

Heegaard 図式で表された 4 次元多様体の基本群

木村 優太 (表現論研究室)

基本群は位相空間の代表的な不変量で、空間の穴の情報を代数的に記述する。基本群の計算方法として Van Kampen の定理が知られているが、4 次元多様体に対しては、ハンドル分解から得られる絡み目の図式を利用して計算する方法がある。ここでハンドル分解とは、多様体をハンドルと呼ばれる単純な構造を持つパーツに分解することであり、4 次元多様体の場合、それは Heegaard 図式という絡み目の図式 (Kirby 図式とも呼ばれる) により可視化できる。本論文では 4 次元多様体の Heegaard 図式による基本群の計算方法を理論とともに説明する。[1] では 3 次元多様体の図式による基本群の計算方法が説明されているが、本論文では [2] を参考に 4 次元多様体の場合に記述する。[2] では、図式による基本群の計算の基礎となる [2, 定理 1.25] の証明が略されているが、それについても証明を与える。

§1 では Morse 関数によって、閉多様体がハンドル分解できることを説明する。§2 ではハンドル分解した多様体の基本群の計算方法を説明する。§3 では向き付け可能な 4 次元閉多様体が Heegaard 図式で表現されることを説明し、最後に本論文の主目的である「図式による基本群の計算方法」を説明する。本論文に登場する用語や主張の多くは私がゼミで読んだ [1] に従っている。ただし、§3 の絡み目による 4 次元多様体の表示については [2] や [4] を参考にしている。

多様体に関する基本的な事項は既知とする。本論文では多様体とは可微分多様体を指し、特に断りがない限り、多様体は境界はあってもなくてもよいとする。多様体 M の境界を ∂M と書き、群同型を \approx 、微分同相を \cong で表す。 D^n を n 次元円板、 S^n を n 次元球面とする。ただし、 $D^0 = \mathbf{0}$ 、 $\partial D^0 = \emptyset$ と約束する。 n 次元円板の境界は $\partial D^n = S^{n-1}$ である。

§1. Morse 関数とハンドル分解

M を m 次元閉多様体とし、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ をその上の滑らかな関数とする。点 $p_0 \in M$ の周りの局所座標系 (x_1, x_2, \dots, x_m) について、

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

となるとき、点 p_0 を f の**臨界点**という。この定義は局所座標系の選び方によらない。また、実数 c に対して f のある臨界点 p_0 が存在し、 $c = f(p_0)$ となるとき、 c を f の**臨界値**という。 p_0 が f の臨界点であるとき、 $m \times m$ 行列

$$H_f(p_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$$

を臨界点 p_0 における関数 f の**Hesse 行列**という。 f の Hesse 行列 $H_f(p_0)$ の行列式 $\det H_f(p_0)$ が 0 でないとき、 p_0 を**非退化な臨界点**と呼び、反対に $\det H_f(p_0) = 0$ であるとき、 p_0 を**退化した臨界点**と呼ぶ。臨界点 p_0 が非退化であるか、退化しているかは、 p_0 の周りの局所座標系の取り方によらない。

命題 1.1 ([1, 定理 2.16]). 点 p_0 が $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の非退化な臨界点であるとき, p_0 の周りの局所座標系 (X_1, X_2, \dots, X_m) をうまく選んで, その局所座標系によって表した関数 f の形を標準形

$$f = -X_1^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + f(p_0)$$

にすることができる. ここで, p_0 は (X_1, X_2, \dots, X_m) の原点 $(0, 0, \dots, 0)$ になっている.

ここで現れる λ を非退化な臨界点 p_0 の**指数**と呼ぶ. λ は Hesse 行列 $H_f(p_0)$ を対角化したときの負の対角成分の個数に等しい.

定義 1.2. 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点が全て非退化であるとき, f を **Morse 関数**であるという.

次に, 多様体のハンドル分解を定義する.

定義 1.3. $\lambda = 0, \dots, m$ に対して, $H^\lambda := D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ を m 次元の λ -**ハンドル**といい, λ をその**指数**と呼ぶ. また, $D^\lambda \times \mathbf{0}, \mathbf{0} \times D^{m-\lambda} \subset H^\lambda$ をそれぞれ λ -ハンドル H^λ の**心棒**, **ハンドルの太さを表す $(m - \lambda)$ 次元円板**と呼ぶ. さらに, $\partial D^\lambda \times \mathbf{0}, \mathbf{0} \times \partial D^{m-\lambda} \subset \partial H^\lambda$ をそれぞれ λ -ハンドル H^λ の**接着球面**, **ベルト球面**といい, $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \subset \partial H^\lambda$ を**接着領域**と呼ぶ.

m 次元多様体 M に対して, 滑らかな埋め込み $\varphi: \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M$ を λ -ハンドルの**接着写像**という. ただし, $\lambda = 0$ のとき接着は非交和をとることで定義し, φ を考えない.

定義 1.4. m 次元の**ハンドル体**は次のように帰納的に定義される C^∞ 級多様体のことをいう.

- (i) $H^0 = D^m$ は m 次元のハンドル体である.
- (ii) $j = 1, \dots, i-1$ に対して, H^{λ_j} を m 次元のハンドル, φ_j をその接着写像とする. $N := H^0 \cup_{\varphi_1} H^{\lambda_1} \cup_{\varphi_2} \dots \cup_{\varphi_{i-1}} H^{\lambda_{i-1}}$ が m 次元のハンドル体ならば, C^∞ 級の接着写像 $\varphi_i: \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial N$ によって N に λ_i -ハンドル H^{λ_i} を張り付けたもの

$$N \cup_{\varphi_i} H^{\lambda_i}$$

も m 次元のハンドル体である. ただし, 各ハンドルを張り付けるごとに平滑化を施す.

