. If A is a non-semisimple Hopf algebra A of dimension ≤ 9 over $\boldsymbol{k}$, then $\mathrm{Rep}(A)$ is commutative, and the anti-ring homomorphism $* : \mathrm{Rep}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}(A)$ induced from the antipode of A is an involution. We prove this by determining the isomorphism classes of indecomposable modules of such a Hopf algebra.

1. 序論および主結果

近年、「自然数 n を固定したときに、n 次元のホップ代数を同型を法として分類する」という問題に続々と解答が与えられている。特に、標数 0 の代数閉体上で定義された 11 次元以下のホップ代数については、Williams [17]、増岡彰 [9, 10]、Ştefan [15] によって完全な分類結果が得られている。その結果により、標数 0 の代数閉体上で定義された 9 次元以下の半単純でないホップ代数は以下の表に挙げたホップ代数のどれか 1 つに同型であることがわかる。

次元	半単純でないホップ代数	生成元	関係式	ホップ代数構造
4	T_4	g, x	$g^2 = 1,\ x^2 = 0,\ xg = -gx$	$g \in G,\ x \in P_{g,1}$
8	A'_{C_4}	g, x	$g^4 = 1,\ x^2 = 0,\ xg = -gx$	$g \in G,\ x \in P_{g,1}$
	A''_{C_4}	g, x	$g^4 = 1,\ x^2 = g^2 - 1,\ xg = -gx$	$g \in G,\ x \in P_{g,1}$
	A'''_{C_4}	g, x	$g^4 = 1,\ x^2 = 0,\ xg = \omega_4 gx$	$g \in G,\ x \in P_{g^2,1}$
	$A_{C_2 \times C_2}$	g, h, x	$g^2=h^2=1,\ x^2=0,$ $gh=hg,\ gx=-xg,\ hx=-xh$	$g, h \in G,\ x \in P_{g,1}$
	$(A''_{C_4})^*$	g, x	$g^4 = 1,\ x^2 = 0,\ xg = \omega_4 gx$	$\Delta(g)=g\otimes g-2gx\otimes g^3x,$ $x\in P_{g^2,1}$
	A_{C_2}	g, x, y	$g^2=1,\ x^2=y^2=0,$ $gx=-xg,\ gy=-yg,\ xy=-yx$	$g \in G,\ x, y \in P_{g,1}$
9	T_{9,ω_3}	g, x	$g^3 = 1,\ x^3 = 0,\ xg = \omega_3 gx$	$g \in G,\ x \in P_{g,1}$

ここで、$\omega_n \in \boldsymbol{k}$ $(n = 3, 4)$ は 1 の原始 n 乗根を表わし、$G = G(A)$ は A の群的元の全体、$P_{g,h} = P_{g,h}(A)$ は A の (g, h)-歪原始元の全体を表わす：

$$G(A) = \{g \in A \mid g \neq 0,\ \Delta(g) = g \otimes g\}, \quad P_{g,h}(A) = \{x \in A \mid \Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x\}$$

お詫びと注意. ホップ代数として $T_{9,\omega_3} \not\cong T_{9,\omega_3^{-1}}$ なので、半単純でない 9 次元のホップ代数の同型類は 2 個ある。講演の中では、半単純でない 9 次元のホップ代数の同型類の個数は 1 としていましたが、これは誤りです。お詫び申し上げます。

このノートでは、上記の表に挙げたホップ代数の直既約加群を具体的に決定することにより、9 次元以下の半単純でないホップ代数の表現環の持つ性質について調べる。単に、表現環と聞くと、いわゆる Grothendieck 環 (例えば、[12, 6] 参照) を連想される方がいるかもしれないが、ここでは Green 環の意味で用いている。Green 環を使う理由は、我々が対象とする代数は半単純でなく、Grothendieck 環が “とても小さい” ことにある。

[1]The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

ホップ代数に対する Green 環の概念は、有限群 G の群環 $\boldsymbol{k}[G]$ に対する Green 環の概念 [4] を自然に拡張することにより得られる。ここで、その定義を述べよう。簡単のため、体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ホップ代数 A について考える。有限次元左 A-加群の同型類全体を $\mathfrak{R}(A)$ によって表わす。有限次元左 A-加群 V に対して、その同型類を $[V]$ で書き表わすことにする。このとき、

$$[V]+[W]=[V\oplus W],\quad [V][W]=[V\otimes W]$$

によって定義される和と積に関して、$\mathfrak{R}(A)$ は単位元を持つ半環をなす。ここでは、$V\otimes W$ を A の左作用

$$a\cdot(v\otimes w)=\sum a_{(1)}v\otimes a_{(2)}w,\quad v\in V,\ w\in W, a\in A,\ \ Delta(a)=\sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}$$

