§1. 数ベクトル空間とその基底

この節では、数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に対して基底の概念を導入する。基底を使うと、$\mathbb{R}^n$ の元 ($= n$ 次列ベクトル) の新しい記述方法が得られる。基底の定義を述べたあと、$\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルの列が基底になるための様々な必要十分条件を述べる。

この講義を通して、ベクトルや行列の成分は実数に限定する (複素数は扱わない)。

● 1-1：数ベクトル空間

n 次元**数ベクトル空間**とは、n 次列ベクトルの全体からなる集合

(1-1 a)
$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R},\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

に、次のように定義される和とスカラー倍が指定されたものをいう：

- 和：$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.
- スカラー倍：$t \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ \vdots \\ tx_n \end{pmatrix}$.

成分がすべて 0 の n 次列ベクトル $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^n$ の**零ベクトル**という。

● 1-2：一次結合

$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$ を $\mathbb{R}^n$ に属する d 個のベクトルとする。ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_d$” の**一次結合**であるとは、$\mathbf{x}$ がある $t_1, \cdots, t_d \in \mathbb{R}$ を用いて

(1-2 a)
$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_d\mathbf{v}_d$$

と表わされるときをいう。一次結合はまた**線形結合**とも呼ばれる。

● 1-3：基底

n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は、n 個のベクトル

$$“\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}”$$

の一次結合として、

(1-3 a)
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

のように表わされる。しかも、この表わし方は一意的である。

上で述べた $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ と同じ性質を持つベクトルの組は沢山存在する。そこで、このようなベクトルの組に名前をつけよう。

定義 1 - 3 - 1
ベクトルの列 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ の**基底**であるとは、すべての元 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \qquad (t_1,\ \cdots, t_n \in \mathbb{R}) \tag{1-3 b}$$

のように書き表わされ、かつ、その書き表わされ方が一意的であるときをいう。ここで、「書き表わされ方が一意的である」とは、$\mathbf{x}$ が

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n \qquad (s_1, \cdots, s_n \in \mathbb{R}) \\ &= t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

のように２通りに書き表わされたとすると、$s_1 = t_1, \cdots, s_n = t_n$ が成り立つことを意味する。

注意 1°：$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ の中に零ベクトルが含まれていれば、この列は $\mathbb{R}^n$ の基底ではない。また、$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ の中に同じベクトルが含まれていれば、この列は $\mathbb{R}^n$ の基底ではない。したがって、列 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ の基底であれば、その中のどのベクトルも零ベクトルではないし、同じベクトルは含まれない。

注意 2°：基底は $\mathbb{R}^n$ の元を n 個のベクトルを用いて指定するための「目盛り」の役割りを果たしていると考えられる。

例 1 - 3 - 2　[定義 1 - 3 - 1] の直前の説明から、$\mathbb{R}^n$ のベクトルの列

$$“\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}”$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底である。この基底を $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という。

例 1 - 3 - 3　ベクトルの列 “$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$” は $\mathbb{R}^2$ の基底である。

(**証明**)
　任意にベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ をとり、

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}$$

を満たす $x, y \in \mathbb{R}$ が一意的に存在することを確かめればよい。上の等式を x, y に関して解くことにより、$x = a - b,\ y = b$ が唯一の解であることがわかる。したがって、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$” は $\mathbb{R}^2$ の基底である。 □

● 1 - 4 : 基底であるための条件

　基底であるための条件は「一次独立」と「張る」という２つの条件に分解することができる。

補題 1 - 4 - 1

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の n 個からなるベクトルの列 “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ の基底であるための必要十分条件は、次の２条件が成り立つことである。

(B1) “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” は $\mathbb{R}^n$ を**張る**。すなわち、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \qquad (t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}) \tag{1-4 a}$$

のように書き表わされる。

(B2) “$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” は**一次独立**である。すなわち、

$$t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \ \ (t_1, \ \cdots, t_n \in \mathbb{R}) \ \ \Longrightarrow \ \ t_1 = \cdots = t_n = 0 \tag{1-4 b}$$

が成り立つ。一次独立はまた**線形独立**とも呼ばれる。

(**証明**)

