§2. 和と積の記号

ここでは、有限個の実数についての和と積を表わす記号 $\sum$, $\prod$ に込められている意味と使い方を学ぶ。

● 2-1：和の記号

n 個の実数 $a_1, \cdots, a_n$ が与えられたとき、a_1 に a_2 を加え、得られた数 $a_1 + a_2$ に a_3 を加え $\cdots$ というように、a_1 から a_n まで順番に和をとることに 1 つの実数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ が定まる。この実数を

(2-1 a)
$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

と表わす。この実数は次のように帰納的に定義されている。

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \quad n \geq 2 \text{ に対して } \sum_{i=1}^{n} a_i = \Bigl(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\Bigr) + a_n.$$

記号 $\sum$ は、和を意味する英語 summation の頭文字 S に対応するギリシア文字に由来している。

例 2-1-1 $a_i = 1\ (i = 1, \ldots, n)$ のとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = n$, すなわち、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ である。

(2-1 a) において和の記号に付属している文字 i は、すでに意味が確定している n と a 以外であれば、好きな文字に置き換えることができる。よって、例えば

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

のような書き換えができる。また、必ずしも 1 から始める必要はない。例えば、$a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ を $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$ のように書くことができる。このプリントでは使用しないが、通常、本文の中に和の記号を挿入する場合には、行間を揃えるために $\sum_{i=1}^{n}$ という表示が使われる。

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ を $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$ とも書くことがある：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i$.

例 2-1-2 $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

● 2-2：積の記号

和と同様に、a_1 から a_n まで順番に積をとることにより得られる実数 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を

(2-2 a)
$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

と表わす。この実数は次のように帰納的に定義されている。

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1, \quad n \geq 2 \text{ に対して } \prod_{i=1}^{n} a_i = \Bigl(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\Bigr) a_n.$$

記号 $\prod$ は、積を意味する英語 product の頭文字 P に対応するギリシア文字に由来している。和の記号と同様に、本文の中に積の記号を挿入する場合には、$\prod_{i=1}^{n}$ という表示が使われる。

例 2-2-1 n を自然数、a を実数とするとき、$\displaystyle n! = \prod_{i=1}^{n} i,\ a^n = \prod_{i=1}^{n} a.$

$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ を $\displaystyle\prod_{1\le i\le n} a_i$ とも書くことがある：$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{1\le i\le n} a_i.$

例 2-2-2 $\displaystyle\prod_{1\le k\le n} k^2 = \prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2.$

● 2-3：有限集合の元に渡る $\sum$ 記号・$\prod$ 記号の意味と使い方

有限集合（= 元の個数が有限個であるような集合）I の各元 i に対して、実数 a_i が 1 つずつ定められているとする (例えば、$I = \{\bigcirc,\ \triangle,\ \square\}$ であって、$a_{\bigcirc} = \sqrt{2},\ a_{\triangle} = 1,\ a_{\square} = \pi$ のような場合を想像しよう)。このとき、I のすべての元 i にわたって a_i たちの和をとることにより得られる実数を、記号

$$\sum_{i\in I} a_i$$

で表わし、I のすべての元 i にわたって a_i たちの積をとることにより得られる実数を、記号

$$\prod_{i\in I} a_i$$

で表わす。

例 2-3-1 n を自然数とする。$I = \{1, \ldots, n\}$ のとき、

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \prod_{i\in I} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

上記の基本を踏まえた上で、$\sum$ 記号や $\prod$ 記号の記述を、誤解が生じない範囲内で、変更することができる。ここで、よく使われる書き方を紹介する。

① I, J を 2 つの有限集合とし、直積集合 $I\times J$ の各元 (i,j) に対して、実数 a_{ij} が 1 つ定められているとする。このとき、$I\times J$ のすべての元 (i,j) にわたる a_{ij} たちの和、および、積をそれぞれ

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} \qquad \text{および} \qquad \prod_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} \tag{2-3 a}$$

によって表わす。特に、I, J が、m, n を自然数として、$I = \{1, \ldots, m\},\ J = \{1, \ldots, n\}$ によって与えられているときは、(2-3 a) で表わされる実数をそれぞれ

$$\sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij} \qquad \text{および} \qquad \prod_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij}$$

のようにも書き表わす。さらに、$n = m$ の場合には次のように書き表わす：

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} \ \left(\text{または} \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right) \qquad \text{および} \qquad \prod_{1\le i,j\le n} a_{ij} \ \left(\text{または} \ \prod_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

例 2-3-2 $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad \prod_{1\le i,j\le n} ij = \prod_{i=1}^{n} (i^n n!) = (n!)^{2n}.$

解；

和の方は、

$$\sum_{1\le i,j\le n} ij = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ij\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\sum_{i=1}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

と $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ より従う[†]。積の方は、

$$\prod_{1\le i,j\le n} ij = \prod_{i=1}^{n}\Bigl(\prod_{j=1}^{n} ij\Bigr) = \prod_{i=1}^{n}\Bigl(i^n \prod_{j=1}^{n} j\Bigr) = \prod_{i=1}^{n}(i^n n!) = (n!)^n \Bigl(\prod_{i=1}^{n} i\Bigr)^n$$