このように, ハンドルを次々に 0 -ハンドル $H^0 = D^m$ に接着して得られる多様体 $H^0 \cup H^{\lambda_1} \cup \dots \cup H^{\lambda_n}$ が m 次元のハンドル体である.

定理 1.5 ([1, 定理 2.20, 定理 3.4]). (i) 任意の閉多様体に対して Morse 関数が存在する.

- (ii) m 次元閉多様体 M 上に Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられると, f を使って, M に m 次元のハンドル体の構造を入れることができる. このハンドル体のハンドルは, f の臨界点に対応しており, ハンドルの指数は対応する臨界点の指数に等しい.

多様体をハンドル体として表すことを, 多様体の**ハンドル分解**という.

例 1.6. トーラス T^2 とは直積 $S^1 \times S^1$ のことであるが, 各 S^1 上の点を角度 θ, ϕ を用いて表し, T^2 上の点を (θ, ϕ) で表すことにする. よって, θ と $\theta + 2\pi$, ϕ と $\phi + 2\pi$ はそれぞれ同じ点を表す. 定数 R, r を $R > r > 0$ と仮定し, 関数 $f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する:

$$f(\theta, \phi) = (R + r \cos \phi) \cos \theta.$$

この関数 f が Morse 関数であることを確認する.

T^2 上の任意の点で (θ, ϕ) を局所座標系として使える. 今,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -(R + r \cos \phi) \sin \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = -r \sin \phi \cos \theta$$

なので、関数 f の臨界点は、

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \iff \sin \theta = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \iff \sin \phi = 0 \text{ または } \cos \theta = 0$$

より、 $(\theta, \phi) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ である。また、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -(R + r \cos \phi) \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = r \cos \phi \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi} = r \sin \phi \sin \theta$$

なので、4 つの臨界点 p_i ($i = 1, \dots, 4$) を入れたときの値は全ての i で、 $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(p_i) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}(p_i) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi}(p_i) = 0$ である。よって、全ての i に対して $\det H_f(p_i) \neq 0$ となり、 f の臨界点が全て非退化であることが分かった。

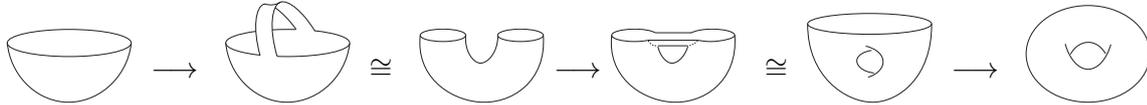
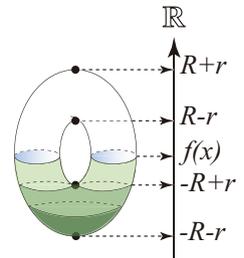
各臨界点の指数も求める。 $R > r$ に注意すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}((0, 0)) = -(R+r) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}((0, \pi)) = -(R-r) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}((\pi, 0)) = R+r > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}((\pi, \pi)) = R-r > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}((0, 0)) = -r < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}((0, \pi)) = r > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}((\pi, 0)) = r > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}((\pi, \pi)) = -r < 0.$$

命題 1.1 により臨界点 $(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ の指数は順に、 $2, 1, 0, 1$ である。

f の関数値の低いところから T^2 の様子の追跡してみる。すなわち、右図の T^2 を下から追跡する。 f の臨界値は関数値の低い順に $-R-r, -R+r, R-r, R+r$ であり、黒点は臨界点の位置を表している。図の T^2 を下からスライスしていくと、 f の関数値が1つの臨界値を通過するごとに、その臨界点の指数に応じたハンドルを接着し、微分同相にそのハンドル体を引き伸ばすことで T^2 が復元できていることが分かる。よって、 T^2 にハンドル体の構造 $H^0 \cup H^1 \cup H^1 \cup H^2$ が入る。下図は復元の過程を表しており、矢印はハンドルの接着を表している。



定義 1.7. M を m 次元多様体、 J を開区間とする。 M の微分同相写像の族 $\{h_t\}_{t \in J}$ が M のアイソトピーであるとは、次の2つの条件が成り立つことである。

- (i) 開区間 J は閉区間 $[0, 1]$ を含み、 $t \leq 0$ のとき h_t は t によらず一定で M の恒等写像である：
 $h_t = h_0 = \text{id}_M$ 。また、 $t \geq 1$ のときも h_t は t によらず一定で h_1 に等しい： $h_t = h_1$ 。
- (ii) $H(x, t) = (h_t(x), t)$ により定義される写像 $H: M \times J \rightarrow M \times J$ は微分同相写像である。この意味で h_t はパラメータ t に滑らかに依存する。

命題 1.8 ([1, 定理 3.30]). m 次元多様体 N に λ -ハンドル H^λ が接着写像 $\varphi: \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial N$ で付いているとし、さらに ∂N のアイソトピー $\{h_t\}_{t \in J}$ が与えられているとする。このとき、 λ -ハンドルの接着領域 $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ をアイソトピーにより動かして、新たな接着写像 $h_1 \circ \varphi$ を持ったハンドル体 $N \cup_{h_1 \circ \varphi} H^\lambda$ を構成すると、これは λ -ハンドルを滑らせる前のハンドル体 $N \cup_\varphi H^\lambda$ に微分同相である。

命題 1.9 ([1, 定理 3.34]). m 次元多様体 N に λ -ハンドルが付いて多様体 N' となり、さらにその上に $(\lambda + 1)$ -ハンドルが付いて多様体 N'' が得られているとする：

$$N' = N \cup_\varphi D^\lambda \times D^{m-\lambda}, \quad N'' = N' \cup_\varphi D^{\lambda+1} \times D^{m-\lambda-1}.$$