“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ の基底であるとする。これが $\mathbb{R}^n$ を張ることは、基底の定義から直ちに従う。一次独立であることを示すために、

$$\mathbf{0} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \quad (t_1, \ \cdots, t_n \in \mathbb{R})$$

とする。$\mathbf{0}$ は

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_n$$

とも書ける。書き表わし方の一意性から $t_1 = \cdots = t_n = 0$ でなければならない。よって、“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” は一次独立である。

次に、逆が成り立つことを示す。“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ を張り、かつ、一次独立であると仮定する。“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” が $\mathbb{R}^n$ を張ることから、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \quad (t_1, \ \cdots, t_n \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

と書くことができる。$\mathbf{x}$ が

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_n\mathbf{v}_n \ \ (s_1, \ \cdots, s_n \in \mathbb{R})$$

とも書けたとする。このとき、

$$(t_1 - s_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (t_n - s_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

となる。“$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$” は一次独立であるから $t_1 - s_1 = 0, \ \cdots, t_n - s_n = 0$ を得る。故に、$t_1 = s_1, \ \cdots, t_n = s_n$ であり、$\mathbf{x}$ を $(*)$ のように書く書き表わし方は一意的である。 □

例 1 - 4 - 2 ベクトルの列 “$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$” は $\mathbb{R}^2$ の基底かどうかを調べよう。

任意のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は、x, y に関する方程式 $\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$ を解いて、$\mathbf{v} = (2a - b)\mathbf{v}_1 + (-a + b)\mathbf{v}_2$ と表わされることがわかる。したがって、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$” は $\mathbb{R}^2$ を張る。

次に、

$$x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \ \ (x, y \in \mathbb{R})$$

とおく。計算により、$x = y = 0$ となることがわかる (先の計算において $\mathbf{v} = \mathbf{0}$、すなわち、$a = b = 0$ の場合に相当する)。したがって、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$” は一次独立である。

以上より、“$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$” は $\mathbb{R}^2$ の基底である。 □

[補題 1 - 4 - 1] より、$\mathbb{R}^n$ のベクトル "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" が基底であることを示すには、「一次独立」と「張る」という両方の条件が成り立つことを確認する必要がある。しかし、実際には、どちらか一方のみ示せば十分である。このことを示そう。

定理 1 - 4 - 3

数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に属する n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ に対して n 次正方行列 A を $A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ と定める。次の 6 つは互いに同値である。

① "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" は $\mathbb{R}^n$ の基底である。

② "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" は $\mathbb{R}^n$ を張る。

③ "$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" は一次独立である。

④ 行列 A は正則である。

⑤ $\mathrm{rank}\, A = n$.

⑥ $|A| \neq 0$.

(**証明**)

「線形代数１」の [定理 12 - 6 - 1] において、③, ④, ⑤, ⑥が互いに同値であることは示されている。あとは、②と③が同値であることを示せばよい。

●「② $\Longrightarrow$ ③」の証明：

③と⑥は同値であるから「② $\Longrightarrow$ ⑥」を示す。

"$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$" を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする。"$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" は $\mathbb{R}^n$ を張るので、$A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ とおくと、各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ となる $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ が存在する。$X = (\mathbf{x}_1\ \cdots\ \mathbf{x}_n)$ おくと、

$$AX = (A\mathbf{x}_1\ \cdots\ A\mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1\ \cdots\ \mathbf{e}_n) = E_n$$

となる (但し、E_n は n 次単位行列である)。これより両辺の行列式をとって、$|A| \neq 0$ が導かれる。

●「③ $\Longrightarrow$ ②」の証明：

③と④は同値であるから、"$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" が一次独立ならば、これらを並べて得られる n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ は正則である。そこで、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\mathbf{t} = A^{-1}\mathbf{x}$ とおく。$\mathbf{x} = A\mathbf{t}$ と表されるので、$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ と書くと、

$$\mathbf{x} = A\mathbf{t} = (\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_n)\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$$

と表される。故に、"$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$" は $\mathbb{R}^n$ を張る。 □

例 1 - 4 - 4 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して、$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3)$ とおく。A に行基本変形を施すことにより、$\mathrm{rank}\, A = 3$ となることがわかる。よって、[定理 1 - 4 - 3] により、"$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$" は $\mathbb{R}^3$ の基底である。 □

