§1．数列の収束

この節では、数列の極限に関する基本的な結果を証明なしで紹介する。その基本的な結果のうちの１つ「上に有界な単調増加数列は収束する」を用いて、自然対数の底に用いられるネイピア数 $e = 2.71828\ldots$ の定義を与える。

● 1 - 1：数列とは

各自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して実数 a_n が 1 つずつ定められているとき、これらを

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\cdots$$

のように“並べて”作られる列のことを (実) **数列**と呼ぶ。左から n 番目に並ぶ数 a_n をこの数列の**第 n 項**という。特に、第 1 項のことを**初項**という。数列は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のように書き表わす。

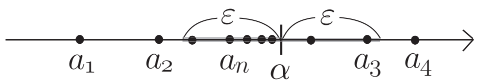
２つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**等しい**とは、すべての自然数 n に対して $a_n = b_n$ となるときをいい、このことを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書き表わす。

例 1 - 1 - 1 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{(-1)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は、どちらも 1 と -1 からなる数列だが、並び方が違うので数列としては等しくない：$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{(-1)^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

● 1 - 2：数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは、項の番号 n を限りなく大きくしていくと、絶対値 $|a_n - \alpha|$ がどんな (小さい) 実数 $\varepsilon > 0$ よりも小さくなるときをいう。このとき、α を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限 (値)** といい、次のように書く：

(1 - 2 a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$



例 1 - 2 - 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

● 1 - 3：$\pm\infty$ に発散するとは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ **に発散する** (resp. $-\infty$ **に発散する**) とは、項の番号 n を限りなく大きくしていくと、a_n (resp. $-a_n$) がどんな (大きな) 実数 $K > 0$ よりも大きくなるときをいう。これを次のように表わす。

(1 - 3 a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{または} \quad a_n \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

(1 - 3 b) $$\left(\text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)\right)$$

例 1 - 3 - 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty.$

● 1 - 4：数列の和差積商と極限

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (それぞれある実数に) 収束するとき、4 つの数列

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

はすべて収束し、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \text{ (複号同順)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

が成り立つ。但し、商については $b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ のときにのみ考える。

例 1 - 4 - 1 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n+1}$ を求めよう。この形のままでは分子と分母の数列が収束しないため、分子と分母を n で割って、収束するようにしてから商の公式を適用する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

● 1 - 5 : 不等式と数列の極限

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (それぞれある実数に) 収束していて、$a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ ならば、$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ となる。さらに、次が成り立つ。

定理 1 - 5 - 1 (はさみうちの原理)

３つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の (i),(ii) を満たしているとする。

(i) すべての自然数 n に対して、$a_n \leq x_n \leq b_n$.

(ii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに α に収束する.

このとき、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束する。

例 1 - 5 - 2 $|r| < 1$ のとき

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} r^n = 0, \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty} nr^n = 0.$$

これを示すために、後述のネイピア数に関する証明でも使われる、二項定理を用いる。

補題 1 - 5 - 3 (二項定理)

0 以上の整数 n と $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と定め、これを**二項係数**と呼ぶ。次が成り立つ：任意の実数 a, b と任意の自然数 n に対して

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

(**[例 1 - 5 - 2] の証明**)

$r = 0$ のときは自明であるから、$r \neq 0$ かつ $|r| < 1$ のときに示す。このとき、

$$\frac{1}{|r|} = 1 + h \quad (h > 0)$$

とおくと、二項定理により

$$\left(\frac{1}{|r|}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

となる。$n \geq 2$ のとき、

$$(*) \qquad |r^n| = |r|^n \leq \frac{2}{n(n-1)h^2} \leq \frac{2}{nh^2}$$

すなわち、次の不等式が成り立つ：

$$-\frac{2}{nh^2} \leq r^n \leq \frac{2}{nh^2}.$$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{nh^2} = \frac{2}{h^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理により、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ を得る。
(2) $(*)$ より、$n \geq 2$ のとき、

$$|nr^n| = n|r|^n \leq n \cdot \frac{2}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

を得る。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ であるから、(1) と同様にして、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ がわかる。 □

● 1-6：上に有界・下に有界

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**上に有界** (resp. **下に有界**) であるとは次が成り立つときをいう：

(1-6 a)
「$a_n \leq K \quad (n = 1, 2, \cdots)$」となる実数 K が存在する
(resp.「$a_n \geq K \quad (n = 1, 2, \cdots)$」となる実数 K が存在する)

● 1-7：単調増加 (減少) 数列と収束

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**単調増加** (resp. **単調減少**) であるとは、

(1-7 a)
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$
$$(\text{resp. } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots)$$