このとき、 $\partial N'$ のなかで λ -ハンドルのベルト球面 $\mathbf{0} \times \partial D^{m-\lambda}$ と $(\lambda+1)$ -ハンドルの接着球面 $\partial D^{\lambda+1} \times \mathbf{0}$ が唯 1 点 p で**横断的に**交わるならば、すなわち $T_p(\mathbf{0} \times \partial D^{m-\lambda}) + T_p(\partial D^{\lambda+1} \times \mathbf{0}) = T_p \partial N'$ が成り立つならば、 N'' は N に微分同相である。

命題 1.9 における λ -ハンドルと $(\lambda+1)$ -ハンドルのように互いに消去し合うハンドルのペアを**適切なペア**と呼ぶ。

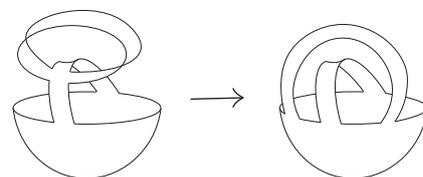
命題 1.10 ([1, 補題 3.33, 定理 3.35]). 任意のハンドル体において、まず 0-ハンドルの非交和があり、そこに 1-ハンドルの非交和が付き、その後 2-ハンドルの非交和が付き、..., というように、ハンドルの付き方を指数の小さい方から順に接着しているように直すことができる。

また、 m 次元閉多様体 M が連結なら、 M 上の Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ をうまくとって、指数 0 の臨界点は 1 個しかなく、指数 m の臨界点も 1 個しかないようにすることができる。

このような状態のハンドル体を**整列されたハンドル体**と呼ぶ。

例 1.11.

例 1.6 で与えた T^2 のハンドル分解における、0-ハンドルと 1-ハンドルのみからなるハンドル体は、命題 1.8 により 1-ハンドルを滑らせると右図のようにできる。ただし、左は例 1.6 の部分ハンドル体で、右は整列されたハンドル体である。



§2. ハンドル体の基本群

X を位相空間とする。区間 $I = [0, 1]$ から X への連続写像 $f: I \rightarrow X$ を**道**といい、 $f(0)$ を道 f の**始点**、 $f(1)$ を道 f の**終点**という。2つの道 f, g が $f(1) = g(0)$ を満たすとき、 f の終点と g の始点を結ぶことで新たな道 $f \cdot g: I \rightarrow X$ が

$$f \cdot g(t) = \begin{cases} f(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ g(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義される。これを**道の積**という。さらに、道 f の始点と終点が一致して $x_0 \in X$ であるとき、 $f: (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ を (X, x_0) の**ループ**、 x_0 を**基点**という。さらに Y も位相空間とし、 $f, g: X \rightarrow Y$ を 2つの連続写像とする。 f が g に**ホモトピック**であるとは、連続写像 $H: X \times I \rightarrow Y$ が存在して

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad (x \in X)$$

が成り立つことである。 f が g にホモトピックであることを $f \simeq g$ という記号で表す。また、 $x_0 \in X$ を基点とする 2つのループ f, g が (始点、終点を動かさず) ホモトピックであるとは、連続写像 $H: (I \times I, \partial I \times I) \rightarrow (X, x_0)$ が存在して、

$$H(t, 0) = f(t), \quad H(t, 1) = g(t) \quad (t \in I)$$

が成り立つことである。このときも同様に $f \simeq g$ と表す。

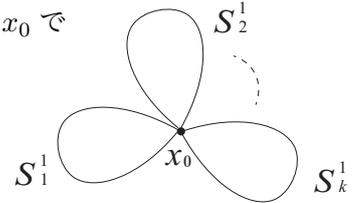
関係 \simeq は、 (X, x_0) のループ全体の集合の同値関係になっており、この関係による同値類 (ホモトピー類) の集合を $\pi_1(X, x_0)$ で表す。ループ f の属するホモトピー類を $[f]$ と書く。 $[f]$ と $[g]$ の積 $[f] \cdot [g]$ を $[f \cdot g]$ と定義することで $\pi_1(X, x_0)$ は群になる。これを (X, x_0) の**基本群**という。 X が弧状連結なとき、任意の $x_0, x_1 \in X$ に対して $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ となる。そのため簡単に $\pi_1(X)$ と書くことができる。連続写像 $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ は準同型写像 $\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ を誘導する。また、位

相空間 X, Y に対して、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ が存在して、 $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ が成り立つとき、 X と Y は**ホモトピー同値**であるといい、記号で $X \simeq Y$ と書く。弧状連結な位相空間 X, Y がホモトピー同値ならば、 $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ である。この事実を含め、基本群に関する結果については、例えば [3] を参照してほしい。

基本群を記述するために、群の語による表示について説明する。 k 個の文字 x_1, x_2, \dots, x_k を考える。この文字の負の指数も許す累乗からなる長さが有限な文字列を**語**という。そして、2つの語を「並べてくっつける」という操作で積を入れる。ただし、同じ文字の累乗が隣り合ったときのみ指数法則で計算し、文字の 0 乗は単位元 1 と同一視する。こうして語の集合は群となる。これを生成元 x_1, x_2, \dots, x_k を持つ自由群といい、記号として $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ と書く。

補題 2.1 ([1, 例 5.5]). k 個の円周 $S_1^1, S_2^1, \dots, S_k^1$ をとり、それらを 1 点 x_0 でくっつけた図形を k 個の円周の**ブーケ**といい、 $\bigvee_{i=1}^k S_i^1$ と書く。このとき、

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^k S_i^1, x_0\right) \simeq \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$$



である。ただし、各円周 S_i^1 には任意に向きを入れ、文字 x_i を対応させる。すなわち、この同型で $[f] \in \pi_1(\bigvee_{i=1}^k S_i^1, x_0)$ は、ループ f が基点 x_0 を出発してから円周を (向きを考慮して) n 周するごとに、左からその円周に対応する文字の n 乗を並べてできる語に対応している。

ハンドル体の基本群は次のように計算される [1].

