

§1. ネイピア数と数列の極限

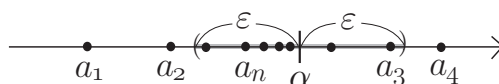
自然対数の底 $2.718281828459\dots$ を e という記号で表わした人物は、オイラー (Euler, 1707–1783) であるが、この数 e は、対数の発見者ネイピア (Napier, 1550–1617) の名前に因んで、ネイピア数と呼ばれている。ネイピア数は微分積分において基本的な役割を果たす重要な実数である。ここでは、ネイピア数を数列の極限により定める。

● 1-1 : 数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは、項の番号 n を限りなく大きくしていくと、絶対値 $|a_n - \alpha|$ がどんな (小さい) 実数 $\varepsilon > 0$ よりも小さくなるをいう。このとき、 α を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限 (値)** といい、

$$(1-1 \text{ a}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く。



例 1-1-1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

● 1-2 : $\pm\infty$ に発散するとは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に**発散する** (resp. $-\infty$ に**発散する**) とは、項の番号 n を限りなく大きくしていくと、 a_n (resp. $-a_n$) がどんな (大きな) 実数 $K > 0$ よりも大きくなるをいう。このことを

$$(1-2 \text{ a}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(1-2 \text{ b}) \quad \left(\text{resp.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty) \right)$$

と表わす。

例 1-2-1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$

● 1-3 : 数列の和差積商と極限

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が (それぞれある実数に) 収束するとき、4 つの数列

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

はすべて収束し、

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (複号同順),

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right),$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

が成り立つ。但し、商については $b_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ のときにのみ考える。

例 1-3-1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1}$ を求めよう。この形のままでは分子と分母の数列が収束しないため、分子と分母を n で割って、収束するようにしてから商の公式を適用する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

● 1-4：不等式と数列の極限

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が（それぞれある実数に）収束していて、 $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ となる。さらに、次が成り立つ。

定理 1-4-1（はさみうちの原理）

3つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の (i), (ii) を満たしているとする。

(i) すべての自然数 n に対して、 $a_n \leq x_n \leq b_n$.

(ii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに α に収束する。

このとき、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も α に収束する。

例 1-4-2 $|r| < 1$ のとき

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0,$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0.$$

(証明)

$r = 0$ のときに上の等式が成立することはすぐにわかるから、 $r \neq 0$ かつ $|r| < 1$ のときに示す。このとき、

$$\frac{1}{|r|} = 1 + h \quad (h > 0)$$

とおくことができる。2項定理により

$$\left(\frac{1}{|r|}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

となるので、 $n \geq 2$ のとき、

$$(*) \quad |r^n| = |r|^n \leq \frac{2}{n(n-1)h^2} \leq \frac{2}{nh^2}$$

すなわち、

$$-\frac{2}{nh^2} \leq r^n \leq \frac{2}{nh^2}$$

が成り立つ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{nh^2} = \frac{2}{h^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理により、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ とわかる。

(2) (*) より、 $n \geq 2$ のとき、

$$|nr^n| = n|r|^n \leq n \cdot \frac{2}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

を得る。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$ であるから、(1) と同様にして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ がわかる。 $\square$

● 1-5：上に有界・下に有界

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界 (resp. 下に有界) であるとは次が成り立つときをいう：

「 $a_n \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$)」となる実数 K が存在する

(1-5 a)

(resp. 「 $a_n \geq K$ ($n = 1, 2, \dots$)」となる実数 K が存在する)

● 1-6 : 単調増加 (減少) 数列と収束

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**単調増加** (resp. **単調減少**) であるとは、

$$(1-6 \text{ a}) \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

$$(\text{resp. } a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots)$$

が成り立つときをいう。単調増加数列 (resp. 単調減少数列) はいつでも $+\infty$ (resp. $-\infty$) 発散するように思うかもしれないが、そうではない。

定理 1-6-1

上に有界 (resp. 下に有界) な単調増加数列 (resp. 単調減少数列) は収束する。

例 1-6-2 $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列である。よって、この数列は収束する。

