§0. 定義と定理の構造

この授業全般にわたる補助教材として、ここでは、数学における定義や定理の構造と論理記号の読み書きについてまとめておく。必要に応じて参照してもらいたい。

「**定義** (definition)」とは、新たに導入しようとする述語や単語に、すでに意味が確立されている (性質、もの、量、状態などに関する) 述語や単語を使って、正確な意味を与えることをいう。簡単に言えば、定義は用語の意味の約束事である。一方、「**定理** (theorem)」とは、成り立つことが誰かによってすでに証明されている命題のことをいう。簡単に言えば、真の命題のことである。状況により、定理のかわりに命題、補題、系という言葉も使われる。

定義や定理を記述する際に、授業において論理記号 $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ がよく使われる。$\forall x \in X$ は「集合 X に属するすべての x に対して (〜である)」という主張を表わし、$\exists$○○ は「○○が存在する」という主張を表わす。また、2 つの主張 P, Q が同じ内容であるとき、$P \Longleftrightarrow Q$ と表わし、特に、定義を書くときには記号 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ を用いる。

● 0 - 1：定義の構造

数学における定義は、ほとんどの場合、「初期設定 (大前提)」「新しい用語の提示」「用語の意味を決定するための条件」の 3 つの部分に分けられる。専門書や板書ではこれらの 3 つ部分が明白に分けて書かれていないことが多いが、定義が主張している内容を正しく読み取るには、この 3 つの部分をきちんと分けて捉えることが大切である。

例 0 - 1 - 1 零ベクトルでない 2 つの平面ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ に対して、$\overrightarrow{b} = t\overrightarrow{a}$ となる実数 t が存在するとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**平行** (parallel) であると呼ばれる。

上の文章は「平行」という概念を定義している。この場合、「初期設定」「用語の提示」「用語の決定条件」はそれぞれ次のようになる。

初期設定 ： $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を零ベクトルでない平面ベクトルとする。
用語提示 ： $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が<u>平行</u>である。
決定条件 ： $\overrightarrow{b} = t\overrightarrow{a}$ となる実数 t が存在する。

これを記号 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ と $\exists$ を使って、表現し直すと次のように書くことができる。

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ を零ベクトルでない 2 つの平面ベクトルとする。このとき、

$$\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ は}\underline{\text{平行}}\text{である} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists t \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ \overrightarrow{b} = t\overrightarrow{a}.$$

注意 0 - 1 - 2

(1) “s.t.”は“such that”の略である。“〜 such that —”は“— であるような 〜”という意味を持っている。
(2) ここで、単に「平行」というだけでは意味をなさないことに注意する必要がある。上で定義しているのは、2 つのベクトルが平行ということである。このように、新たな用語に出会ったとき、それが何に対するものなのか、考えている理論の中でどの場所に位置しているのかをきちんと把握することが大切である。

演習 0-1* 次の文章は約数 (および、割り切れること、および、倍数) の定義を述べている。この文章を「初期設定」「用語の提示」「用語の決定条件」の 3 つの部分に分けよ。さらに、それを $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ などの記号を使って表現し直せ。

$a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0$ とする。$b = ac$ となる $c \in \mathbb{Z}$ が存在するとき、a は b の**約数** (divisor) である、あるいは、b は a で**割り切れる** (divisible)、あるいは、b は a の**倍数** (multiple) であると呼ばれる。

● 0-2： 定理の構造

数学における定理は、「(初期設定を含む) 前提」と「結論」の 2 つからなり、ほとんどの場合、「(前提) $\Longrightarrow$ (結論)」という構造をしている。定理の内容が複雑になると、前提部分は、さらに、「初期設定」と「仮定」の 2 つの部分に分けられる (しかし、この 2 つの部分の分け方はあまり明確ではなく、人によって多少の違いは出る)。定理の主張している内容を正しく読み取るには、前提部分と結論部分をきちんと分けて捉えることが必要である。