定理 2.2. N を 1 個の 0-ハンドル, k 個の 1-ハンドル, m 個の 2-ハンドルからなるハンドル体とする。このとき、2-ハンドルの接着写像から決まる語 r_1, r_2, \dots, r_m で生成される自由群 $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle$ の正規部分群 $\mathcal{N}(r_1, r_2, \dots, r_m)$ に対して、

$$\pi_1(N) \simeq \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle / \mathcal{N}(r_1, r_2, \dots, r_m)$$

が成立する。ただし、文字 x_1, x_2, \dots, x_k にはそれぞれ 1-ハンドルが対応する。

この定理 2.2 を証明するために、次の補題を用意する。

補題 2.3 ([1, 定理 5.6]). X を位相空間とする。連続写像 $h: \partial D^n \rightarrow X$ ($n \geq 2$) により X に D^n を接着して得られる空間 $X \cup_h D^n$ を考え、基点 $x_0 \in h(\partial D^n)$ をとる。このとき包含写像 $i: (X, x_0) \rightarrow (X \cup_h D^n, x_0)$ から誘導される準同型写像 $i_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_h D^n, x_0)$ に関して次の 2 つが成立する。

- (i) $n \geq 3$ ならば同型である。
- (ii) $n = 2$ ならば全射であり、その核 $\ker(i_*)$ は、 $h: \partial D^2 = S^1 \rightarrow X$ をループ h と考えたときの $[h]$ で生成される $\pi_1(X, x_0)$ の正規部分群 $\mathcal{N}([h])$ である。

準同型定理から (ii) は $\pi_1(X \cup_h D^2, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}([h])$ と言い換えられる。証明ではこの形を用いる。補題 2.3 をハンドル体に適用するために、セル複体と呼ばれる空間を定義する。

定義 2.4. i 次元円板 D^i を**ふちつき i セル**といい、 e^i と表すことにする。このとき、**セル複体**は次のように帰納的に定義される。

- (i) $X^0 := e_1^0 \sqcup e_2^0 \sqcup \dots \sqcup e_{k_0}^0$ は 0 次元セル複体である。

- (ii) $i \geq 1$ につき $i-1$ 次元以下のセル複体が定義されたとし, Y を $i-1$ 次元以下のセル複体とする. 連続写像 $h_i : \partial \bar{e}_1^i \sqcup \partial \bar{e}_2^i \sqcup \cdots \sqcup \partial \bar{e}_{k_i}^i \rightarrow Y$ によって, Y に $\bar{e}_1^i \sqcup \bar{e}_2^i \sqcup \cdots \sqcup \bar{e}_{k_i}^i$ を張り付けたもの

$$X^i := Y \cup_{h_i} (\bar{e}_1^i \sqcup \bar{e}_2^i \sqcup \cdots \sqcup \bar{e}_{k_i}^i)$$

を i 次元セル複体といい, h_i を**接着写像**という.

セル複体 X に含まれる i 次元以下のセル全体の和集合 X^i を X の i 切片という.

定理 2.2 の証明. ハンドル体を構成する各ハンドルは $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ という形をしていたが, このハンドルの太さを表す円板をホモトピー同値に縮めて心棒へと変形させることができる. 心棒は λ 次元円板だったので, これをふちつき λ セルと思うことでハンドル体はセル複体へと変形される. [1, 定理 4.18] により, 任意のハンドル体 N' に対して, N' にホモトピー同値であるセル複体 X' が存在して, N' の i -ハンドルと X' の i セルは 1 対 1 に対応する.

したがって, ハンドル体 N は 0 セルが 1 個, 1 セルが k 個, 2 セルが m 個のセル複体 X とホモトピー同値である. よって, $\pi_1(N) \approx \pi_1(X)$. 今, セル複体 X の 0 セルが 1 個であることと 1 セルが k 個であることから 1 切片 X^1 は k 個の円周のブーケである. よって補題 2.1 から,

$$\pi_1(X^1) \approx \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle.$$

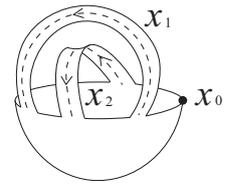
基点として, ブーケを構成する全ての円周の共通部分 x_0 をとり, 補題 2.3 の (ii) を m 回適用すると,

$$\pi_1(X^2) \approx \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle / \mathcal{N}(r_1, r_2, \dots, r_m).$$

ここで, 各 r_i は 2 セルの接着写像 $h_2 : \partial \bar{e}_1^2 \sqcup \partial \bar{e}_2^2 \sqcup \cdots \sqcup \partial \bar{e}_m^2 \rightarrow X^1$ の制限写像 $h_2|_{\partial \bar{e}_i^2} : \partial \bar{e}_i^2 \rightarrow X^1$ の対応規則で $\partial \bar{e}_i^2$ を $X^1 \cup (\partial \bar{e}_1^2 \sqcup \partial \bar{e}_2^2 \sqcup \cdots \sqcup \partial \bar{e}_{i-1}^2)$ に接着する写像 $r'_i : \partial \bar{e}_i^2 \rightarrow X^1 \cup (\partial \bar{e}_1^2 \sqcup \partial \bar{e}_2^2 \sqcup \cdots \sqcup \partial \bar{e}_{i-1}^2)$ の属するホモトピー類である. 最後に, 補題 2.3 の (i) から定理が示された. \square

任意の連結な閉多様体は, 命題 1.5, 命題 1.10 によって 0-ハンドルを 1 個しかないようにハンドル分解できるので, 定理 2.2 を適用できる.