により、左 A-加群とみなしている。但し、$\Delta: A\longrightarrow A\otimes A$ は A の余積である。また、半環 $\mathfrak{R}(A)$ の単位元は $[\boldsymbol{k}]$ によって与えられる。ここでは、$\boldsymbol{k}$ を A の左作用

$$a\cdot r=\varepsilon(a)r,\quad r\in\boldsymbol{k},\ a\in A$$

より、左 A-加群とみなしている。但し、$\varepsilon: A\longrightarrow\boldsymbol{k}$ は A の余単位である。

$\mathfrak{R}(A)$ の半加群としての Grothendieck 加群を $\mathrm{Rep}(A)$ と書くことにする。このとき、$\mathfrak{R}(A)$ の上で述べた半環構造から、単位元を持つ環の構造が $\mathrm{Rep}(A)$ に定まる。そればかりではなく、$\mathrm{Rep}(A)$ は、A の対合 $S: A\longrightarrow A$ から誘導される反環準同型 $*:\mathrm{Rep}(A)\longrightarrow\mathrm{Rep}(A)$ を持つ。この反環準同型 $*$ は、有限次元左 A-加群 V の同値類 $[V]$ に対して、$[V^*]$ を対応させる写像として定義される。ここでは、$V^*=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(V,\boldsymbol{k})$ を A の左作用

$$(a\cdot f)(v)=f(S(a)\cdot v),\quad f\in V^*,\ a\in A,\ v\in V$$

によって左 A-加群とみなしている。

以上のように定義される $*$ 付き環 $\mathrm{Rep}(A)$ を A の **Green 環**と呼ぶことにする。A は有限次元なので、$S^n=id_A$ となる自然数 n が存在する [13]。よって、$*:\mathrm{Rep}(A)\longrightarrow\mathrm{Rep}(A)$ は全単射である。また、Krull-Remak-Schmidt-東屋の定理により、$\mathrm{Rep}(A)$ は $\{[V]\mid V$ は有限次元直既約加群 $\}$ を基底に持つ自由 $\mathbb{Z}$-加群である。標数 0 の代数閉体上で定義された 9 次元以下の半単純でないホップ代数の Green 環について、次が成り立つ。

定理 1.1. (1) A'''_{C_4} と $(A''_{C_4})^*$ の Green 環は同型である。
(2) T_4, A'_{C_4}, A''_{C_4}, A'''_{C_4}, $A_{C_2\times C_2}$, T_{9,ω_3} の Green 環は、以下の表のような生成元と関係式によって記述される可換環である (但し、$ab=ba$ というタイプの関係式は省略した)。

Green 環	生成元	関係式	$*$-構造	$\mathbb{Z}$-加群としての階数
$\mathrm{Rep}(T_4)$	$\chi,\ \psi$	$\chi^2=1,\ \psi^2=(1+\chi)\psi$	$\chi^*=\chi,\ \psi^*=\chi\psi$	4
$\mathrm{Rep}(A'_{C_4})$	$\chi,\ \psi$	$\chi^4=1,\ \psi^2=(1+\chi^2)\psi$	$\chi^*=\chi^{-1},\ \psi^*=\chi^2\psi$	8
$\mathrm{Rep}(A''_{C_4})$	$\chi,\ \psi,\ \rho$	$\chi^2=1,\ \psi\rho=2\rho,$ $\psi^2=\rho^2=(1+\chi)\psi$	$\chi^*=\chi^{-1},\ \psi^*=\chi\psi,\ \rho^*=\rho$	6
$\mathrm{Rep}(A'''_{C_4})$	$\chi,\ \psi$	$\chi^4=1,\ \psi^2=(1+\chi)\psi$	$\chi^*=\chi^{-1},\ \psi^*=\chi^{-1}\psi$	8
$\mathrm{Rep}(A_{C_2\times C_2})$	$\chi_1,\ \chi_2,\ \psi$	$\chi_1^2=\chi_2^2=1,$ $\psi^2=(1+\chi_1\chi_2)\psi$	$\chi_i^*=\chi_i^{-1}\ (i=1,2),\ \psi^*=\chi_1\chi_2\psi$	8
$\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3})$	$\chi,\ \psi,\ \rho$	$\chi^3=1,\ \psi^2=1+\chi\rho,$ $\rho^2=\rho(1+\chi+\chi^2),\ \rho\psi=\rho(\chi+\chi^2)$	$\chi^*=\chi^{-1},\ \psi^*=\psi,\ \rho^*=\chi^2\rho$	9

