2006年2月7日

集合と位相演義 特別付録(問題編)

概念の定着度チェック

- まず、何も見ずに解いてみて下さい。各問題は2分程度で解答できることが望ましい。
- 略解と照らし合わせて、各自で答案をチェックして下さい。8割程度できていれば十分です。できた問題が2割を下回るようなら、もう一度位相空間の勉強をやりなおす必要があるかもしれません。
- できなかった問題を復習しておいて下さい。

約束

❶ ことわりがない限り、$\mathbb{R}^n$ には通常の位相 (またはユークリッド距離) が入っているものと約束する。また、位相空間 X について、その部分集合を位相空間として考える場合には、X の部分空間としての位相 (相対位相) が入っているものと約束する。

❷ ことわりがない限り、位相空間 X, Y について、直積 $X \times Y$ には積位相が入っているものとする。

❸ 次の記号を用いる。

$S^n = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$

$D^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$

$\mathring{D}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = S^n/\sim$ (n 次元実射影空間)、ここで、$\sim$ は

$$\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{q} \iff \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \text{ または } \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{q}$$

によって定義される S^n 上の同値関係である。

1. 集合 X に対する位相の定義を書け。また、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における開集合の定義を書け。

2. 距離空間 (X, d) から定まる X の位相 $\mathcal{O}_d$ とは何か。その定義を書け。

3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における閉集合とは何か。その定義を書け。

4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、A を X の部分集合とする。A の $(X, \mathcal{O})$ における相対位相（部分空間としての位相）とは何か。その定義を書け。

5. X を位相空間とする。A が X の開集合 (resp. 閉集合) のとき、部分空間 A の開集合 (resp. 閉集合) はまた X の開集合 (resp. 閉集合) となることを示せ。

6. X を位相空間とし、A を X の部分集合とする。A の X における内部 $\mathrm{Int}\,A$ の定義、および、A の X における閉包 $\overline{A}$ の定義を書け。また、内部と閉包はどのような関係になっているか、書け。

7. 位相空間 X の部分集合 A が稠密であるとはどのようなときをいうのか、その定義を述べよ。

8. 位相空間 X の点 x に対して、x の X における近傍とは何か。その定義を書け。

9. 位相空間に対する開基とは何か。その定義を述べよ。

10. $\mathbb{R}^n$ の開基であって、可算個の元からなるものを1つ与えよ。

11. 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、その部分集合族 $\mathcal{S} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ を考える。$\mathcal{S}$ を含む X の位相の中で、「最も小さい」位相と「最も大きな」位相を求めよ。

12. $\mathcal{B}$ が位相空間 X の開基であるとき、$U \subset X$ について次が成り立つことを示せ。

$$U : X \text{ の開集合} \iff \forall x \in U,\ \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset U$$

13. 位相空間 X から位相空間 Y への写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であるとはどういうことか。その定義を書け。また、それと同値な条件を 3 つ (以上) 書け。

14. 距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ が点 $x_0 \in X$ で連続であるとはどういうことか。定義を書け。また、点 $x_0 \in X$ で連続でないとはどういうことか。

15. $D^2 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ における閉集合であることを示せ。

16. $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が位相空間の間の連続写像であるとき、合成 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ はまた連続であることを示せ。

17. X を位相空間とし、A をその部分空間とする。包含写像 $i : A \longrightarrow X$ は連続写像であることを示せ。

18. 位相空間 X が、$X = A \cup B$ のように、部分集合 $A,\ B$ の和集合として書かれているとする。部分空間 $A,\ B$ から位相空間 Y への連続写像 $f : A \longrightarrow Y,\ g : B \longrightarrow Y$ が

$$f(x) = g(x) \qquad \text{for all} \ \ x \in A \cap B$$

を満たしているとする。$A,\ B$ が共に X の開集合または閉集合のとき、

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \ \ x \in A \\ g(x) & \text{if} \ \ x \in B \end{cases}$$

によって定義される写像 $h : X \longrightarrow Y$ は連続となることを示せ。

19. $\mathbb{R}^2$ と $\overset{\circ}{D}{}^2 = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\ \}$ は同相であることを示せ (略証でよい)。

20. 2つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X),\ (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して、直積集合 $X \times Y$ に積位相と呼ばれる位相が定まる。その積位相の定義を書け。

21. 位相空間 $X,\ Y$ に対して、標準的な射影

$$\begin{aligned} \pi_X &: X \times Y \longrightarrow X, & \pi_X(x, y) &= x \\ \pi_Y &: X \times Y \longrightarrow Y, & \pi_Y(x, y) &= y \end{aligned}$$

は連続な開写像であることを示せ。

22. 積位相の普遍性を用いて、写像

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

が連続であることを説明せよ。

23. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ を全射とする。Y の f に関する商位相とは何か。その定義を書け。

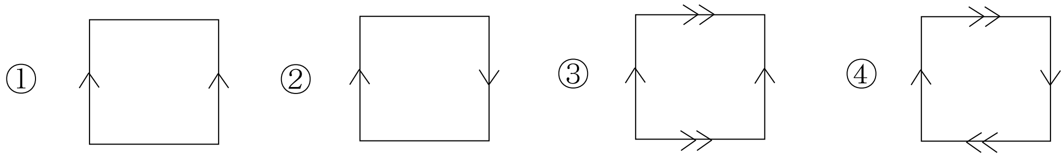
24. X を位相空間、Y を集合とし、$f : X \longrightarrow Y$ を全射とする。Y が f に関する商位相を持つとき、f は連続であることを示せ。また、f はいつでも開写像になるか？

