§1. 内積空間

ベクトル空間においては、和とスカラー倍が指定されているだけであり、2つのベクトルが近いとか遠いということを考えることはできない。しかし、考えるベクトル空間が幾何学的あるいは解析学的背景を持っている場合、ベクトル同士の近さ (距離) や角度が自然な方法で定義されることが多く、また、それを用いてより深くベクトル空間やその上の線形写像を考察することが可能となる。ベクトル同士の近さや角度を測ることができるようにするための道具が内積であり、線形代数3では、内積が指定されたベクトル空間の理論を多くの具体例を通して学ぶ。

● 1-1：実ベクトル空間に対する内積の定義

この授業を通じて、$\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合を表わし、自然数 n に対して

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R},\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

とする。$\mathbb{R}^n$ は、いつものように和とスカラー倍を定めることで、実ベクトル空間をなす。実ベクトル空間のことを $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とも呼ぶ。この授業では、線形代数1、2で学んだ実ベクトル空間とその部分空間の定義、および、それらの基本事項については (必要に応じて簡単に復習はするが、) 既知とする。

$\mathbb{R}^n$ においては、2つのベクトルの間に、次のように内積が定義されたことを思い出そう：

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n. \tag{1-1 a}$$

この内積が持っている性質を抽出して、一般の実ベクトル空間上の内積を次のように定める。

定義 1-1-1

V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする。写像 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすとき、$\langle\ ,\ \rangle$ を V 上の **(正定値) 内積**といい、組 $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を**実計量空間**または**内積空間**という。

(IP1) (**双線形性**) 任意の $v, v_1, v_2, u, u_1, u_2 \in V$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して
- $\langle v_1 + v_2, u\rangle = \langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle, \quad \langle tv, u\rangle = t\langle v, u\rangle.$
- $\langle v, u_1 + u_2\rangle = \langle v, u_1\rangle + \langle v, u_2\rangle, \quad \langle v, tu\rangle = t\langle v, u\rangle.$

(IP2) (**対称性**) 任意の $v, u \in V$ に対して $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$.

(IP3) (**正定値性**) 任意の $v \in V$ に対して $\langle v, v\rangle \geq 0$ であり、

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0.$$

注意 1. 双線形性より、任意の $v \in V$ に対して $\langle v, 0_V\rangle = \langle 0_V, v\rangle = 0$ が成り立つ。ここで、0_V は V における零ベクトルを表わす。

注意 2. V を $\mathbb{R}$ 上の計量空間 (あるいは、実計量空間) とする、という言い方をするときがある。この場合には、$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が1つ指定されているものとする。

注意 3. 正定値性から、エルミート内積は次の性質も持つことがわかる。

(IP4) (**非退化性**) $v \in V$ が任意の $u \in V$ に対して $\langle v, u\rangle = 0$ を満たせば、$v = 0_V$ である。

これより、V の基底 “$u_1, \cdots, u_n$” に対して2つのベクトル $v, v' \in V$ が $\langle v, u_i\rangle = \langle v', u_i\rangle$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たせば、$v = v'$ であることがわかる。

注意 4. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を実計量空間とし、W を V の部分空間とする。このとき、W は $\langle\ ,\ \rangle$ の定義域を $W \times W$ に制限することにより、W 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle|_{W\times W}$ が定義される。計量空間

$(W, \langle\ ,\ \rangle|_{W\times W})$ を $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ の**計量部分空間**という。特に断らない限り、実計量空間の部分空間は、このような内積を持つ計量 (部分) 空間と考える。

例 1-1-2 正の実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対して、写像 $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義すると、これは $\mathbb{R}^n$ 上の１つの内積になる：

(1-1 b) $$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right).$$

特に、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ のとき、(1-1 a) で与えられる内積と一致する。この内積を $\mathbb{R}^n$ の**通常の内積**または**ユークリッド内積**と呼ぶ。

例 1-1-3 実 (m, n)-行列全体 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ は、行列の和とスカラー倍に関して実ベクトル空間となる。写像 $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

(1-1 c) $$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}} A) \qquad (A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R}))$$

によって定義すると、これは $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上の内積になる。ここで、B^{T} は B の転置行列であり、Tr はトレース (= 行列の対角成分の和) である。

$n = 1$ のとき、この内積は $\mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$ 上のユークリッド内積に一致する。

例 1-1-4 閉区間 $[a, b]$ 上で定義された実数値連続関数全体を $C[a, b]$ で表わす。$C[a, b]$ は、関数の和とスカラー倍に関して実ベクトル空間をなす。写像 $\langle\ ,\ \rangle : C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を

(1-1 d) $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (f, g \in C[a, b])$$