(3) Green 環 $\mathrm{Rep}(A_{C_2})$ の $\mathbb{Z}$-加群としての階数は無限である。より詳しくは、任意の自然数 n に対して、n 次元の直既約な左 A_{C_2}-加群が存在する。

お詫びと注意. 上の表から、$\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3})$ と $\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3^{-1}})$ は同型である。一方、T_{9,ω_3} は非自明なコサイクル変形を持たない [2, 8]。したがって、有限次元左 T_{9,ω_3}-加群のなすテンソル圏と有限次元左 $T_{9,\omega_3^{-1}}$-加群のなすテンソル圏とは同値でない [14]。講演とその Abstract では、9 次元以下の半単純でないホップ代数 A については、有限次元左 A-加群のなすテンソル圏が Green 環によって決まると主張しましたが、これは誤りです。お詫び致します。9 を 8 に取り替えると、正しい主張になります [16]。

上の定理から次の系が導かれる ([16] も参照)。

系 1.2. 標数 0 の代数閉体上で定義された 9 次元以下の半単純でないホップ代数 A の Green 環 $\mathrm{Rep}(A)$ は可換であり、かつ、反環準同型 $*: \mathrm{Rep}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}(A)$ はインボリューションである。さらに、A_{C_2} と同型なホップ代数を除いて、標数 0 の代数閉体上で定義された 9 次元以下の半単純でないホップ代数は、有限表現型 (*i.e.* 直既約な有限生成左 A-加群の同型類は有限個) である。

注意 1. 1. 有限群 G の群環 $\boldsymbol{k}[G]$ の双対ホップ代数 $\boldsymbol{k}[G]^*$ について、$\mathrm{Rep}(\boldsymbol{k}[G]^*) \cong \mathbb{Z}[G]$ が成り立つ。したがって、G が非可換ならば、$\mathrm{Rep}(\boldsymbol{k}[G]^*)$ も非可換である。
2. A が準三角ホップ代数 [3] の構造を持てば、その Green 環は可換であり、かつ、反環準同型 $*: \mathrm{Rep}(A) \longrightarrow \mathrm{Rep}(A)$ はインボリューションである。A_{C_2} は準三角ホップ代数の構造を持つ [5, 16] ので、その Green 環は可換であり、かつ、反環準同型 $*$ はインボリューションである。
3. 系の最後の主張は、A_{C_2} 以外のホップ代数の根基がすべて単項である (x で生成される) ことからも従う (例えば、[7, Proposition 54.8 & Theorem 54.12] を参照)。

2. 定理の証明

8 次元以下のホップ代数については、その Green 環の構造はすでに調べている [16] ので、ここでは、9 次元 Taft 代数 T_{9,ω_3} についてその構造を調べる。

命題 2.1. Λ を 9 次元 Taft 代数 $A = T_{9,\omega_3}$ の部分ホップ代数 $\boldsymbol{k}[G(A)]$ の積分とする。(すなわち、Λ を $1+g+g^2+g^3$ の 0 でないスカラー倍とする。) 左正則加群の 3 つの部分加群

$$V_3 := \boldsymbol{k}x^2\Lambda + \boldsymbol{k}x\Lambda + \boldsymbol{k}\Lambda, \quad V_2 = \boldsymbol{k}x^2\Lambda + \boldsymbol{k}x\Lambda, \quad V_1 = \boldsymbol{k}x^2\Lambda$$