例 0-2-1 (定理)　正多面体は、正 4 面体、立方体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の 5 種類に限られる。

この定理の「前提」と「結論」は次のようになる。

前提 ：T を正多面体とする。

結論 ：T は正 4 面体、または、立方体、または、正 8 面体、または、正 12 面体、または、正 20 面体である。

上の定理は、記号 : や $\Longrightarrow$ などを使って簡略した表現に直すと例えば次のように表わすことができる。

T：正多面体

$\Longrightarrow$　T は正 4 面体、立方体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体のいずれかである。

注意 0-2-2　英語のコロン「：」には「それというのは、つまり」という意味があり、コロンの前に書かれている事柄の内容を詳しく説明したいときに使われる。数学の授業においてコロンは「(記号)：(記号の説明)」という形で多用されることが多い。

演習 0-2 * 次の命題を「前提」と「結論」の 2 つの部分に分けよ。さらに、記号 : や $\Longrightarrow$ などを使って、簡略した表現に直せ。

すべての奇数 n について $11n^2 - 7$ は 4 で割り切れる。

例 0-2-3 (定理)　集合 X の部分集合 A, B に対して、A が B に含まれるならば 補集合 $X - B$ は $X - A$ に含まれる。

この定理の「初期設定」「仮定」「結論」は次のようになる。

初期設定 ：X を集合とし、A, B を X の部分集合とする。

仮定 ：A が B に含まれる。

結論 ：$X - B$ は $X - A$ に含まれる。

上の定理を記号を使って簡略した表現に直すと例えば次のように表わすことができる：

X：集合,

A, B：X の部分集合　とする。このとき、

$$A \subset B \implies X - A \supset X - B.$$

演習 0-3 次の命題を「初期設定」「仮定」「結論」の 3 つの部分に分けよ。さらに、この命題を記号 : や $\Longrightarrow$ などを使って簡略した表現に直せ。

a を実数の定数とする。$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が連続で、$f(1)=a$ かつ任意の実数 x,y に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たすならば、関数 $f(x)$ は関数 $g(x)=ax$ $(x\in\mathbb{R})$ に等しい。

定理の中には必要十分を主張するものがある。この場合、定理の構造は「(初期設定を含む) 前提」と「2 個以上の同値な命題」の 2 つの部分に分けられる。

例 0-2-4 (**定理**) 複素数 α が実数であるためには、虚部 $\mathrm{Im}\,\alpha$ が 0 であることが必要十分であり、これはまた、α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ が α に等しいことが必要十分である。

注意：複素数 α を $\alpha=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ と書いたとき、α の虚部 $\mathrm{Im}\,\alpha$ とは b のことである。また、α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ とは $\overline{\alpha}=a-bi$ により与えられる複素数のことである。

上の定理の場合、「前提」と「3 つの同値な命題」からなり、それらは次で与えられる。

初期設定 ： α を複素数とする。
命題① ： α は実数である。
命題② ： $\mathrm{Im}\,\alpha=0.$
命題③ ： $\overline{\alpha}=\alpha.$

したがって、この定理は、次のように同値な条件を箇条書きにするとわかりやすくなる。

複素数 α に対して、次の①, ②, ③は同値である。

① α は実数である。
② $\mathrm{Im}\,\alpha=0.$
③ $\overline{\alpha}=\alpha.$

同値な命題が 2 個の場合には、記号 $\Longleftrightarrow$ を使って書いてもよい。例えば、「複素数 α が実数であるためには、α の共役複素数が α に等しいことが必要十分である」という主張は次のように書くことができる。