例 2.5. 例 1.11 で考えた整列されたハンドル体に蓋をするように 2-ハンドルを接着すると, トーラス T^2 のハンドル分解が得られる. そこで, 各 1-ハンドルの心棒の向きと基点 x_0 を右図のようにとり, 文字 x_1, x_2 をそれぞれ右図のように 1-ハンドルに対応させる. 2-ハンドルの接着写像 φ を基点 x_0 を始点とし, 手前に進むループと考える. すなわち, 最初に文字 x_1 に対応する 1-ハンドルにぶつかるようなループが φ である. このハンドル体に定理 2.2 を適用すると, $\pi_1(T^2)$ が次のように求められる:



$$\pi_1(T^2) \approx \langle x_1, x_2 \rangle / \mathcal{N}([\varphi]) \approx \langle x_1, x_2 \rangle / \mathcal{N}(x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}) \approx \mathbb{Z}^2.$$

§3. Heegaard 図式で表された 4 次元多様体の基本群

Heegaard 図式は, 多様体のハンドル分解を利用して, イメージし難い 3 次元や 4 次元の向きづけ可能な閉多様体を絡み目の図式によって表現する. ここでは定理 2.2 を用いて, 与えられた絡み目の図式から 4 次元多様体の基本群が計算できることを説明する.

M_1, M_2 を向き付けられた m 次元多様体とし, $f_1 : D^{m-1} \rightarrow \partial M_1$ を向きを保つ滑らかな埋め込み, $f_2 : D^{m-1} \rightarrow \partial M_2$ を向きを逆にする滑らかな埋め込みとする. このとき張り合わせ写像 $\psi := f_2 \circ f_1^{-1} : f_1(D^{m-1}) \rightarrow f_2(D^{m-1})$ により得られる多様体 $M_1 \cup_\psi M_2$ を M_1 と M_2 の**境界和**とい

い, $M_1 \natural M_2$ と表す. ∂M_1 と ∂M_2 が連結であるとき, 境界和 $M_1 \natural M_2$ には M_1 の向きと M_2 の向きを同時に拡張する向きが入り, その微分同相類は埋め込み f_1, f_2 の取り方によらず M_1 と M_2 のみから決まる [2, p.14]. 多様体 M の n 個のコピーの境界和を $\natural_n M$ と表す. ただし, $\natural_0 M = D^m$ と約束する.

M を連結で向き付け可能な 4 次元閉多様体とする. すると, 命題 1.5, 命題 1.10 から Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ をうまく選んで次のようにハンドル分解できる.

$$M = H^0 \cup (H_1^1 \natural H_2^1 \natural \cdots \natural H_{k_1}^1) \cup (H_1^2 \natural H_2^2 \natural \cdots \natural H_{k_2}^2) \cup (H_1^3 \natural H_2^3 \natural \cdots \natural H_{k_3}^3) \cup H^4.$$

このハンドル分解において, 0-ハンドルと 1-ハンドルを全て合わせたものを N^1 とすると

$$N^1 \cong \natural_{k_1}(S^1 \times D^3)$$

である. このように N^1 は 1-ハンドルの個数で微分同相類が決まる.

次に 0-ハンドルから 2-ハンドルまでを全て付けた部分ハンドル体を N^2 とする:

$$N^2 = N^1 \cup (H_1^2 \natural H_2^2 \natural \cdots \natural H_{k_2}^2).$$

N^2 の微分同相類は 1-ハンドルの個数と 2-ハンドルの全ての接着写像 $\varphi_i: \partial D^2 \times D^2 \rightarrow \partial N^1$ で決まるが, この接着写像 φ_i のアイソトピー類は接着球面の行き先 $\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{0})$ とその「枠」で決まる [1, p.197]. ここで, 3 次元多様体 ∂N^1 のなかの滑らかな単純閉曲線 C の**枠**とは, C に沿った 2 本のベクトル場 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の組 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ であって, C 上の任意の点で C の接ベクトルと 1 次独立であり, かつ互いに 1 次独立であるものをいう. C の 2 つの枠 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ と $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が C を動かさないアイソトピーで移り合うとき, それらは**同値**な枠であるという. 枠の同値類が 1 つ指定された閉曲線 C を, **枠つき閉曲線**という.

単位円板 D^2 のなかの, 原点 $\mathbf{0}$ を始点とし互いに直交する 2 本の単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を考える. 接着写像 $\varphi_i: \partial D^2 \times D^2 \rightarrow \partial N^1$ が与えられたとき, 接着領域 $\partial D^2 \times D^2$ のなかの $\partial D^2 \times \mathbf{0}$ の標準的な枠 $\{\partial D^2 \times \mathbf{e}_1, \partial D^2 \times \mathbf{e}_2\}$ を φ_i によって移すことで, 単純閉曲線 $\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{0})$ の枠 $\{\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{e}_1), \varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{e}_2)\}$ が得られる. このとき N^2 の微分同相類は, 3 次元多様体 ∂N^1 のなかの枠つき閉曲線 $\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{0})$ と 1-ハンドルの個数によって決まる. 1-ハンドルの個数から決まる多様体 N^1 と枠つき閉曲線 $C_i := \varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{0})$ との組 $(N^1; C_1, C_2, \dots, C_{k_2})$ を 4 次元多様体 M の **Heegaard 図式**と呼ぶ. さらに次が成り立つ.