を考える。このとき、A の有限次元直既約加群は以下のいずれか 1 つに同型である。
・1 次元直既約加群： $V_1^{\otimes a}$ $(a = 0, 1, 2)$.
・2 次元直既約加群： $V_1^{\otimes a} \otimes V_2$ $(a = 0, 1, 2)$.
・3 次元直既約加群： $V_1^{\otimes a} \otimes V_3$ $(a = 0, 1, 2)$.
但し、$V_1^{\otimes 0} = \boldsymbol{k}$ と約束する。

PROOF. V を直既約な有限次元左 A-加群とする。$\omega = \omega_3$ とおく。$g^3 = 1$ であるから、V は

$$V = V(g;1) \oplus V(g;\omega) \oplus V(g;\omega^2)$$

と g の作用に関する固有空間 $V(g;\omega^a)$, $a = 0,1,2$ の直和に分解される。

$gx = \omega^{-1}xg$ より、$x(V(g;\omega^a)) \subset V(g;\omega^{a-1})$ が成り立つ。$W_1 := x(V(g;1))$ とおき、それの $V(g;\omega^2)$ における (線形) 補空間を W_2 とする：$V(g;\omega^2) = W_1 \oplus W_2$ 。また、

$$U_0 = x(W_1) \cap x(W_2)$$

とおき、それの $V(g;\omega)$ における (線形) 補空間を U_1 とする：$V(g;\omega) = U_0 \oplus U_1$ 。さらに、各 $i = 1, 2$ に対して、

$$W_i = \mathrm{Ker}(x|_{W_i}) \oplus W_i'$$

となる部分空間 W_i' と

$$V(g;1) = Z \oplus \mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$$

となる部分空間 Z を取る。このとき、

$$\begin{cases} W_i' = W_i' \cap x^{-1}(U_0) + W_i' \cap x^{-1}(U_1) \quad (i = 1, 2), \\ Z = Z \cap x^{-1}(W_1' \cap x^{-1}(U_0)) + Z \cap x^{-1}(W_1' \cap x^{-1}(U_1)) + Z \cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1})) \end{cases}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} X &:= U_0 + W_1' \cap x^{-1}(U_0) + W_2' \cap x^{-1}(U_0) + Z \cap x^{-1}(W_1' \cap x^{-1}(U_0)), \\ Y &:= U_1 + W_1' \cap x^{-1}(U_1) + W_2' \cap x^{-1}(U_1) + Z \cap x^{-1}(W_1' \cap x^{-1}(U_1)) + \mathrm{Ker}(x|_{W_1}) + \mathrm{Ker}(x|_{W_2}) \\ &\quad + Z \cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1})) + \mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)}) \end{aligned}$$

とおくと、ベクトル空間として $V = X \oplus Y$ が成り立つ。この直和分解は左 A-加群としての直和分解にもなっている。なぜならば、$x^3 = 0$ により、

$$x(U_0) = 0, \quad x(U_1) \subset Z \cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1})) + \mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$$

が成り立つからである。V は直既約であったから、$V=X$ または $V=Y$ が成り立つ。

まず、X について考える。$x|_{W_1'\cap x^{-1}(U_0)}:W_1'\cap x^{-1}(U_0)\longrightarrow U_0$, $x|_{W_2'\cap x^{-1}(U_0)}:W_2'\cap x^{-1}(U_0)\longrightarrow U_0$, $x|_{Z\cap x^{-1}(W_1'\cap x^{-1}(U_0))}:Z\cap x^{-1}(W_1'\cap x^{-1}(U_0))\longrightarrow W_1'\cap x^{-1}(U_0)$ はすべて線形同型写像であるから、$U_0\neq 0$ ならば、$g,\ x$ の X への作用は次のような 4 次正方行列 (の直和) として表わすことができる。

$$g\longmapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\omega&0&0\\0&0&\omega&0\\0&0&0&\omega^2\end{pmatrix},\quad x\longmapsto\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

これは 3 次元と 1 次元の加群の直和であり、直既約でない。よって、$V=Y$ でなければならず、したがって、$X=0$ である。

$U_0=0$ ゆえ、$x(W_1')$ と $x(W_2')$ は $V(g;\omega)$ の中で直和である。そこで、$V(g;\omega)=x(W_1')\oplus x(W_2')\oplus U_2$ となる部分空間 U_2 をとる。このとき、V は次の 2 つの部分空間 $Y_1,\ Y_2$ の直和になる。

$$Y_1:=Z\cap x^{-1}(W_1')+W_1'+x(W_1'),$$
$$Y_2:=Z\cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1}))+\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})+\mathrm{Ker}(x|_{W_1})+W_2+x(W_2)+U_2$$