複素数 α に対して、

$$\alpha\in\mathbb{R} \iff \overline{\alpha}=\alpha.$$

● 0-3 : 「〜を持つ」「〜できる」という型の定義や定理

定義や定理の主張には、「〜を持つ」「〜のように表わすことができる」というタイプのものがある。このタイプの主張には「存在」が隠されている。

例 0-3-1 $p\in\mathbb{N}$ が**素数** (prime number) であるとは、$p\neq 1$ であって、1 と p 自身以外に正の約数を持たないときをいう。1 でも素数でもない自然数を**合成数** (composite number) という。

上の文章は「素数」「合成数」という概念を定義している文章である。

(1) 素数の定義については、「初期設定」「用語の提示」「用語の決定条件」はそれぞれ次のようになる。

初期設定 ：$p\in\mathbb{N}$ とする。
用語提示 ：p は素数である。
決定条件 ：p は 1 と p 自身以外に正の約数を持たない。

(2) 合成数の定義を $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ などの記号を使って表現し直すと、例えば次のようになる。

$p \in \mathbb{N}$ とする。このとき、

p は<u>合成数</u>である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ p は 1 と p 自身以外に正の約数を持つ。

演習 0-4 次の命題を「初期設定」「仮定」「結論」の 3 つの部分に分けよ。さらに、この命題を記号：や $\Longrightarrow$ などを使って簡略化した表現に直せ。

a, b, c が奇数のとき、$ax^2 + bx + c = 0$ は有理数解を持たない。

<u>**例 0-3-2**</u> (1)「p, q を相異なる素数とすると、任意の整数は $ap + bq$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と表わされる。」

この主張は、$\exists$ や $\forall$ などの記号を使って次のように書き表わすことができる。

$$p, q\text{：相異なる素数} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n = ap + bq.$$

(2)「任意の自然数は 4 個の平方数の和で表わされる。」

この主張は、$\exists$ や $\forall$ などの記号を使って次のように書き表わすことができる。

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2.$$

注意 0-3-3 定義や定理における主張は、上の例題のように「任意 $\forall$」と「存在 $\exists$」の両方が含まれることが多いが、$\forall$ と $\exists$ の順番が大切である。例えば、次の 2 つの命題を考えよう。

$$P: \ \forall x \in [-1, 1],\ \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x^2 + y^2 = 1.$$
$$Q: \ \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall x \in [-1, 1],\ x^2 + y^2 = 1.$$

P と Q の違いは $\forall$ と $\exists$ の順番だけであるが、それらが意味する内容は異なる。実際、P は

「任意の実数 $x \in [-1, 1]$ に対して、“$x^2 + y^2 = 1$ であるような実数 y が存在する”」

ということを意味する命題であるが、Q は、

「“任意の実数 $x \in [-1, 1]$ に対して、$x^2 + y^2 = 1$ である”ような実数 y が存在する」

ということを意味する命題である (読点とクォーテーションマークの位置に注意！)。違いは、P における y は $x \in [-1, 1]$ の選び方によって変わってもよいのに対し、Q における y は x に無関係でなければならない所にある。

授業において $\forall$ と $\exists$ の両方を含む論理式が出てきたとき、それを文章化する場合には、2 つの意味に解釈できたり、異なる意味になったりしないように、読点 (、) を打つ位置を慎重に選び、一括りとして意味をとるべき箇所に括弧やクォーテーションマークをつけて明確にして書かなければならない。

演習 0-5 * 次の命題を $\exists$ や $\forall$ などの記号を使って書き直せ。

1 以外の任意の自然数 n は、有限個の素数の積に書き表わすことができる。

注意： この節では、定義や定理の内容を正確に捉えるために、それを「初期設定」や「用語の提示」「結論」などの部分に分解し、論理記号を用いて書き直す方法を学んだ。このような表現方法は、視覚的に分かりやすく、思考の整理の手助けになる。個人的に使用するノートやセミナーで発表の際に大いに使用しよう。他方、正式なレポートや (卒業) 論文では、$\forall, \exists, \Rightarrow$ などの論理記号や $\because, \therefore$ などの記号の使用は認められないことが多いので、使わないようにしよう。