定理 3.1 ([1, 補題 5.20]). N^2 によって, もとの 4 次元多様体 M の微分同相類が決まる. したがって, 向き付け可能な 4 次元閉多様体の微分同相類は Heegaard 図式で一意的に決まる.

次に 0-ハンドルの境界 $\partial H^0 = S^3$ における 1-ハンドルと 2-ハンドルの様子を $S^3 (\cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\})$ 内に描いて視覚的に 4 次元多様体を表現する. このとき重要なのが, 2-ハンドルの接着球面とベルト球面が S^1 であることと, 命題 1.10 からそれらは非交和であることである. Heegaard 図式は, 2-ハンドルの接着球面とベルト球面を描くので, その図式は絡み目による図式となる. ここで**絡み目**とは S^3 のなかの, 有限個の互いに交わらない滑らかな単純閉曲線の和集合のことである. 唯一つの単純閉曲線からなる絡み目を**結び目**という.

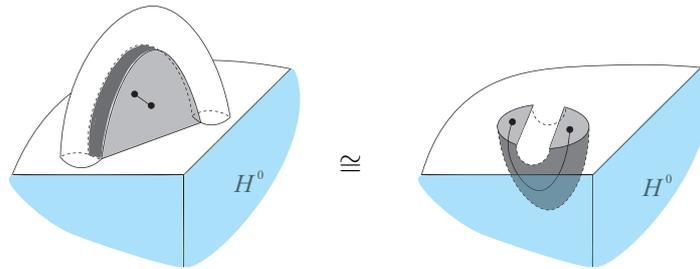
まずは 1-ハンドルについて考える. 1-ハンドルの接着領域 $\partial D^1 \times D^3$ は 2 つの 3 次元円板である. この接着領域の ∂H^0 への埋め込み $\varphi_i(\partial D^1 \times D^3)$ を S^3 内に描く. ただし 2 つの円板の境界は, 原点に配置した標準座標に関して写像 $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ により同一視する. そして, 2 つの 3 次元円板が同じ 1-ハンドルを表していることを強調するために, この 2 つを図のように点線で結ぶ.



この1-ハンドルの表現を、2-ハンドルのベルト球面である点付き結び目による表現に言い換える。命題 1.9 より 1-ハンドルと 2-ハンドルの適切なペアは互いにハンドルを消去する：

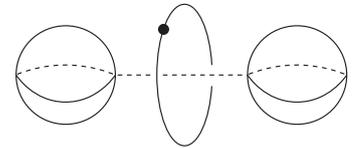
$$M \cup H^1 \cup H^2 \cong M. \quad (*)$$

今、 M は連結であるので、1-ハンドルを付けるということは、適切なペアである 2-ハンドルを取り除くことと同値である。この 2-ハンドルの太さを表す 2 次元円板は、 ∂H^0 内の 2 次元円板の内部を H^0 の内部に沈めることで得られる、境界が自明な結び目である 2 次元円板である。多様体 M が 3 次元の場合の微分同相 (*) の様子は次図である。



ただし、灰色の部分が 2-ハンドルであり、端点が黒点である曲線はその太さを表す 1 次元円板である。すなわち、黒点は 2-ハンドルのベルト球面である。上図から分かるように太さを表す 1 次元円板は、右側では境界が ∂H^0 上、内部は H^0 に沈んでいる。よって、この太さを表す 1 次元円板を「太らせて」 H^0 から取り除くと、図の左のような H^0 に 1-ハンドルを接着したものと微分同相になる。4 次元多様体では上図の黒点のペアが 2-ハンドルのベルト球面 $\partial D^2 = S^1$ となり、太さを表す 2 次元円板はその内部も含めた円板である。3 次元多様体のときの「太らせる」という用語を「近傍をとる」と言い換えると、次の命題が言える。

命題 3.2 ([2, 命題 3.27]). 4 次元多様体に右図の 3 次元円板のペアに沿って 1-ハンドルを付けて得られる多様体は、右図にある点付き円周を境界とする円板を、境界を固定したまま多様体の内部に沈めて得られる曲面の近傍の補空間と微分同相である。ただし、点付き円周は (適切なペアである) 2-ハンドルのベルト球面であり、 S^3 内の自明な結び目である。



2-ハンドルは、接着球面の埋め込み $C_i = \varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{0})$ の ∂H^0 内の様子を S^3 内に描くことにより表すことができる。 C_i は ∂N^1 への埋め込みであり、例えば 2-ハンドルが 1-ハンドルを跨いで接着している場合、 C_i は ∂H^0 内で結び目にならない。しかし、微分同相 (*) で N^1 を変形することで、 C_i は ∂H^0 上にあるとみなせる。そのため、1-ハンドルを点付き結び目で表しているとき、図式として描く各 C_i は結び目である。ただし、3 次元円板のペアで 1-ハンドルを表しているときは、埋め込み C_i の 1-ハンドルを通らない部分を描くことで 2-ハンドルを表現する。

各閉曲線 C_i の枠は「まつわり数」と呼ばれる整数で指定することができる。 $K_1, K_2 \subset S^3$ を互いに交わらない向きづけられた結び目とし、 K_1, K_2 はある平面に射影して得られる射影図で表されているとする。 a_1, \dots, a_m を射影図に現れる K_1 と K_2 の交点のうち、 K_1 が上側を通るもの全体とする。各 $k = 1, \dots, m$ に対し $\varepsilon(a_k) \in \{1, -1\}$ を、交点において上を通るものから順に向きを表すベクトルをとったとき、それらが \mathbb{R}^2 の向きに適合するなら $+1$ 、そうでないなら -1 と定義する。このとき、

$$\text{Link}(K_1, K_2) := \sum_{k=1}^m \varepsilon(a_k)$$

を K_1 と K_2 のまつわり数という。

C_i に勝手に向きを定める. この結び目の枠は $\{\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{e}_1), \varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{e}_2)\}$ であった. C_i をベクトル場 $\varphi_i(\partial D^2 \times \mathbf{e}_1)$ の方向にずらして得られる結び目を新たに C'_i とする. C'_i には C_i の向きから自然に誘導される向きを与える. このとき $\text{Link}(C_i, C'_i)$ は枠の同値類を指定する.