(証明)

$n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} < 2$$

であるから、与えられた数列は上に有界である。また、明らかに単調増加数列である。 $\square$

● 1-7 : ネイピア数

元金 A 円をある金融機関に金利 r ($= 1$ 年間の利息) で T 年間預けたとしよう。すると、 T 年後の資産は $A(1+r)^T$ になる。1 年あたり k 回に分けて運用したときには、 T 年後の資産は $A(1+\frac{r}{k})^{kT}$ となる。ここで、 k を限りなく大きくしていったとき、資産がどのようなのかを求めてみよう。

$$A\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kT} = A\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{k}{r}}\right)^{\frac{k}{r}}\right)^{rT}$$

と書き換えられるから、 $K = \frac{k}{r}$ において極限 $A \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{K}\right)^K\right)^{rT}$ を求めればよい。この極限の存在は次の定理からわかる。

定理 1-7-1

$$(1-7 \text{ a}) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を一般項とする数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。

その極限を e と書き、**ネイピア数**という：

$$(1-7 \text{ b}) \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

上の定理の証明のために、二項定理を用いる。

補題 1-7-2

0 以上の整数 n と $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

と定める。これを**二項係数** (binomial coefficient) と呼ぶ。次が成り立つ。

(1) 自然数 n と $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(2) (二項定理) 任意の実数 a, b と任意の自然数 n に対して

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(証明)

$$\begin{aligned} (1) \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k + (n-k+1))}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

(2) $a+b$ のコピーを n 個用意して、それを $X_1, \dots, X_n$ とおく。 $(a+b)^n = X_1 \cdots X_n$ と書ける。 $(a+b)^n$ を展開したときの $a^k b^{n-k}$ の係数は、 $X_1, \dots, X_n$ から k 個選ぶ選び方の総数 $\binom{n}{k}$ に等しい（選んだ k 個については a を、そうでない $n-k$ 個については b を“取り出して”掛け算すると $a^k b^{n-k}$ になる）。厳密には (1) を用いて、 n に関する帰納法で証明される。 $\square$

([定理 1-7-1] の証明)

① 任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{0}{n}\right) \cdots (*) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{0}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k < \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}. \end{aligned}$$

よって、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である。

② (*) と [例 1-6-2] の証明より

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{0}{n}\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 3.$$

となる。よって、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。

①と②より、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。 $\square$

例 1-7-3 $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 < 1 + \frac{2}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ であることが確かめられる。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-2} = e^2 \cdot 1 = e^2 \end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理により極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ も存在し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$ となる。 $\square$

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 1 回・学習内容チェックシート

学 籍 番 号 _____ 氏 名 _____

Q1. $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を実数列とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味	記号
$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が α に収束することの意味と表し方	p.		
$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が $+\infty$ に発散することの意味と表し方	p.		

Q2. $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を実数列とします。次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が上に有界であるとは？	p.	
数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が単調増加数列であるとは？	p.	

Q3. 次の に適当な言葉や記号・数字を入れなさい。

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \text{}$. また、 $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \text{}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = \text{}$.
- 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ が しているとき、数列 $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{a_nb_n\}_{n=1}^\infty$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^\infty$ の極限は $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ から次のように求めることができる：

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \text{}$ (複号同順), $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n) = \text{}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \text{}$.

但し、商は $b_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\beta \neq 0$ のときにのみ考える。

- な単調増加数列は収束する。
- ネイピア数 e は、数列の極限として $e = \text{}$ のように与えられる実数である。 e の近似値を小数点第 1 位まで書くと である。
- 0 以上の整数 n と $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、二項係数は $\binom{n}{k} = \text{}$ によって与えられる整数である。これは 個の「もの」から並び順を考えずに 個取り出すときの組合せの数に等しい。例えば、 $\binom{5}{0} = \text{}$, $\binom{5}{1} = \text{}$, $\binom{5}{2} = \text{}$, $\binom{5}{3} = \text{}$, $\binom{5}{4} = \text{}$, $\binom{5}{5} = \text{}$ である。

Q4. 第 1 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。