実は、$Y_1,\ Y_2$ は V の部分 A-加群になっている。Y_1 が V の部分 A-加群であることは

$$Z\cap x^{-1}(W_1')\xrightarrow[\cong]{x}W_1'\xrightarrow[\cong]{x}x(W_1')\xrightarrow{x}0$$

となることからわかる。Y_2 が V の部分 A-加群であることは、

$$x^2(W_2)\subset\mathrm{Ker}(x|_{V(g:1)}),\quad x(U_2)\subset Z\cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1}))+\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$$

となることからわかる。後者の包含関係は、次のようにして示される。$u_2\in U_2$ に対して $x(u_2)=z_1+z_2+z_3$ $(z_1\in Z\cap x^{-1}(W_1'), z_2\in Z\cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1})),\ z_3\in\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)}))$ と書く。$0=x^3(u_2)=x^2(z_1)$ となるので、$x(z_1)\in\mathrm{Ker}(x|_{W_1})\cap W_1'=\{0\}$ である。よって、$z_1\in Z\cap\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})=\{0\}$ である。

V は直既約であるから、$V=Y_1$ または $V=Y_2$ でなければならない。

・$V=Y_1$ の場合：$V\cong V_3$ となる。

・$V=Y_2$ の場合：$W_1'=0$ となるので、$W_1=\mathrm{Ker}(x|_{W_1})$ が成り立つ。また、

$$V(g;1)=Z\cap x^{-1}(\mathrm{Ker}(x|_{W_1}))+\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)}),\quad V(g;\omega^2)=\mathrm{Ker}(x|_{W_1})+W_2,\quad V(g;\omega)=x(W_2)+U_2$$

が成り立つ。$Z_1:=x(U_2)\cap\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$ とおき、

$$x(U_2)=Z_1\oplus Z_2,\quad \mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})=Z_1\oplus Z_3,\quad V(g;1)=Z_1\oplus Z_2\oplus Z_3\oplus Z_4$$

を満たす部分空間 Z_2,Z_3,Z_4 をとる。さらに $U_2=\mathrm{Ker}(x|_{U_2})\oplus U_2'$ を満たす部分空間 U_2' をとる。

$$U_2'=U_2'\cap x^{-1}(Z_1)+U_2'\cap x^{-1}(Z_2)$$

と書け、$x(Z_4)+x(Z_2)=W_1$ は W_1 の中で直和になっていることから、

$$\begin{aligned}Y_1'&:=U_2'\cap x^{-1}(Z_2)+Z_2+x(Z_2)\\Y_2'&:=\mathrm{Ker}(x|_{U_2})\\Y_3'&:=Z_4+x(Z_4)\\Y_4'&:=W_2+U_2'\cap x^{-1}(Z_1)+x(W_2)+\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})\end{aligned}$$

とおくと、$V=Y_1'\oplus Y_2'\oplus Y_3'\oplus Y_4'$ となることがわかる。$x^3=0$ ゆえ、

$$x^2(Z_2)\subset x(W_1)=\{0\},\ x^2(Z_4)\subset x(W_1)=\{0\},\ x^2(W_2)\subset\mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$$

となる。したがって、各 Y_i' $(i=1,2,3,4)$ は V の部分 A-加群である。V は直既約なので、ある $i=1,2,3,4$ に対して $V=Y_i'$ となる。

・$V=Y_1'$ の場合：$U_2'\cap x^{-1}(Z_2)\xrightarrow[\cong]{x}Z_2\xrightarrow[\cong]{x}x(Z_2)$ であるから、$V=V_1\otimes V_3$ であることがわかる。

・$V=Y_2'$ の場合：$V=V_1^{\otimes 2}$ となる。

・$V=Y_3'$ の場合：$V=V_1\otimes V_2$ となる。

・$V = Y_4'$ の場合：$V(g;1) = \mathrm{Ker}(x|_{V(g;1)})$ となる。系列

$$V(g;\omega^2) \xrightarrow{x} V(g;\omega) \xrightarrow{x} V(g;1) \xrightarrow{x} 0$$