1-ハンドル H_j^1 を表す点付き結び目を L_j と書くことにすると, 向き付け可能な 4 次元閉多様体は, 点付き結び目と枠付き結び目による絡み目の図式 $(L_1, \dots, L_{k_1}, C_1, \dots, C_{k_2})$ で表現できる.

例 3.3. $S^2 \times T^2$ の Heegaard 図式を求める. まず, S^2 の南半球を H_- , 北半球を H_+ とする. そして, トーラス T^2 には例 1.11 で考えた整列されたハンドル分解

$$T^2 \cong H^0 \cup H_1^1 \cup H_2^1 \cup H^2$$

を与える. 平滑化を施すことで $(D^{\lambda_1} \times D^{2-\lambda_1}) \times (D^{\lambda_2} \times D^{2-\lambda_2}) \cong D^{\lambda_1+\lambda_2} \times D^{4-(\lambda_1+\lambda_2)}$ という微分同相があるので, 直積 $H_- \times H^0, H_- \times H_1^1, H_- \times H_2^1, H_- \times H^2, H_+ \times H^0, H_+ \times H_1^1, H_+ \times H_2^1, H_+ \times H^2$ はそれぞれ 0-ハンドル, 1-ハンドル, 1-ハンドル, 2-ハンドル, 2-ハンドル, 3-ハンドル, 3-ハンドル, 4-ハンドルになる. これらを $h^0, h_1^1, h_2^1, h_1^2, h_2^2, h_1^3, h_2^3, h^4$ と書くことにする. この i -ハンドルと指数のより低いハンドルの和集合との共通部分は $\partial D^i \times D^{4-i}$ と微分同相なので確かに各ハンドルは接着領域でハンドル体に接着している. よって,

$$h^0 \cup h_1^1 \cup h_2^1 \cup h_1^2 \cup h_2^2 \cup h_1^3 \cup h_2^3 \cup h^4$$

が $S^2 \times T^2$ のハンドル分解であることが分かる. 1-ハンドルの接着領域と 2-ハンドルの接着球面を ∂h^0 へ埋め込んだ様子は, 右の 1 番上の図ようになっている [2, 命題 3.16]. この図における 1-ハンドルの接着領域と, 1-ハンドルにも跨ぐように接着されていた 2-ハンドルの接着写像 (図における 3 次元円板を含む結び目) は,

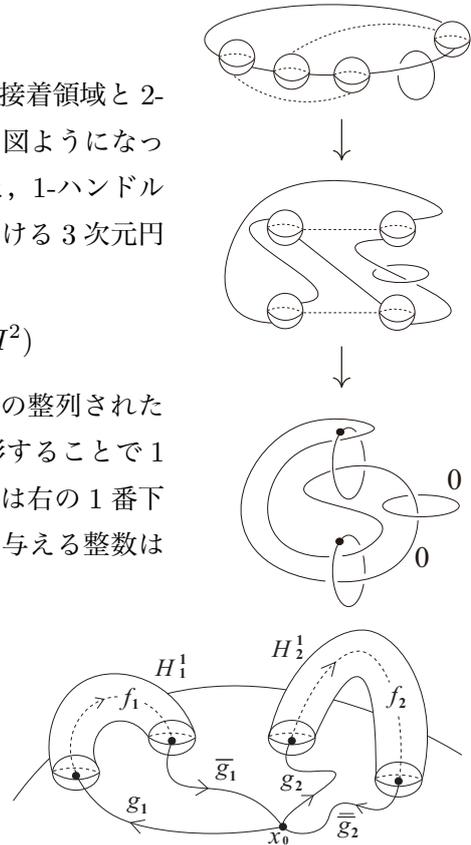
$$(h^0 \cup h_1^1 \cup h_2^1) \cap h_1^2 = H_- \times ((H^0 \cup H_1^1 \cup H_2^1) \cap H^2)$$

において, H_- を $\mathbf{0}$ にしたものを考えればよいので, 例 1.11 の整列されたハンドル体の様子から分かる. 接着写像をアイソトピーで変形することで 1 番上の図を変形すると, 命題 3.2 から点付き結び目による図式は右の 1 番下の図のようになる. ただし, ハンドル体の構成の仕方から枠を与える整数は共に 0 である.

