§2. 行列の積

2 つの数に対して足し算や掛け算を計算できたように、行列に対しても足し算や掛け算を計算することができる。ここでは、特に重要な掛け算の定義と性質を学ぶ。行列の積は実数の積と類似の性質を持つ部分が多いが、いくつか異なる点もある。

● 2 - 1 ： 行列の積の定義

前回、連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

について、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を、例えば、

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

のように変化させていったときの $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の値の変化の様子を見るには、

(2 - 1 a) $$A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3\ A\mathbf{b}_4)$$

と約束しておくと、１つの式で表わすことができて便利であることを述べた。

$$B = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4)$$

とおくと、(2 - 1 a) は

(2 - 1 b) $$AB = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ A\mathbf{b}_3\ A\mathbf{b}_4)$$

と書き換えられて、2 つの行列 A, B の積の定義式と解釈することができる。

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと、

$$A\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + a_{13}b_{3j} \\ a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + a_{23}b_{3j} \\ a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + a_{33}b_{3j} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(AB\ \text{の}\ (i, j)\text{-成分}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

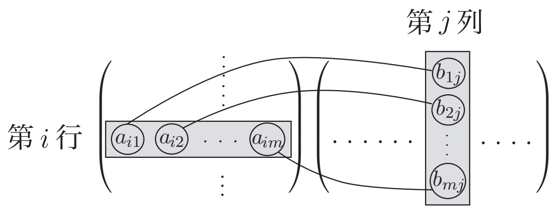
と表わされることがわかる。これを代入して、AB を成分で具体的に書くと次のようになる：

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & \cdots & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & \cdots & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & \cdots & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + a_{33}b_{34} \end{pmatrix}.$$

上記の事実を背景に、一般に、(l,m)-行列 $A=(a_{ik})_{i,k}$ と (m,n)-行列 $B=(b_{kj})_{k,j}$ に対して、A と B の**積** AB を

(2-1 c)
$$AB=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le l\\1\le j\le n}},\quad \text{但し、}\quad c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$$

によって定義する。AB は (l,n)-行列である。



注意：積 AB は行列 A の列の数と行列 B の行の数が一致しているときのみ定義される。

例 2-1-1 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$ に対して、積 AB は

(2-1 d)
$$AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}.$$

によって定義される。$B=(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2)$ とおくと、$AB=(A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2)$ と表わされる。

例えば、$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9&-1\\-4&5\end{pmatrix}$ に対して、$AB=\begin{pmatrix}-3&14\\-6&28\end{pmatrix}$.

例 2-1-2 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-2&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ に対して、$AB=\begin{pmatrix}-7&0&7\\-16&-6&22\end{pmatrix}$ である。一方、$(B\text{ の列の数})=3\neq 2=(A\text{ の行の数})$ なので、積 BA は定義されない。 □

● 2-2：行列の積の性質

行列の積は、積 AB と BA の両方が定義できたとしても、一般に $AB\neq BA$ であり、実数の積とは違う性質を持つ。

例 2-2-1 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9&-1\\-4&5\end{pmatrix}$ に対して、

$$AB=\begin{pmatrix}-3&14\\-6&28\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}7&21\\6&18\end{pmatrix}.$$

AB と BA の $(1,1)$-成分は異なるので、$AB\neq BA$ である。 □

しかし、次の補題に記されているように、実数と似た性質も持っている。

補題 2-2-2

行列の積は以下の性質を持つ。

(1) (**結合法則**) 行列 A,B,C に対して、積 AB および BC が定義されるとき、

(2-2 a)
$$(AB)C=A(BC).$$

(2) 対角成分が 1 で、残りの成分がすべて 0 であるような n 次正方行列

(2-2 b)
$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
は、任意の (m,n)-行列 A と任意の (n,l)-行列 B に対して、

(2-2 c)
$$AE_n = A, \qquad E_nB = B$$
を満たす。したがって、E_n は実数の 1 の役割を果たす。E_n を n 次**単位行列**という。

(**証明**)

(2) は積の定義通りに計算すればわかるので、(1) を示そう。仮定により、積 AB および BC を考えることができるので、B を (m,n)-行列とおくと、$A,\ C$ はそれぞれ (l,m)-行列、(n,p)-行列の形となる。$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij})$ とおく。このとき、

$$(AB)C = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ a_{i1}b_{11}+\cdots+a_{im}b_{m1} \quad \cdots \quad a_{i1}b_{1n}+\cdots+a_{im}b_{mn} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{} & \begin{matrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{matrix} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ a_{i1} \quad \cdots \quad a_{im} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{} & \begin{matrix} b_{11}c_{1j}+\cdots+b_{1n}c_{nj} \\ \vdots \\ b_{m1}c_{1j}+\cdots+b_{mn}c_{nj} \end{matrix} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned}
((AB)C \text{ の } (i,j)\text{-成分}) &= \begin{pmatrix} \quad (a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\cdots+a_{im}b_{m1})c_{1j} \\ +(a_{i1}b_{12}+a_{i2}b_{22}+\cdots+a_{im}b_{m2})c_{2j} \\ + \qquad \cdots\cdots \\ +(a_{i1}b_{1n}+a_{i2}b_{2n}+\cdots+a_{im}b_{mn})c_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{i1}b_{11}c_{1j} & + & a_{i2}b_{21}c_{1j} & +\cdots+ & a_{im}b_{m1}c_{1j} \\ +\ a_{i1}b_{12}c_{2j} & + & a_{i2}b_{22}c_{2j} & +\cdots+ & a_{im}b_{m2}c_{2j} \\ +\ \cdots & + & \cdots & +\cdots+ & \cdots \\ +\ a_{i1}b_{1n}c_{nj} & + & a_{i2}b_{2n}c_{nj} & +\cdots+ & a_{im}b_{mn}c_{nj} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \quad a_{i1}(b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+\cdots+b_{1n}c_{nj}) \\ +a_{i2}(b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+\cdots+b_{2n}c_{nj}) \\ + \qquad \cdots\cdots \\ +a_{im}(b_{m1}c_{1j}+b_{m2}c_{2j}+\cdots+b_{mn}c_{nj}) \end{pmatrix} \\
&= (A(BC) \text{ の } (i,j)\text{-成分})
\end{aligned}$$