によって定義すると、これは $C[a, b]$ 上の内積になる ((IP3) を満たすことは、$f \in C[a, b]$ が $f \neq 0$ ならば、f の連続性から $\langle f, f\rangle > 0$ となることからわかる)。

● 1-2：長さ (ノルム)

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を実計量空間とする。任意の $v \in V$ に対して $\langle v, v\rangle \geq 0$ であるからその正の平方根をとることができる。これを v の**長さ**または**ノルム**といい、$\|v\|$ で表わす：

(1-2 a) $$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

$V = \mathbb{R}^n$ で、$\langle\ ,\ \rangle$ が通常の内積の場合、$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ のノルムは

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

である。これを $\mathbf{v}$ の**ユークリッド・ノルム**と呼ぶ。$\|\mathbf{v}\|$ は、点 $\mathrm{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が原点 $\mathrm{O}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ からどのくらい離れているかを測る値である。一般に、$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ の間の**(ユークリッド) 距離**という。これは、(始点を原点 O にとったときの) 位置ベクトルが $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ であるような２点 P, Q の間がどのくらい離れているかを表わしている。

補題 1-2-1
$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の計量空間とする。ノルム $\|\ \|$ は以下の性質を持つ：任意の $v, u \in V$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

(1) $\|tv\| = |t|\|v\|$.
(2) (**コーシー-シュワルツの不等式**) $|\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$.
(3) (**三角不等式**) $\|v+u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

(**証明**)

(1) の証明は易しいので演習問題とする。

(2) $u \neq 0$ として、$f(t) = \|tu+v\|^2$ $(t \in \mathbb{R})$ によって定義される実数値関数 f を考える。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t) \geq 0$ である。今、

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \langle tu+v, tu+v\rangle \\
&= \|u\|^2 t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \|v\|^2 \\
&= \left(\|u\|t + \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}\right)^2 + \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}
\end{aligned}
$$

と書ける。よって、$f(t)$ の最小値は

$$\frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

である。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t) \geq 0$ であるのは $f(t)$ の最小値が 0 以上のときであるから、$\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 \geq 0$, すなわち、$|\langle v, u\rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$ が成り立つ。

$u = 0$ の場合にはコーシー-シュワルツの不等式は自明に成り立つ。

(3) コーシー-シュワルツの不等式を用いて、次のようにして得られる。

$$
\begin{aligned}
(\|v\| + \|u\|)^2 - \|v+u\|^2 &= \langle v, v\rangle + 2\|v\| \cdot \|u\| + \langle u, u\rangle - \langle v+u, v+u\rangle \\
&= 2(\|v\| \cdot \|u\| - 2\langle v, u\rangle) \geq 0
\end{aligned}
$$

を得る。よって、$\|v\| + \|u\| \geq \|v+u\|$ が成り立つ。 □

注意. $\mathbb{R}^2$ の場合、三角不等式は、「三角形の 2 辺の長さの和は、残りの一辺の長さよりも大きい」という事実を表わしている。これが、補題の (3) の不等式を三角不等式と呼ぶ理由であり、(3) は計量空間においても同様の事実が成り立つことを示している。

例 1-2-2 f, g を閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された実数値連続関数とする。[例 1-1-4] で与えられた $C[0, 1]$ 上の内積に対するコーシー-シュワルツの不等式と三角不等式から、以下の不等式が成り立つ。

(1) $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2\,dx\right)$.

(2) $\displaystyle\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,dx} + \sqrt{\int_0^1 g(x)^2\,dx}$.

● 1-3: ベクトルのなす角

$\mathbb{R}^2$ における零でない 2 つのベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|} \tag{1-3 a}$$

が成り立つ。同様のことは $\mathbb{R}^n$ における零でない 2 つのベクトルに対しても成り立つ (その 2 つのベクトルによって張られる平面上で同様の考察を行えばよい)。

この事実とコーシー-シュワルツの不等式を背景に、一般の実計量空間 $(V, \langle\ ,\rangle)$ における零でない２つのベクトル v, u に対して、それらの間のなす角を次のように定義する。まず、コーシー-シュワルツの不等式より、

$$-1 \leq \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\|u\|} \leq 1$$

が成り立つ。したがって、

$$\cos\theta = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\|u\|}$$

となる $\theta \in [0, \pi]$ が一意的に存在する。この θ を v と u との**なす角**と呼ぶ。

例 1 - 3 - 1 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ に [例 1 - 1 - 3] で定義された内積を入れて考える。２つの行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ のなす角 $\theta \in [0, \pi]$ を求めよう。

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)} = 2\sqrt{3}, \quad \|B\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}B)} = \sqrt{6}, \quad \langle A, B\rangle = -6$$