25. 商写像の普遍性について述べよ (商空間からの写像の連続性はどのような写像の連続性に帰着されるか)。

26. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と X 上に同値関係 $\sim$ が与えられているとする。このとき、商集合 $X/\sim$ から Y への写像 $h : X/\sim \longrightarrow Y$ を $h([x]) = f(x),\ x \in X$ によって定義することができるためにはどのような条件が必要か。

27. $X = [0,1] \times [0,1]$ 上の同値関係 $\sim$ が以下のようにして与えられる場合、等化空間 $X/\sim$ はどのような位相空間か。

① $(x,y) \sim (x',y') \iff$「$(x,y)=(x',y')$」または「$\{x,x'\}=\{0,1\}$ かつ $y=y'$」
② $(x,y) \sim (x',y') \iff$「$(x,y)=(x',y')$」または「$\{x,x'\}=\{0,1\}$ かつ $y=1-y'$」
③ $(x,y) \sim (x',y') \iff$「$(x,y)=(x',y')$」または「$\{x,x'\}=\{0,1\}$ かつ $y=y'$」または「$\{y,y'\}=\{0,1\}$ かつ $x=x'$」
④ $(x,y) \sim (x',y') \iff$「$(x,y)=(x',y')$」または「$\{x,x'\}=\{0,1\}$ かつ $y=1-y'$」または「$\{y,y'\}=\{0,1\}$ かつ $x=1-x'$」



28. (X,d) を距離空間とし、$\mathcal{O}_d$ を距離 d から導かれる X の位相とする。このとき、位相空間 $(X,\mathcal{O}_d)$ はハウスドルフ空間であることを示せ。

29. ハウスドルフ空間における一点集合は閉集合であることを示せ。

30. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであるとはどういうことか。その定義を書け。

31. X を位相空間とし、$A,\ B$ をコンパクトな部分集合とする。このとき、和集合 $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ。

32. 任意の連続関数 $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ は最大値と最小値を持つ。それは何故か。

33. X をコンパクト空間、Y をハウスドルフ空間とし、$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする。このとき、

$$f：\text{連続、かつ、全単射} \implies f：\text{同相写像}$$

となる。その証明の概略を書け。

34. ユークリッド空間の部分集合に対するコンパクト性はどのように言い換えることができるか。

35. n 次元球面 S^n はコンパクトであることを示せ。

36. $\mathbb{R}^n$ の 1 点コンパクト化は何か。

37. 位相空間 X が連結であるとはどういうことをいうのか。その定義を書け。

38. $\mathbb{R}$ の中の連結な部分集合の例を挙げよ ($\mathbb{R}$ において閉集合になっているもの、開集合になっているもの、閉集合でも開集合でもないものをそれぞれ 1 つずつ挙げよ)。

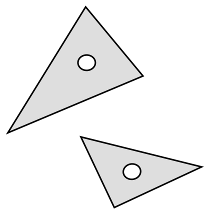
39. 中間値の定理を述べ、その証明の概略を述べよ。

40. 位相空間 X 内の 1 点 $a \in X$ を固定するとき、次の 2 つは同値であることを示せ。

① 任意の $x, y \in X$ に対して、x から y への X における弧が存在する。
② 任意の $x \in X$ に対して、a から x への X における弧が存在する。

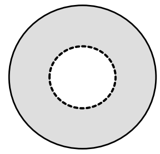
41. 次の影によって表示された図形 $X,\ Y$（実線上の点は含む、破線上の点は含まない）は、$\mathbb{R}^2$ の部分空間として、コンパクトか？連結か？簡単な理由をつけて答えよ。

(1)



X

(2)



Y

42. 位相空間に対する次の４つの性質

ハウスドルフ性、コンパクト性、連結性、弧状連結性

の中で、①連続写像で保たれる性質、②位相不変な性質 (同相写像で保たれる性質)、③有限個の位相空間の直積をとる操作で保たれる性質、④部分空間に遺伝する性質をそれぞれ挙げよ。

43. $n, m \geq 1$ のとき、$\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n - \{0\},\ S^n,\ \mathbb{R}\mathrm{P}^n,\ D^n,\ S^n \times D^m,\ S^n \times \mathbb{R}^m$ の中で、①ハウスドルフであるのもの、②コンパクトであるもの、③連結であるもの、④弧状連結であるものをそれぞれ求めよ。

44. 区間 $[0, 1)$ と S^1 は同相か。簡単な理由をつけて答えよ。

45. 次の８つの文字を $\mathbb{R}^2$ の部分空間と考えたとき、同相なものどうしに分類せよ。

S, T, U, V, W, X, Y, Z

46. 距離空間 (X, d) における点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X 内で収束するとはどういうことか、その定義を書け。また、点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が基本列 (Cauchy 列) であるということの定義を書け。

47. 距離空間が完備であるとはどういうことか。その定義を書け。

48. $\mathbb{R}^n,\ \mathring{D}^n,\ D^n,\ D^n - \{0\},\ S^n$ の中で完備距離空間はどれか？

49. 距離空間に対して、完備性は位相不変な性質か。また、直積をとる操作の下で完備性は保たれるか？

50. 距離空間がコンパクトであることの同値な言い換えを２つ以上述べよ。