最後に, Heegaard 図式 $(L_1, \dots, L_{k_1}, C_1, \dots, C_{k_2})$ で表された 4 次元多様体の基本群を計算する. 定理 2.2 によると基本群は 1-ハンドルと 2-ハンドルの情報のみで決まるので, Heegaard 図式からも読み取ることができる. まず, 各 1-ハンドル H_i^1 の心棒に任意に向きを入れる. その向きに従って心棒を進み, 2 つの接着球面をそれぞれ始点, 終点とする N^1 の道 f_i を考える. さらに, 基点 $x_0 \in N^1 - (H_1^1 \sqcup H_2^1 \sqcup \dots \sqcup H_{k_1}^1)$ をとり, x_0 を始点, $f_i(0)$ を終点とする N^1 の道 g_i と, $f_i(1)$ を始点, x_0 を終点とする N^1 の道 \bar{g}_i を考える. ただし, ホモトピー同値 $N^1 \simeq X^1$ により N^1 を変形したとき, g_i と \bar{g}_i はともに 1 点に潰れるような道を選ぶ. そして, $x_i = [g_i \cdot f_i \cdot \bar{g}_i]$ とすると,

$$\pi_1(N^1) \approx \pi_1(X^1) \approx \langle x_1, x_2, \dots, x_{k_1} \rangle$$

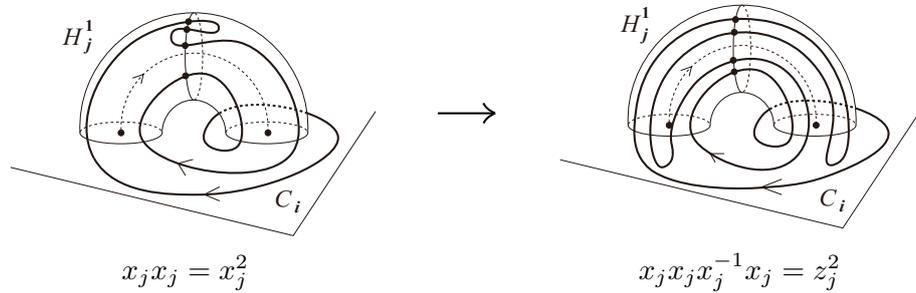
となる. ハンドルの接着写像 φ_i の制限 $\varphi_i|_{(\partial D^2 \times \mathbf{0})}$ を再び φ_i と書くことにすると, 知りたい正規部分群は補題 2.3 の (ii) から $\mathcal{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_2})$ である. ただし, 接着写像 φ_i は必要に応じて先程の同



様に道 g'_i で x_0 と結び、基点 x_0 のループと思う。そして、そのループ φ_i の属するホモトピー類を再び φ_i と書いている。 $\mathcal{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_2})$ と Heegaard 図式の間には次の関係がある。

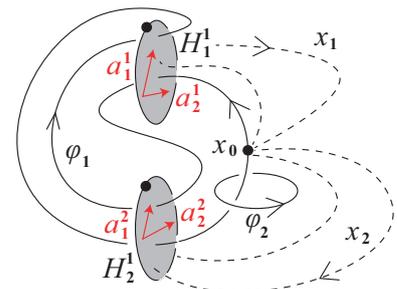
定理 3.4. 上述の状況の下で、各点付き結び目 L_j に対して、それを境界とする円板を 1 つとる。ただし、各円板は結び目 C_i とは共有点を持たないか、あるいは横断的に交わるようにとる。さらに、各円板と各 C_i に任意に向きを与える。そして C_i が 1 周する間に、円板と C_i の交点において、円板の向きを表すベクトルと C_i の向きを表すベクトルをこの順に並べたとき、それが \mathbb{R}^3 の向きに適合するならば円板に対応する文字 x_j を、適合しないなら x_j^{-1} を交差する順に左から並べる。こうしてできた語 r_1, r_2, \dots, r_{k_2} で生成される正規部分群 $\mathcal{N}(r_1, r_2, \dots, r_{k_2})$ は $\mathcal{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_2})$ と一致する。

証明の概略. この定理は、アイソトピーで接着写像を変形することで「 X^1 において、接着球面の埋め込み C_i に対応するループが x_j に対応する円周を何周するか」を「 C_i が H_j^1 のベルト球面と何回交わるか」に言い換えることができるという事実に基づく。次図は命題 1.8 によって接着写像を変化させた様子である。



[1, 定理 4.25] によると 2-ハンドルの接着球面と 1-ハンドルのベルト球面は横断的に有限個の点で交わるようにアイソトピーで接着写像を変形できる。この変形を施した後、2つの道を繋げる積とは逆に、ループ C_i を接着球面とベルト球面の有限個の交点を始点、終点とし、ベルト球面を通過しない道に分割する。すると分割された道は有限個なので、それぞれに上図のような変形を施す。変形後の接着写像が表すホモトピー類をそれぞれ φ'_i とすると、 $\mathcal{N}(r_1, r_2, \dots, r_{k_2}) = \mathcal{N}(\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_{k_2})$ であるので定理 3.4 を得る。 \square

例 3.5. 例 3.3 で与えた $S^2 \times T^2$ の Heegaard 図式に、右図のように円板と基点 x_0 、結び目の向きを入れ、円板の向きを $\{a_1^i, a_2^i\}$ ($i = 1, 2$) で与える。すると、 $\pi_1(h^0 \cup h_1^1 \cup h_2^1) \approx \langle x_1, x_2 \rangle$ である。接着写像 φ_1 は基点 x_0 を出発し、結び目を辿っていけば、 $x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ に対応している。そして φ_2 は円板を通過しないので、単位元 1 に対応する。したがって、定理 3.4 から $\mathcal{N}(\varphi_1, \varphi_2) \approx \mathcal{N}(x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, 1) = \mathcal{N}(x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})$ であり、定理 2.2 から $\pi_1(S^2 \times T^2) \approx \langle x_1, x_2 \rangle / \mathcal{N}(x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}) \approx \mathbb{Z}^2$ である。ただし、上図における点線は、この基本群の生成元を代表するループを表している。



参考文献

- [1] 松本幸夫, 『Morse 理論の基礎』, 岩波書店, 2005, 2019 (オンデマンド版).
- [2] 遠藤久顕・早野健太, 『4次元多様体とファイバー構造』, 共立出版, 2024.
- [3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [4] S. Akbulut, *4-Manifolds*, <https://www-users.cse.umn.edu/~akhmedov/akbulut.lec.pdf>.