が成り立つときをいう。単調増加数列 (resp. 単調減少数列) はいつでも $+\infty$ (resp. に $-\infty$) 発散するように思うかもしれないが、そうではない。

定理 1-7-1
上に有界 (resp. 下に有界) な単調増加数列 (resp. 単調減少数列) は収束する。

例 1-7-2 k を正の実数とする。漸化式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n})\ (n = 1, 2, \cdots)$ により定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界である。なぜならば、$a_{n+1} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{k}{a_n}} = \sqrt{k}\ (n = 1, 2, \cdots)$ だからである。さらに、その第 2 項以降は単調減少である。実際、$n \geq 2$ に対して、$a_n^2 \geq (\sqrt{k})^2 = k$ であるから、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) - a_n = \frac{k - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

となる。したがって、第 2 項以降は単調減少である。

[定理 1-7-1] により、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に収束する (注：実は、$\sqrt{k}$ に収束している)。

● 1-8：ネイピア数

ネイピア数 e は微分に関して極めてよい性質を持つ数であり、それは次のように定義される。

定理 1-8-1
(1-8 a) $\displaystyle a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

によって定まる 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。この 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに収束し、かつ、その極限は同じである。その極限を e と書き、**ネイピア数**という：

(1-8 b) $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(証明)

次の順で示す。

① $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列である (したがって、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する)。

② $a_n < a_{n+1}$ および $a_n \leq b_n$ が成り立つ (したがって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する)。

③ 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_m \geq b_n$.

(②の後半の不等式 $a_n \leq b_n$ と③とから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, つまり、等式 (1-8 b) を得る。)

①の証明：$k! \geq 2^{k-1}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ であるから、任意の自然数 n に対して

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} = 1 + 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big) < 3$$

となる。故に、数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。また、定義より、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。よって、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

②の証明：任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}
a_n &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{1}{n}\Big)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{k-2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{0}{n}\Big) \quad \cdots\cdots(*) \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{k-2}{n+1}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{0}{n+1}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \Big(\frac{1}{n+1}\Big)^k < \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \Big(\frac{1}{n+1}\Big)^k = \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

よって、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。また、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{k-2}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{0}{n}\Big) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = b_n$$

となる。$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であったから、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ も上に有界である。

③の証明：$m > n$ のとき、

$$a_m \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big(1 - \frac{k-1}{m}\Big)\Big(1 - \frac{k-2}{m}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{m}\Big)\Big(1 - \frac{0}{m}\Big)$$

が成り立つ。$m \to \infty$ とすると、右辺は

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (1-0)(1-0) \cdots (1-0)(1-0) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = b_n$$

に収束するから、$\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_m \geq b_n$ を得る。 □

<u>**例 1-8-2**</u> $\displaystyle\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^2 < 1 + \frac{2}{n} < \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2$ が確かめられる。ここで、

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{2(n+1)} \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{-2} = e^2 \cdot 1 = e^2$$

であるから、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{2}{n}\Big)^n$ も存在し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{2}{n}\Big)^n = e^2$ となる。 □

2026 年 4 月 9 日

数学を学ぶ（微分積分 1）第 1 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味	記号
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束することの意味と表し方	p.		
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に発散することの意味と表し方	p.		

	ページ	意味
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であるとは?	p.	
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であるとは?	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉や記号・数字を入れなさい。

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \boxed{}$. また、$|r| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$, $\lim_{n\to\infty} nr^n = \boxed{}$.
- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boxed{}$ しているとき、数列 $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の極限は $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ から次のように求めることができる：

  $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \boxed{}$ (複号同順), $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \boxed{}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \boxed{}$.

  但し、商は $b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ かつ $\beta \neq 0$ のときにのみ考える。
- $\boxed{}$ な単調増加数列は収束する。
- $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 n, k に対して、二項係数は $\binom{n}{k} = \boxed{}$ によって与えられる整数である。これは $\boxed{}$ 個の「もの」から並び順を考えずに $\boxed{}$ 個取り出すときの組合せの数に等しい。例えば、$\binom{5}{0} = \boxed{}$, $\binom{5}{1} = \boxed{}$, $\binom{5}{2} = \boxed{}$, $\binom{5}{3} = \boxed{}$, $\binom{5}{4} = \boxed{}$, $\binom{5}{5} = \boxed{}$ である。
- ネイピア数 e は 2 つの (異なる) 数列の極限として次のように表わされる。

$$e = \boxed{} = \boxed{}$$

Q3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5}$ のように、第 n 項が $\frac{(1\text{ 次式})}{(1\text{ 次式})}$ という形で与えられる数列の極限を求めるときの手順と、そのような手順を経て極限を求める理由を説明しなさい。

$\boxed{}$

Q4. 第 1 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。