について、冒頭部分と同様の考察を行うことにより、V が $V_1^{\otimes 2} \otimes V_3$, $V_1^{\otimes 2} \otimes V_2$, V_2, $\boldsymbol{k}$, V_1, $V_1^{\otimes 2}$ のいずれかと同型になることがわかる。 □

注意 2. 体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元代数 A に対して、次の２つは同値であることが知られている [1, Theorem A]：

(i) 直既約な有限次元左 A-加群の同型類の個数は有限個である。

(ii) 任意の直既約な左 A-加群は有限次元である。

このことから、任意の直既約な左 $T_{9,\omega}$-加群は有限次元であることがわかり、その結果として、上の命題で挙げた直既約加群のどれか 1 つに同型である。

補題 2.2. 9 次元 Taft 代数 T_{9,ω_3} の Green 環 $\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3})$ は $\chi,\ \psi,\ \rho$ によって生成され関係式

$$\chi^3 = 1,\ \psi^2 = 1 + \chi\rho,\ \rho^2 = \rho(1+\chi+\chi^2),\ \chi\psi = \psi\chi,\ \chi\rho = \rho\chi,\ \psi\rho = \rho\psi = \rho(\chi+\chi^2)$$
$$\chi^* = \chi^2,\ \psi^* = \psi,\ \rho^* = \chi^2\rho$$

によって記述される。したがって、$\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3})$ は可換であり、$*$ はインボリューションである。

Proof.

$$e_2 := x^2\Lambda,\ e_1 := x\Lambda,\ e_0 := \Lambda$$

とおく。また、$\omega = \omega_3$ とおく。$V_1,\ V_2,\ V_3$ を命題 2.1 の直既約加群とする。$V_1^{\otimes 3} = \boldsymbol{k},\ V_1 \otimes V_2 = V_2 \otimes V_1,\ V_1 \otimes V_3 = V_3 \otimes V_1$ であることはすぐにわかる。少し計算すると

$$\begin{aligned}
V_3 \otimes V_2 &= \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_2 + \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_1 + \boldsymbol{k}(\omega e_1 \otimes e_1 - e_0 \otimes e_2) \\
&\quad + \boldsymbol{k}(-\omega e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2) + \boldsymbol{k}(-\omega^2 e_1 \otimes e_1 - e_0 \otimes e_2) + \boldsymbol{k}(-e_0 \otimes e_1) \\
&\cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_1^{\otimes 2} \otimes V_3) \\
V_2 \otimes V_3 &= \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_2 + \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_1 + \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_0 \\
&\quad + \boldsymbol{k}(-\omega e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2) + \boldsymbol{k}(e_2 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) + \boldsymbol{k}e_1 \otimes e_0 \\
&\cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_1^{\otimes 2} \otimes V_3) \\
V_2 \otimes V_2 &= \boldsymbol{k}(-\omega e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2) + (\boldsymbol{k}e_2 \otimes e_2 + \boldsymbol{k}(-\omega^2 e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2) + \boldsymbol{k}(-e_1 \otimes e_1)) \\
&\cong \boldsymbol{k} \oplus (V_1 \otimes V_3) \\
V_3 \otimes V_3 &= \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_2 + \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_1 + \boldsymbol{k}e_2 \otimes e_0 \\
&\quad + \boldsymbol{k}(-\omega e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2) + \boldsymbol{k}(e_2 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) + \boldsymbol{k}e_1 \otimes e_0 \\
&\quad + \boldsymbol{k}(-\omega e_1 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_0) + \boldsymbol{k}(e_1 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1) + \boldsymbol{k}e_0 \otimes e_0 \\
&\cong (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_1^{\otimes 2} \otimes V_3) \oplus V_3
\end{aligned}$$

がわかる。よって、命題2.1 の直既約加群 $V_1,\ V_2,\ V_3$ の同型類をそれぞれ $\chi,\ \rho,\ \psi$ とおくと、環 $\mathrm{Rep}(T_{9,\omega_3})$ は $\chi,\ \psi,\ \rho$ によって生成され、補題の関係式によって記述される。