であるから、θ は

$$\cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\|B\|} = \frac{-6}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

を満たす。よって、A, B のなす角は $\theta = \frac{3\pi}{4}$ である。 □

● 1 - 4 : ベクトルの直交条件

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を実計量空間とする。$v, u \in V$ が**直交する**とは、$\langle v, u\rangle = 0$ となるときをいう。特に、零ベクトルは任意のベクトルに直交する。

補題 1 - 4 - 1 (ピタゴラスの定理)

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の計量空間とする。$u, v \in V$ に対して

$$u, v \text{ が直交する} \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

(証明)

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

であるから、

$$u, v \text{ が直交する} \iff \langle u, v\rangle = 0 \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$ □

例 1 - 4 - 2 $C[-\pi, \pi]$ に [例 1 - 1 - 4] で定義されている内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を導入する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \in C[-\pi, \pi]$ を

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

によって定義する。$m \neq n$ ならば f_m と f_n は直交する。

(証明)

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big) dx \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big]_{-\pi}^{\pi} \quad \left(\begin{array}{l} \because\ m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N} \text{ より} \\ m - n \neq 0,\ m + n \neq 0 \end{array}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$ □

No.1 2025 年 4 月 7 日

線形代数 3 事前練習用演習問題

pre1-1. $C[a,b]$ を閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体のなす実ベクトル空間とする。

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \qquad (f, g \in C[a,b])$$

によって定義される写像 $\langle\ ,\ \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は $C[a,b]$ 上の内積になることを示せ。

pre1-2. $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ に内積 $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A)$ $(A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$ を導入する。$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ が直交するのは、θ, φ がどのような関係にあるときか？

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre1-1. 内積の定義 ([定義 1 - 1 - 1]) を満たすことを 1 つ 1 つ確かめていけばよい。

(IP1) を満たすことは、定積分の線形性から従う。

(IP2) を満たすことは、$\langle f, g\rangle$ の定義から直ちに従う。

(IP3) を満たすことを示す。任意の $f \in C[a,b]$ に対して $\big(f(x)\big)^2 \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ であるから、定積分の単調性により、

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx \geq 0$$

となる。もし、$f \neq 0$ ならば、$f(x_0) \neq 0$ となる $x_0 \in [a,b]$ が存在する。f の x_0 における連続性により、$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a,b]$ 上で f は 0 でない。$[x_1, x_2] = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [a,b]$ とおくと、定積分の加法性により、

$$\langle f, f\rangle \geq \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x)\big)^2 dx > 0$$

となる。よって、対偶をとって、「$\langle f, f\rangle = 0$ ならば $f = 0$」が成り立つことがわかる。

pre1-2. 内積 $\langle A, B\rangle$ を計算して、これが 0 となるときの φ, θ に関する条件を求めればよい。

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ に対して、$\langle A, B\rangle = 2\cos(\varphi - \theta)$ であることがわかる。したがって、

$$\langle A, B\rangle = 0 \iff \cos(\varphi - \theta) = 0 \iff \varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

となる。したがって、A と B が直交するための必要十分条件は、ある整数 k に対して $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + k$ となることである。

第 1 回 (2025 年 4 月 7 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数３・第１回学習内容チェックシート 2025 年 4 月 7 日

学 籍 番 号 ____________________ 氏 名 ____________________________

Q1. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ からベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ をとり、$t \in \mathbb{R}$ とする。

(1) 和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ とスカラー倍 $t\mathbf{x}$ はどのように定義されるか？その定義を書け。

[和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ の定義] [スカラー倍 $t\mathbf{x}$ の定義]

(2) $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ における通常の内積とする。

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$ ____________________________ , $\|\mathbf{x}\| =$ ____________________________

Q2. 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された実数値連続関数全体 $C[a,b]$ は関数の和とスカラー倍に関して実ベクトル空間をなす。

(1) $f, g \in C[a,b]$, $t \in \mathbb{R}$ に対して、和 $f+g$ とスカラー倍 tf の定義を書け。

[和 $f+g$ の定義] [スカラー倍 tf の定義]

(2) $C[a,b]$ における零ベクトルはどんな関数か？

(3) $C[a,b]$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の例を与えよ。

Q3. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ を実計量空間とする。

(1) $v \in V$ のノルム $\|v\|$ の定義を書け。

(2) コーシー-シュワルツの不等式とはどんな不等式か？

(3) 三角不等式とはどんな不等式か？

(4) $u, v \in V$ のなす角 θ とは何か？定義を述べよ。

(5) $u, v \in V$ が直交するとはどんなときをいうか？その条件を述べよ。

Q4. 第１回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。