

§1. 無限級数の定義

ここでは、(無限) 級数という概念を導入し、級数の収束と発散、級数の和を定義する。後半では、正項級数が収束するための必要十分条件を述べ、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することを示したり、小学校以来親しんで来た「小数」の意味を考える。

● 1-1：級数とは

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、その各項を初項から順番に $+$ という記号でつないだ‘形式和’

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**無限級数**、または、単に、**級数**と呼び、

$$(1-1 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き表わす。ここで、足し算の記号 $+$ や和の記号 $\sum$ を用いているが、足し算を実行した結果を表わしているわけではないことに注意する。

例 1-1-1

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ を**調和級数**という。

(2) 実数 a, r に対して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ を初項 a 、公比 r の(無限) **等比級数**という。

● 1-2：級数の収束

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、第1項から第 n 項までの和

$$(1-2 \text{ a}) \quad S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

を**第 n 部分和**という。

第 n 部分和を第 n 項とする数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束する**といい、**極限值**

$$(1-2 \text{ b}) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**和**と呼ぶ。和 S も級数と同じ記号 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表わす。したがって、収束する級数に対して、記号 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、形式和と実数の2つの意味を持つことになる。どちらの意味で使っているのかは、前後の文脈で判断する。

例 1-2-1 無限等比級数

$$(1-2 \text{ c}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

は $|r| < 1$ のとき収束し、そのときの和は $\frac{a}{1-r}$ である。

(証明)

S_n を与えられた級数の第 n 部分和とする。 $S_n - rS_n$ を計算することにより、 $r \neq 1$ のとき、

$$(1-2 \text{ d}) \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となることがわかる。 $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから、 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

となることがわかる。 □

● 1-3 : 級数の収束と線形性

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ も収束して、その和について、

$$(1-3 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(ii) 任意の実数 k に対して、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n)$ も収束して、その和について、

$$(1-3 \text{ b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

● 1-4 : $+\infty$ に発散する級数

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $+\infty$ に発散するとは、その第 n 部分和を第 n 項とする数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $+\infty$ に発散するときをいい、これを

$$(1-4 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

と書き表わす。

例 1-4-1 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は $+\infty$ に発散する。

(証明)

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots$ を1つ固定すると、 $k \leq x$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$$

であるから、不等式

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$$

を得る。この両辺を k が1のときから n のときまで足し上げると、調和級数の第 n 部分和 S_n について

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

が成り立つ。ここで、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\log(n+1) \rightarrow +\infty$ であるから、 $S_n \rightarrow +\infty$ とわかる。つまり、調和級数は $+\infty$ に発散する。 □

● 1-5 : 正項級数

すべての n について $a_n \geq 0$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という。

正項級数の第 n 部分和を第 n 項とする数列は単調増加列であることから、正項級数については、収束するか、 $+\infty$ に発散するか、のどちらか一方のみが成り立つ。

定理 1-5-1

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は、数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界になることである。

例 1-5-2 正項級数

$$(1-5 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

は収束する。

(証明)

$n \geq 2$ に対して

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

となるから、数列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界である。よって、正項級数 (1-5 a) は収束する。 □

注意 1-5-3 一般に、実数 $\alpha > 1$ について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ は収束する。その和を $\zeta(\alpha)$ と書き、ゼータ関数値という。実は、 $\zeta(2) = \pi^2/6 = 1.644934066848226.....$ である。

● 1-6 : 実数の m 進小数表示

m を 2 以上の整数とする。このとき、次の形の正項級数

$$(1-6 \text{ a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^n} \quad (a_n = 0, 1, \dots, m-1)$$

は常に収束し、その和は $[0, 1]$ の中にある。逆に、任意の実数 $x \in [0, 1]$ は (1-6 a) の形の級数の和として表わされる。実際、 $x = 1$ のとき、

$$(1-6 \text{ b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m-1}{m^n} = (m-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} = (m-1) \frac{\frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{m}} = 1$$

と表わされる。

$0 \leq x < 1$ のとき、 $0 \leq mx < m$ であるから、 $a_1 \leq mx < a_1 + 1$ を満たす $a_1 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ が見つかる。このとき、 $x_1 = mx - a_1$ とおくと、 $0 \leq x_1 < 1$ となる。今の操作を x_1 に対して行うことにより、 $a_2 \leq mx_1 < a_2 + 1$ を満たす $a_2 \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ が見つかり、 $x_2 = mx_1 - a_2$ とおくと、 $0 \leq x_2 < 1$ となる。以下同様に、 $\{0, 1, \dots, m-1\}$ の元からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $0 \leq x_n < 1$ を満たす数 x_n からなる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ であって、 $x_n = mx_{n-1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

を満たすものを構成することができる。但し、 $x_0 = x$ とおく。このとき、 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$x = \frac{a_1}{m} + \frac{x_1}{m} = \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \frac{x_2}{m^2} = \dots = \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{m^2} + \dots + \frac{a_n}{m^n} + \frac{x_n}{m^n}$$

となることがわかる。したがって、

$$\left| x - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{m^k} \right| = \frac{x_n}{m^n} < \frac{1}{m^n}$$

が成り立つ。 $m \geq 2$ なので $\{\frac{1}{m^n}\}_{n=1}^\infty$ は 0 に収束する。よって、

$$\left| x - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{m^k} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

これは、

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^n}$$

と書けることを意味する。

実数 $x \in [0, 1]$ が (1-6 a) の形の級数の和として表わされるとき、 $x = (0.a_1a_2a_3\cdots)_m$ と書き表わし、 x の (無限) m 進小数表示と呼ぶ。 $m = 10$ のときには、単に $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ のように表わす。つまり、小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ とは、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(10)^n}$ の和で与えられる実数の表示のことであり、実体としては、その実数自身を表わす。すなわち、 $a_n = 0, 1, 2, \dots, 9$ ($n = 1, 2, \dots$) として、

$$(1-6 c) \quad 0.a_1a_2a_3\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(10)^n}$$

が成立する。

例 1-6-1 (1-6 b) より、

$$1 = (0. \underbrace{m-1}_{m-1} \underbrace{m-1}_{m-1} \underbrace{m-1}_{m-1} \cdots)_m$$

のように書ける。特に、 $m = 10$ の場合を考えて、

$$1 = 0.999\cdots$$

を得る。

□

数学を学ぶ（関数と微分積分の基礎 2）第 1 回・学習内容チェックシート

学籍番号 _____ 氏 名 _____

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
級数とは？	p.	
級数の第 n 部分和とは？	p.	
級数の和とは？	p.	
正項級数とは？	p.	
小数 $0.a_1a_2a_3\ldots$ の意味は？	p.	

Q2. 次の表を完成させなさい。

	解決方法・方針
初項 a , 公比 r ($\neq 1$) の等比級数の第 n 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1}$ を求めるには？	
正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示すには？	

Q3. 次の に適当な言葉や数字を入れなさい。

- 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ および任意の実数 k に対して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ は収束し、その和は次の公式を使って求めることができる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \text{}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n = \text{}.$$

- 調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は するが、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は する。
- $0.99999\ldots = \text{}$.

Q4. 第 1 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。