No.1 2024 年 9 月 26 日

線形代数 2 事前練習用演習問題

pre1-1. (基底)

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく。“$\mathbf{v}, \mathbf{u}$” は $\mathbb{R}^2$ の基底をなすか、なさないか？理由をつけて答えよ。

(2) “$\mathbf{v}, \mathbf{w}$” が $\mathbb{R}^2$ の基底にならないような $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ。

pre1-2. (基底)

$\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を “$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$” の一次結合で表わせ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre1-1. (1) $A = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ とおいて、$\operatorname{rank} A$ を計算して、2 になるかどうかを調べればよい。

$$A \xrightarrow{①\times 1+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので、 $\operatorname{rank} A = 2$ である。よって、“$\mathbf{v}, \mathbf{u}$” は $\mathbb{R}^2$ の基底をなす。

(2) $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。$B = (\mathbf{v}\ \mathbf{w})$ とおくと、“$\mathbf{v}, \mathbf{w}$” が $\mathbb{R}^2$ の基底にならないのは $|B| = 0$ となるときである。$|B| = y + x$ より、$x + y = 0$ となる実数 x, y を求めればよい。$x = t$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、$y = -t$ であるから、条件を満たす $\mathbf{w}$ は $\mathbf{w} = t\mathbf{v}$ $(t \in \mathbb{R})$ により与えられる。

pre1-2. (1) $A = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ とおき、行基本変形を施して階段型にして、$\operatorname{rank} A = 3$ であることを確認すればよい。

(2) $\mathbf{x} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$ を満たす実数 x, y, z を求めればよい。これを成分で表わすと連立一次方程式

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = a \\ x + 2y - \ \ z = b \\ x + 3y + \ \ z = c \end{cases}$$

になる。この連立一次方程式を解けばよい。行列 $(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{x})$ に行基本変形を施すことにより、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -3 & b-a \\ 0 & 0 & 5 & a-2b+c \end{array}\right)$$

を得る。したがって、連立一次方程式

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ \quad\ \ y - 3z = b - a \\ \qquad\quad 5z = a - 2b + c \end{cases}$$

を解く。これを後退代入で解いて、

$$z = \frac{a-2b+c}{5}, \quad y = \frac{-2a-b+3c}{5}, \quad x = a+b-c$$

を得る。よって、

$$\mathbf{x} = (a+b-c)\mathbf{v}_1 + \frac{-2a-b+3c}{5}\mathbf{v}_2 + \frac{a-2b+c}{5}\mathbf{v}_3$$

と表わされる。

線形代数２・第１回 (2024 年 9 月 26 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数２・第１回学習内容チェックシート 2024 年 9 月 26 日

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ____________________________

Q1. $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
$\mathbb{R}^n$ はどのような集合か？	p.	
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" の一次結合であるとは？	p.	
"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が $\mathbb{R}^n$ を張るとは？	p.	
"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が一次独立であるとは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 次のように定義される $\boxed{}$ と $\boxed{}$ が指定された集合 $\mathbb{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間と呼ぶ：$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ および実数 t に対して、

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \boxed{}, \qquad t\mathbf{x} = \boxed{}.$$

- n 次列ベクトルの列 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が基底であるとは、任意の n 次列ベクトルがこれらの一次結合の形に $\boxed{}$ に書き表わされるときをいう。この条件は、"$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が $\mathbb{R}^n$ を $\boxed{}$ という条件と $\boxed{}$ であるという条件の 2 つに分解される。
- $\mathbb{R}^n$ の標準基底とは、次で与えられる基底のことをいう。

$$\boxed{}$$

- 任意の n 次列ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は、$\mathbb{R}^n$ の標準基底 "$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$" の一次結合として

$$\mathbf{x} = \boxed{}$$

と表わされる。

Q3. $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルからなる列 "$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$" が $\mathbb{R}^n$ の基底かどうかを調べるには、行列 $A = (\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n)$ についてどのようなことを調べるとわかるか？有効な方法を 1 つ書きなさい。

$$\boxed{}$$

Q4. 第 1 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。