となる。よって、定理は証明された。 □

例 2-2-3 $\ (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = x^2+2axy+y^2+2bx+2cy+1.$

● 2-3: 零行列

$$(0), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように、すべての成分が 0 であるような行列を**零行列**と呼ぶ。通常、零行列はすべて記号 O を使って書き表わす。

零行列に（積が定義可能な）どのような行列を掛けても零行列であり、零行列は実数の 0 と同じ役割りを果たす。しかしながら、$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して、$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるように、$A \neq \mathrm{O}$, $B \neq \mathrm{O}$ であっても、$AB = \mathrm{O}$ となることがあり得る。これもまた、実数の積では起こり得ない、行列の積に特有の性質である。

● 2 - 4：転置行列

(m, n)-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して、その行と列を入れ換えて得られる (n, m)-行列

(2 - 4 a)
$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を A の**転置行列**という。

注意：転置行列 A^{T} は、教科書では ${}^{t}A$ と記されている。この記号を用いてもよいが、どちらかに統一して使うこと。この授業では、次回説明する行列の t 倍との混乱を避けるため、A^{T} を用いる。

例 2 - 4 - 1 行列 $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ について $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

転置行列は次の性質を持つ。

補題 2 - 4 - 2

(1) 行列 A, B に対して、積 AB が定義されるとき、積 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ が定義され

(2 - 4 b)
$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

(2) n 次正方行列 E_n に対して、$(E_n)^{\mathrm{T}} = E_n$.

(3) 行列 A に対して、$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

(証明)

転置行列の定義から、(2), (3) はすぐに成立することがわかるから、(1) を示す。

$A = (a_{ik})_{\substack{1 \le i \le l \\ 1 \le k \le m}}$, $B = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le j \le n}}$ とおくと、$A^{\mathrm{T}} = (a_{ik})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le i \le l}}$, $B^{\mathrm{T}} = (b_{kj})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m}}$ となる。積の定義より、$(AB)^{\mathrm{T}}$ と $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ のサイズはともに (n, l) であり、任意の i, j $(1 \le i \le l,\ 1 \le j \le n)$ に対して

$$\begin{aligned} (B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \text{ の } (j,i)\text{-成分}) &= b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im} \\ &= (AB \text{ の } (i,j)\text{-成分}) = ((AB)^{\mathrm{T}} \text{ の } (j,i)\text{-成分}) \end{aligned}$$

である。よって、$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ が成り立つ。 □

線形代数１事前練習用演習問題

pre2-1. (２次正方行列の積)

２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 積 AB および BA を計算せよ。(答えのみは不可。計算方法がわかるように解答すること。)

(2) $AB = BA$ か？理由をつけて答えよ。

pre2-2. (行列の積と転置行列)

行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) 転置行列 A^{T} を求めよ。

(2) 積 $A^{\mathrm{T}}A$ と AA^{T} を計算せよ。

ヒントと略解（最初は見ずに解答してください）

pre2-1. [例 2 - 1 - 1], [例 2 - 2 - 1] を参照して、容易に解答することができる。積の計算過程は略す。

(1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) (1) より、AB と BA の $(1,1)$-成分はそれぞれ 0 と -6 であり、異なる。よって、$AB \neq BA$ である。

pre2-2. 転置行列の定義と行列の積の定義に基づいて、容易に解答することができるので、ここでは答えのみ記す。転置行列と行列の積を計算する前に、それらのサイズを最初に調べておくとよい。

(1) $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ -20 & 29 \end{pmatrix}$, $AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 11 \\ -8 & 13 & -18 \\ 11 & -18 & 25 \end{pmatrix}$.

線形代数１・第２回 (2024 年 4 月 18 日) 演習問題事前練習シート

※このシートを A4 片面 1 枚に印刷して、授業前までに事前練習用演習問題の解答をここに書いてください。略解を参照して答え合わせをしたものを授業に持参してください。但し、このシートは提出せず、各自で保管してください。

線形代数１・第２回学習内容チェックシート 2024 年 4 月 18 日

学 籍 番 号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏 名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Q1. 次の表を完成させなさい。ページ欄にはその言葉の説明が書かれているアブストラクトのページを書きなさい。

	ページ	意味
単位行列とは？	p.	
零行列とは？	p.	

Q2. 次の $\boxed{}$ に適当な言葉、数字、数式、記号等を入れなさい。

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \boxed{}$$

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \boxed{}$$

- (m, n)-行列 A と (m', n')-行列 B について積 AB を考えることができるのは、$\boxed{}$ のときに限る。このとき、行列 AB のサイズは $\boxed{}$ である。
- 行列 B を列ベクトルにより $B = (\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_n)$ と表わすとき、積 AB は $AB = \boxed{}$ のように計算される。
- (l, m)-行列 $A = (a_{ik})$ と (m, n)-行列 $B = (b_{kj})$ の積 AB の (i, j)-成分は

$$\boxed{}$$

  で与えられる。
- $(3, 4)$-行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ に対して

$$A^{\mathrm{T}} = \boxed{}$$

Q3. 第 2 回の授業で学んだ事柄について、わかりにくかったことや考えたことなどがあれば、書いてください。