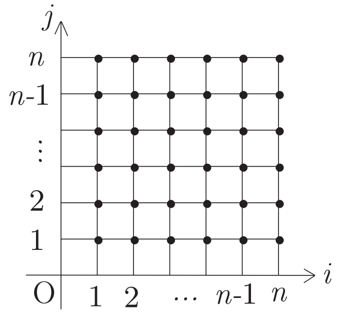
となることによる。 □

例 2-3-3 n を自然数とし、$1 \le i,\ j \le n$ を満たす整数 $i,\ j$ の各組 (i, j) に対して、実数 a_{ij} が 1 つ定められている。このとき、

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) \tag{2-3 b}$$

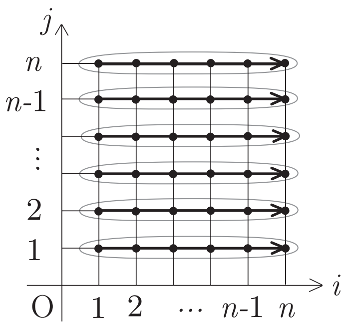
が成り立つ。

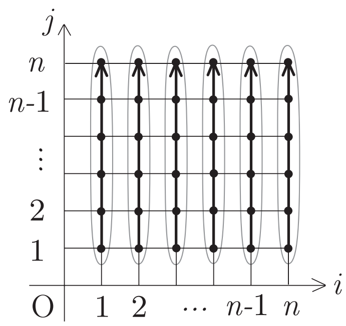
この等式が成立する理由を図を使って説明しよう。座標平面に、下図のような格子を描き、各格子点 (i, j) $(1 \le i, j \le n)$ に a_{ij} が乗っていると考える。



$$((2\text{-}3\text{ b}) の左辺) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}$$

であるから、(2-3 b) の左辺は格子の「横方向」に関して和をとってから、「縦方向」に関して和をとったものを表わしている。同様に考えて、(2-3 b) の右辺は格子の「縦方向」に関して和をとってから、「横方向」に関して和をとったものを表わしている。





(2-3 b) の左辺も (2-3 b) の右辺も、和をとる順番は異なるが、n^2 個のすべての格子点 (i, j) に渡って a_{ij} を重複なく一度ずつ足し上げたものに等しいので、

$$((2\text{-}3\text{ b}) の左辺) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} = ((2\text{-}3\text{ b}) の右辺)$$

が成り立つ。 □

[†] $a < n$ に対して和 $S = \sum_{i=a}^{n} i$ を求めたい場合には、S を $S = a+(a+1)+\cdots+(n-1)+n$ と $S = n+(n-1)+\cdots+(a+1)+a$ の 2 通りに書き、この両辺をそれぞれ足すとよい。(左辺は $2S$ だが、右辺は $(a+n)+((a+1)+(n-1))\cdots+((n-1)+(a+1))+(n+a)$ となり、$n+a$ を $n-a+1$ 個足したものになる。このとことから、$2S = (n-a+1)(n+a)$ が得られ、和 S の値が求まる。)

② $1 \leq i < j \leq n$ を満たす整数の各組 (i,j) に対して、１つの実数 a_{ij} が定められているとする。このとき、$S := \{\ (i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\ \}$ のすべての元 (i,j) にわたる a_{ij} たちの和 $\sum_{(i,j)\in S} a_{ij}$ および積 $\prod_{(i,j)\in S} a_{ij}$ をそれぞれ次のようにも書き表わす：

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \qquad \text{および} \qquad \prod_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}.$$

例 2-3-4 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して実数 a_i が定められているとき、

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j.$$

● **2-4：$\sum$ 記号と $\prod$ 記号の性質**

$\sum$ と $\prod$ が持つ基本的な性質をまとめておこう。

❶ 有限集合 I の各元 i に対して、２つの実数 $a_i,\ a_i'$ が定められているとき、次が成り立つ。

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + a_i') = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} a_i'.$

(ii) $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i a_i') = \Big(\prod_{i\in I} a_i\Big)\Big(\prod_{i\in I} a_i'\Big).$

❷ ２つの有限集合 I, J の直積集合 $I \times J$ の各元 (i,j) に対して、実数 a_{ij} が定められているとき、次が成り立つ。

(iii) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{ij}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{ij}\Big).$

(iv) $\displaystyle\prod_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \prod_{i\in I}\Big(\prod_{j\in J} a_{ij}\Big) = \prod_{j\in J}\Big(\prod_{i\in I} a_{ij}\Big).$

❸ 有限集合 I の各元 i に対して実数 a_i が定められていて、有限集合 J の各元 j に対して実数 b_j が定められているとき、任意の実数 α に対して、

(v) $\displaystyle\alpha\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) = \sum_{i\in I} \alpha a_i, \qquad \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\alpha = \sum_{i\in I} a_i \alpha.$

(vi) $\displaystyle\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j.$

- 性質 (i) は加法の結合法則 $(a+b)+c = a+(b+c)$,
- 性質 (ii) は乗法の結合法則 $(ab)c = a(bc)$,
- 性質 (iii) は加法の結合法則 $(a+b)+c = a+(b+c)$ と交換法則 $a+b = b+a$,
- 性質 (iv) は乗法の結合法則 $(ab)c = a(bc)$ と交換法則 $ab = ba$
- 性質 (v) と (vi) は加法と乗法の結合法則に加えて、加法と乗法の間の分配法則 $a(b+c) = ab + ac,\ (a+b)c = ac + bc$

から導くことができる。

注意：$\sum$ 記号と $\prod$ 記号の諸性質を導くのに、実数の和と積に関する結合法則、交換法則、分配法則しか使っていないので、上の文章の中の「実数」を「複素数」に置き換えても同じ等式が成り立つことがわかる。