次に、$\mathrm{Rep}(T_{9,\omega})$ の $*$-構造を決定しよう。

$$S(g) = g^2,\quad S(x) = -xg^2$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
V_1^* &= V_1^{\otimes 2} \\
V_2^* &= \boldsymbol{k}(-\omega^2 e_1^*) + \boldsymbol{k}e_2^* \cong V_2 \\
V_3^* &= \boldsymbol{k}e_0^* + \boldsymbol{k}(-e_1^*) + \boldsymbol{k}(\omega e_2^*) \cong V_1^{\otimes 2} \otimes V_3
\end{aligned}$$

を得る。ここで、V_2^* における $\{e_2^*, e_1^*\}$ は V_2 の基底 $\{e_2, e_1\}$ の双対基底であり、V_3^* における $\{e_2^*, e_1^*, e_0^*\}$ は V_3 の基底 $\{e_2, e_1, e_0\}$ の双対基底である。したがって、$\mathrm{Rep}(T_{9,\omega})$ 上の反環準同型 $*$ は、

$$\chi^* = \chi^2,\ \psi^* = \psi,\ \rho^* = \chi^2\rho$$

によって完全に決定されることがわかる。また、

$$\chi^{**} = (\chi^2)^* = \chi^4 = \chi,\ \psi^{**} = \psi^* = \psi,\ \rho^{**} = \rho^*\chi = \rho$$

が成り立つので、$*$ はインボリューションである。 □

Proof of Theorem 1.1. (1) A'_{C_4} と A''_{C_4} は互いにコサイクル変形である ([11, Proposition 3] または [16, Corollary 1.7] 参照) ことから従う (直接証明することもできる)。

(2) 8 次元以下のホップ代数の Green 環については、[16, Theorem1.5] による。9 次元ホップ代数 T_{9,ω_3} については、命題 2.1 と補題 2.2 による。

(3) は [16, Theorem 1.5] による。 □

謝辞. 当シンポジウムへの講演申し込みを奨めてくださった宇野勝博先生に感謝いたします。また、講演の機会を与えてくださった平野康之先生をはじめとする当シンポジウムの主催者にお礼申し上げます。

参考文献

[1] M. Auslander, *Large modules over Artin algebras*, In *Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg)*, edited by Alex Heller and Myles Tierney, Academic Press, 1976, p.1–17.
[2] 土井幸雄, 竹内光弘, **ホップ代数のコサイクル変形**, 数理解析研究所講究録 **942** (1996) 29–52.
[3] V.G. Drinfel'd, *Quantum groups.* In *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, CA., 1987*, 798–820.
[4] W. Feit, *The representation theory of finite groups.* North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1982.
[5] S. Gelaki, *On pointed ribbon Hopf algebras*, J. of Algebra **181** (1996) 760–786.
[6] Y. Kashina, *Classification of semisimple Hopf algebras of dimension 16*, J. of Algebra **232** (2000) 617–663.
[7] G. Karpilovsky, *Structure of blocks of group algebras*, (Pitman Manographs and survey in Pure and Applied Math.) Longman Scientific & Technical, 1987.
[8] A. Masuoka, *Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element*, Comm. Algebra **22** (1994) 4537–4559.
[9] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension 6, 8*, Israel J. Math. **92** (1995) 361–373.
[10] A. Masuoka, *The p^n theorem for semisimple Hopf algebras*, Proc. of Amer. Math. Soc. **124** (1996) 735–737.
[11] A. Masuoka, *Defending the negated Kaplansky's conjecture*, Proc. of Amer. Math. Soc. **129** (2001) 3185—3192.
[12] D. Nikshych, *K_0-rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Comm. Alg. **26** (1998) 321–342; *Erratum: K_0-rings and twisting of finite dimensional semisimple Hopf algebras*, Comm. Algebra **26** (1998) p.1347.
[13] D. E. Radford, *The order of the antipode of a finite dimesional Hopf algebra is finite*, Amer. J. Math. **98** (1976) 333–355.
[14] P. Schauenburg, *Hopf bigalois extensions*, Comm. Algebra **24** (1996) 3797–3825.
[15] D. Ştefan, *Hopf algebras of low dimension*, J. of Algebra **211** (1999) 343–361.
[16] M. Wakui, *Various structures associated to the representation categories of 8-dimensional non-semisimple Hopf algebras*, to appear in Algebras and Representation Theory.
[17] R. Williams, Ph.D. thesis, Florida State University, 1988 (unpublished).

Department of Mathematics
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan.
E-mail: wakui@math.sci.osaka-u.ac.jp